PROJECT AKARI

AKARI

知乎 @ 余命数（水无月雫）

中学数学之旅

第四卷·分析主干

Volume IV · ANALYSIS

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$$

公开版 · 10 月 5 日

Project Akari

余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

中学数学之旅

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

rikka.moe

知乎@余命数

余命数 (Midnight Forever)
知乎 @ 余命数
https://rikka.moe

知乎@余命数

中学数学之旅
An Excursion through Secondary School Mathematics
最后更新：October 7, 2026

知乎@余命数

© 2026 余命数
保留所有权利. 书稿版本，禁止修改、倒卖等任何侵犯作者著作权的行为.

知乎@余命数

知乎@余命数

书稿声明

Draft Notice

本书目前为**书稿状态**，意味着：

- 内容尚未完整，部分章节可能缺失或正在编写中
- 文中可能存在笔误、排版错误或数学推导疏漏
- 章节结构与内容安排可能在后续版本中调整
- 习题答案与索引等附录内容可能尚未完善

若您在阅读过程中发现任何错误或有改进建议，
欢迎通过以下方式联系作者：

个人网站：https://rikka.moe

电子邮箱：me@rikka.moe

书籍主页：https://rikka.moe/books

当前版本：Draft October 7, 2026

知乎@余命数

献词

Dedication

谨以此书

献给未来

愿尚未写就的每一页，都不辜负此刻的笔耕

每一个未曾舞蹈的日子
都是对生命的一种辜负

„Und verloren sei uns der Tag,
wo nicht ein Mal getanzt wurde!”

— 弗里德里希·尼采
Friedrich Nietzsche

— 2026 —

知乎@余命数

关于作者

余命数



Project Akari ·Midnight Forever

2025 届广西新高考二卷考生, 政史地组合, 数学 139 分.

这套书整理自我中学阶段学习数学时的笔记与讲义. 我按一条理想的阅读骨架把代数、离散与随机、几何、分析、线性结构依次铺开, 每条结论都给出推导路径, 把概念彼此生长的过程摊开在纸面上. 愿它陪你走完一段中学数学的旅程.

书籍主页

https://rikka.moe/books

更多信息、勘误表、联系方式等均可在此查看

交流与联系

在线平台

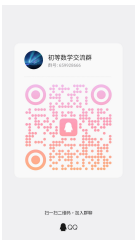
个人主页	`https://rikka.moe`
书籍主页	`https://rikka.moe/books`
知乎	@ 余命数
爱发电	`https://afdian.com/a/writeamathbook`

即时通讯

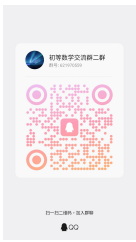
QQ	`2454167821`
交流群	`659928666`
邮箱	`me@rikka.moe`



扫码添加好友



交流群一



交流群二



爱发电赞助

知乎@余命数

欢迎通过以上方式与我交流讨论

知乎@余命数

前言

如果你基于本书制作修改版 PDF, 请保留这里的前言与声明, 谢谢. 想了解更多, 请访问我的主页https://rikka.moe

推动我写这套书的最主要动因是贫穷. 我高中就读于一所普通的省重点, 家里没钱给我补习, 能找到的老师水平也一般.

好在我有一台能联网的手机和一颗热爱学习的心, 于是便用互联网找学习资源, 听网课、看电子书.

这个过程里我攒下大量笔记, 大多记在 Obsidian 上. 高考结束后的 2025 年暑假, 我把这些笔记整理成册, 发到几个群里反响不错, 于是继续写了下去.

我也希望这本书能集百家之长. 市面上的资料和教辅很多, 我想读一本成体系、又贴合自己阅读习惯的书, 于是干脆自己动手写, 权当半个教科书.

这本书花了我不少时间. 如果你觉得有帮助, 欢迎去爱发电https://afdian.com/a/writeamathbook支持一下, 请我吃一碗拼好饭也可以. 书中的疑问或错误, 欢迎随时联系, 邮件 me@rikka.moe、QQ2454167821, 或加入 QQ 群 659928666.

知乎@余命数

吊诡的是, 我觉得教辅太贵, 所以都看电子版.

Obsidian 是一款很好用的笔记软件, 用好了可以打造属于自己的知识库.

关于联系与提问

本人经常在外打工兼职或忙别的事, QQ 私聊不一定看得到, 重要的事情请发知乎私信. 已经写清楚的问题我一般不再重复, 比如分卷本与合订本的区别、各版本之间的区别.

学习方法我也说不出什么有用的. 你观察过学得好的同学就会发现, 无论被谁请上台分享经验, 大多只能说些政治正确的话, 扎实基础、回归课本、多跟老师. 这怪不得他们, 真正掌握一项技能后, 就很难想象不懂它是什么感觉, 一项已经内化的能力, 很难再拆开讲给你听.

即便方法就是“极度的自律、极高的抗挫折能力、成百上千小时的枯燥重复”, 即便有些人同时有智商与基因、家庭托底和超强的专注力与抗挫折力, 学习也没有廉价速成的魔法. 每次有人问我, 我也只能给出和所有人一样的回答, 巩固基础、回归课本、多跟老师、总结错题.

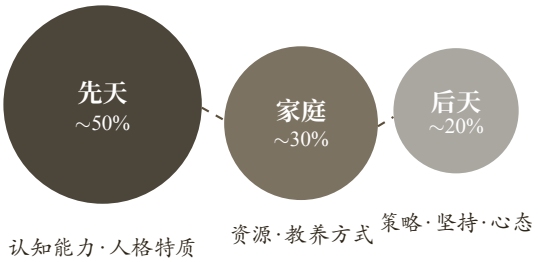
用卖课的人的话说, 就是欢迎多多支持我的项目和电子书. 所以这方面的问题, 就不必再问了.

不过, 考虑到还是有人想知道学习方法. 很好, 下面从比较科学的角度出发, 拒绝政治正确和哔哩哔哩经典学长或学姐分享学习方法的套话, 来说说好的学习方法.

学习成绩的好坏可以认为取决于三大类因素: 先天禀赋、家庭条件和后天努力. 下图用圆的大小表示各自的影响占比, 圆越大代表该因素对成绩差异的解释份额越多.

占比数据综合自 Silventoinen et al. (2020) 在 Scientific Reports 上发表的 28 国双胞胎整合分析(遗传力约 40%–70%, 共享环境约 20%–40%)与 de Zeeuw et al. (2015) 的荷兰双胞胎元分析; 本文取中位数附近的近似值.

知乎@余命数



知乎@余命数

图中三个圆分别代表：

- **先天**，约占一半：认知加工速度、工作记忆容量等人脑硬件参数，以及尽责性、抗压性等人格倾向. 这部分相对稳定，但并非锁死. 早期营养、睡眠和运动会影响其发挥. 有些人的确在某些方面的所谓的感觉更好，又或者说，假如你在婴幼儿时期，甚至还没出生的时候，就接受到了一些对神经系统不太好的物质，这都是实打实的.
- **家庭**，约占三成：家里的藏书量、父母的词汇量和教育期望、能否提供安静的学习环境与课外资源. 家庭条件好在早期尤为关键，随着年级升高其权重逐渐下降. 这里也比较显然，如果家庭是那种书香家庭，父母都是文化人，或者都是中产阶级甚至是富人阶级，请得起清华北大的私教一对一，买学区房、上重高等等，获取好的成绩的概率更大、更轻松. 如果家庭是那种一天到晚都在吵架、家庭暴力、父母没文化而且也不怎么有钱（遗憾的是编者的家庭都是如此，因此我付出了很大的努力），很大概率最后都是成绩一般甚至很差，成为混混或其他.
- **后天**，约占两成：学习方法是否科学、能不能坚持、面对难题时的心态. 虽然占比最小，却是个人最能把控的部分，也是拉开同等条件下人与人差距的主战场. 这也就是唯一可以努力的地方，除非你是家长，否则对于学生，也就是我们而言，只有此路！

虚线表示三类因素之间存在交互，即先天禀赋需要在合适的家庭环境中才能充分发挥，而后天努力的效率又受限于先天的认知基础和家庭提供的资源.

把可控因素提炼出来，成绩的近似模型可以写成：

$$\text{成绩} \approx \underbrace{(\text{认知基础} + \text{尽责性})}_{\text{较稳定}} \times \underbrace{(\text{科学策略} + \text{自我调节})}_{\text{高度可控}} + \underbrace{\text{家庭支持} + \text{教学质量}}_{\text{环境系数}} \tag{0-1}$$

说说，公式里用的是乘法和加法，含义各有侧重.“较稳定”部分与“高度可控”部分之间是乘号，即便先天基础只有六七分，只要方法和自律跟上，乘积依然可观；反过来基础再好，方法为零则乘积也为零. 加在最外面的“环境系数”是加分项，好的家庭和老师能把整体水平往上抬一截，但它们替代不了主体部分的乘积.

Poropat (2009) 的元分析，样本逾七万人，显示尽责性是大五人格中对学业成绩最强的非智力预测因子，其对大学成绩的预测效力与智力相当.

ACE 模型源自行为遗传学经典范式：A 为加性遗传，C 为共享环境，E 为非共享环境.Lee et al. (2018) 在 Nature Genetics 上发表了百万级样本的 GWAS，其多基因评分解释受教育年限约 11%–13% 的变异.

Hart & Risley (1995) 在 Meaningful Differences 中跟踪观测了 42 户家庭三年，发现专业人员家庭幼儿在三岁前累计听到约 3000 万词，领取福利金的家庭约 1000 万词，“三千万词鸿沟”由此得名；后续研究对其取样和方法有争议，但方向一致.

Duckworth & Seligman (2005) 在 Psychological Science 上对八年级生的纵向研究中发现，自控力对期末成绩的方差解释量约为 IQ 的两倍有余.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

“科学策略”指的是有实证支撑的学习技术. 合上书本逼自己回忆的主动检索, 以及在快要忘记时复习的间隔重复, 其效果远大于被动重读和划重点.“自我调节”涵盖制定计划、监控进度和在出错时及时纠正方向的能力.

先天和家庭设定了起跑线和跑道状况, 后天的高质量努力决定你能在这条道上跑多远.

所以, 动用你聪明的小脑袋瓜, 评估自身的情况, 决定从何入手, 别去问别人的学习方法. 你首先是你自己的, 如果你自己都不知道自己要做什么, 就不要偷懒问别人了.Like WTF, 如果你是个普通家庭, 你去问一个有钱人出身的竞赛背景的学霸, 问学习方法, 这本身就荒谬.

当然, 还有一个很好的学习习惯, 那就是去爱发电支持作者:), 推出更多的学习资源, 助你一臂之力.

Dunlosky et al. (2013) 在 Psychological Science in the Public Interest 上评定了十种常用学习技术, practice testing 与 distributed practice 获评高效用, rereading 与 highlighting 获评低效用.

知乎@余命数

如何获取无水印版

本书的基础版本， 含水印免费开放， 任何人都可以在我的主页`https://rikka.moe/books`下载. 如果你想获取无水印版, 可以在爱发电上支持本项目:

1. 打开爱发电页面:`https://afdian.com/a/writeamathbook`
2. 选择对应的赞助档位(通常会标注“无水印版”或“完整版”), 完成赞助
3. 赞助后在爱发电的消息里会收到无水印版 PDF 的下载链接; 如果没有收到, 请发邮件或在知乎私信告诉我你的爱发电昵称

无水印版与免费下载版的**内容完全一致**, 差别只在水印. 你不花钱也能读到一模一样的数学内容;付费只是为了去掉水印、支持项目运转.

既然可以免费下到, 为什么要花钱买?

我一直用中世纪或文艺复兴时期王公贵族资助艺术家来比喻这种捐赠的模式, 或者更恰当的, 是 18-19 世纪文人的集资预订, 又或者是数字公共品理论。

许多高中生(包括我)因为高中的时候穷, 没钱, 所以喜欢白漂电子书资料。毕竟在我那时候, 任何没有 DRM(数字版权管理技术)的电子书都能被随意复制粘贴和传播, 盗版网课也有很多。很多时候不是不想支持正版, 而是没钱。与其到处找资源, 不如加成千上万个资料群, 去点那些夸克网盘(天下没有免费的午餐, 夸克网盘对分享资料的人也是有利可图的), 下一堆资料。虽然下了或者存了以后, 可能没有时间看或者基本不看, 但至少满足了收集欲, 以及一种“我在学习”的感觉。

但是, 与其在网盘里存 500G 的名师网课和状元笔记, 或者花重金买各种名师的网课和资料, 不如把钱留给真正对你有用的东西。如果你觉得 “这本书确实对我有用”、写得好, 或者在其他方面给你带来了价值, 不妨去我的爱发电`https://afdian.com/a/writeamathbook`花 10～30 块来支持我, 并获得无水印版。

其实 10 块钱，吃一次拼好饭差不多就花完了。所以我想了一句广告语：用一次拼好饭的钱，来支持下一位创作者。即使实际上你可以白漂（毕竟这是公共品，一个人的占用不会导致另一个人占用的减少），但你的支持，能让互联网上的创作者感到生活更加美好。

更重要的是，你今天怎么对待创作者，就是你希望将来别人怎么对待你。总有一天，你也会在网上创作：可能是一篇文章，一门课。到那时你会明白，被人认可的感觉有多重要，哪怕对方只付了一次拼好饭的钱。

公共品之所以能一直存在，是因为总有一些人，在可以不付钱的时候，仍然愿意为自己认可的东西付一点点。创作者因此能继续创作，受众也因此能继续读到好东西，这才是真正的双赢。而你今天的这一点点，就是在把这个循环往下传。

知乎 知乎@余命数

试用 Akari Web 平台

知乎@余命数

除了纸质书之外，Project Akari 还在做一套在线学习工具，即 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）.

Project Akari 是一项旨在结合人工智能教育、教育数据挖掘、学习分析，并基于认知心理学的研究成果，搭建一款旨在帮助学生高效地学习数学和计算机科学方面知识的智能辅导系统，或称为学习引擎.

余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

因此，我们的目的就是，尽可能量化学生的知识状态，并结合算法，智能评价和判断学生目前的学习状态，辅助其真正习得和掌握一样东西.

我们的哲学是，让用户用效率最高的方式学到知识，为此我们开发了一整套配合的算法，并在课程等设计上尝试最小化认知负担，采取更互动的方式以激发主动性. 量化学习的一切，并且优化，便是一切的出发点和落脚点.

知乎@余命数

这本书写给谁

知乎@余命数

本书的目标读者有三类：

- **在校高中生**：跟着课堂教学同步使用，课上没听懂的章节回来对着书再看一遍推导. 标题带 $*$ 的选读内容可以先跳过，等基础扎实了再回头啃.
- **复读生或自学备考者**：按目录顺序系统过一遍，重点关注每节的例题和章末习题. 如果你的时间紧张，优先读函数、三角、数列和解三角形四章，即高考分值密集的区域.
- **想重温数学的成年人**：你可能忘了大半高中内容但又不想从初中补起. 挑感兴趣的章节直接读就好，遇到前置知识不清楚的地方顺着交叉引用回去翻.

不管你是哪种读者，建议的做法都一样，先看正文搞懂逻辑链，再做例题（盖上解答自己想），最后做章末习题检验. 光看不练等于白看.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

本书的结构

各卷可独立阅读，也可合订通读. 分卷本在文前附有本卷的分册前言与本卷导读；合订本在每卷分隔页之后给出本卷导读，便于按卷回看. 标题中带 * 的章节多为选读或拓展，初读时可略，需要时再补.

关于版本与系列

本书目前仍是书稿，个别地方尚未完整，可能存在笔误或疏漏，若发现错误或有建议，欢迎联系作者. 本版本是 2026 年按学习路径重排的重要更新，调整了五卷章序，把数列章尾的分析内容并入极限与导数，把平面向量提到解三角形之前.

本书属于 Project Akari 系列.Akari 取自日文“あかり”，意为光，寓意是让好的学习材料更容易被找到、更容易被用起来.

Project Akari 的另一部书稿《函数与导数》将函数、极限与导数相关内容单独成书，系统展开. 两本书可以独立阅读，也可以互相参照. 配套的 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）提供笔记、记忆卡片和在线练习，与书稿配合使用.

本系列的基础版本免费开放，完整版本以极低价格提供. 知识不应该是奢侈品，这是我做这件事的底线.

从写作、排版到软件开发，Project Akari 的每一步都是我一个人完成的. 服务器和运营成本靠书的销售收入以及我个人的工作收入来覆盖. 这个项目既是学习方法的实践，也是工程能力的验证.

发现错误怎么办

一个人的精力和眼力终究有限，书里难免有笔误、推导疏漏乃至概念性错误. 如果你发现了，请按以下方式反馈，我能更快地定位和修正：

1. 说明在哪一卷、哪一章、哪一节，或直接给页码和小标题
2. 引用书中的原文或公式编号
3. 写出你认为正确的版本或质疑的理由

最快的渠道是知乎私信 `https://www.zhihu.com/people/yushumi-shu`，其次是邮件 `me@rikka.moe`. 有价值纠错的读者名字会列入后续版本的鸣谢名单.

致谢

这本书能走到今天，离不开很多人的帮助.

首先要感谢每一位读过草稿、提出意见的同学和朋友. 你们在群里随手指出的一道错题、一处不通顺的表达，聚沙成塔地把这本书往前推了一步.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

感谢爱发电上的赞助者们. 你们的每一笔支持都实实在在地变成了服务器费用和我碗里的拼好饭, 让我能在打工之余腾出手来继续写.

感谢家人容忍我把无数个周末和假期耗在了电脑屏幕前. 虽然你们不完全理解我在做什么, 但从没拦过我.

最后感谢你, 正在读这段字的陌生人. 一本书的价值在被翻开的那一刻才算兑现.

版权与授权

本系列的基础版本依据**知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际协议**(CC BY-NC-ND 4.0) 开放给个人学习者免费使用. 完整版本以极低价格提供, 销售收入用于覆盖服务器与运营成本. 商业使用、机构采购或翻译授权请联系作者.

防盗版与使用声明

本书为 Project Akari 系列出版物. 本 PDF 仅供合法获取者个人学习使用, 禁止以下行为:

- 将本 PDF 或其任何部分上传至任何公开网络平台、网盘、论坛或即时通讯群组;
- 对本 PDF 进行二次售卖、捆绑销售或用于任何商业用途(已获作者书面授权者除外);
- 将本书内容用作机器学习或人工智能训练语料;
- 移除、涂改或遮盖本书的水印、版权信息、读者指纹或页脚标识;
- 修改 PDF 元数据后以原书名、作者名重新分发.

如发现盗版或侵权行为, 欢迎通过以下渠道举报:

- 书籍主页:https://rikka.moe/books
- 邮箱:me@rikka.moe

版本指纹(用于溯源与正版核验):

读者标识 DRAFT-REVIEW

文档哈希 DRAFT-REVIEW

编译日期 October 7, 2026

关于修改与再分发的声明

本书由作者独自维护并发布, 是本项目唯一的**权威正版来源**. 任何对本 PDF 或其源文件的内容、水印、版权信息、读者指纹、PDF 元数据的删改、涂改或遮盖, 均视为对本声明与著作权法的违反.

修改后的版本**不得**保留以下任一标识并以任何形式分发, 否则视为侵权:

- 书名《中学数学之旅》及 Project Akari 系列名称;
- 作者署名"余命数"及相关社交账号;
- 版权页、前言中任何声明性文字;
- 页脚隐性指纹与页面水印.

欢迎读者基于本书内容做学习笔记与摘录，但请在分发时注明来源与原作者. 如需做系统性改编，如翻译、缩写、教材化使用，请先联系作者取得书面授权.

正版核验与联系方式见版权页，或访问 https://rikka.moe/books.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

分册前言

写这本分析卷是我整个系列里反复最多的一次. 原本想按极限、导数、积分、微分方程四步走, 写了第一遍发现 ε-N 与级数散落在数列章里, 回来时反而要花更多篇幅补回. 最后改成现在的样子, 极限与导数一气呵成, 离散逼近与连续导数落在同一章.

把数列章里的 ε-N、级数与泰勒整体并入这一卷是后来才下的决心. 理由很简单, 极限这件事不拆开讲更顺.

极限与导数在完备性与极限定义上建立连续性、切线与求导法则, 并纳入原属数列章的 ε-N 语言、级数与泰勒展开. 简单的积分补全导数的逆运算; 微分方程初步给出可分离变量与一阶线性等可操作模型. 数学思想浅谈放在分析训练之后, 提炼自由度、构造式与满足式等跨卷直觉, 其中的方法在解析几何与导数综合题里用得最多, 所以这一章不宜夹在立体几何与积分之间.

本卷承接第三卷的坐标几何, 并为第五卷的复数、空间与矩阵提供分析与方法底座.

完整轨的读者这一卷不能跳过. 基础轨读者若尚未学完第一卷函数与不等式, 可先读极限与导数前两节, 待函数整体性质补齐后再进积分与微分方程.

本书为书稿状态, 内容尚不完善, 可能存在笔误或疏漏. 如有问题或建议, 欢迎联系作者 `https://rikka.moe`, 或发送邮件至 `me@rikka.moe`.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

本卷导读

本卷线索

第四卷的主线是：**用极限语言刻画变化，用积分语言刻画累积，并整理跨章方法.** 全卷由导数与积分构成分析主干，微分方程与思想方法两章在其上延伸.

知乎@余命数

章节地图

▷ **极限与导数**　从实数完备性与极限定义出发，经连续性进入导数，继而展开中值定理、洛必达法则与泰勒展开，并以方程根、不等式证明与极值点偏移等综合专题收束. 本章是全卷主干，后续各章都建立在它的语言之上.

▷ **简单的积分**　紧随导数展开其逆运算：原函数与不定积分、换元与分部积分，最后由定积分与微积分基本定理把变化与累积两面接通.

▷ **微分方程初步**　以导数为工具处理可分离变量与一阶线性方程等可解模型，并反过来用微分方程求解某些函数方程.

▷ **数学思想浅谈**　总结自由度、解题框架、构造式与满足式、不变量与换元等跨章方法，所用例证大多取自前此各卷的分析与几何训练.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

向后展望

第五卷把数系扩展到复数，同时讲空间的立体几何，引入矩阵与行列式处理线性结构，并以连分数、三个著名常数与无穷乘积收束数论与常数专题.

知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

目录

关于作者 i

前言 iii

分册前言 xi

本卷导读·第四卷 xiii

第一章 极限与导数 2

1.1 实数系的完备性 2
1.2 极限的定义 * 4
1.3 数列的极限 * 11
1.4 级数 29
1.5 切线问题 41
1.6 函数的连续性 47
1.7 极限的运算 49
1.8 无穷远处的极限与无穷小量 54
1.9 导数的概念 61
1.10 中值定理的应用与推广 92
1.11 导数的综合应用 96
1.12 高阶导数与泰勒展开初步 112
1.13 泰勒公式与泰勒级数 116
1.14 洛必达法则与极限计算的系统策略 121
1.15 必要性探路与端点分析法 * 127
1.16 极值点偏移问题 142
1.17 牛顿迭代法 146

第二章 简单的积分 154

2.1 原函数与不定积分 154
2.2 不定积分 158
2.3 换元积分法 165
2.4 分部积分法 173
2.5 定积分与微积分基本定理 184
2.6 定积分的性质 194
2.7 定积分的几何与物理应用 205

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

第三章 微分方程初步 **214**
3.1 微分方程、阶与解 . . . 214
3.2 可分离变量的微分方程 . . . 216
3.3 一阶线性微分方程 . . . 219
3.4 应用微分方程求解函数方程 . . . 220
3.5 增长与衰减模型 . . . 224
3.6 落体与极限速度 . . . 227
3.7 悬链线与追逐曲线 *(选读) . . . 230
3.8 章末习题 . . . 233
习题 . . . 233

第四章 数学思想浅谈 **236**
4.1 数学对象与问题三要素 . . . 236
4.2 自由度与变量、约束、独立参数 . . . 238
4.3 自由度如何决定解的个数 . . . 243
4.4 解题框架的四种基本路径 . . . 245
4.5 纯构造式问题的解法 . . . 252
4.6 直接构造困难时的反证法 . . . 254
4.7 含满足式问题的通用策略 . . . 255
4.8 不变量、单调量、极端原理、抽屉原理与对称 . . . 258
4.9 谈谈二级结论 . . . 269
4.10 二级结论的适用边界 . . . 271
4.11 换元法为何行之有效 *(选读) . . . 272
4.12 换元法的典型模式 . . . 276
4.13 本章小结与习题 . . . 280
习题 . . . 282

习题解答 **285**
第 1 章极限与导数 . . . 285
第 3 章微分方程初步 . . . 314

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

第 1 章

极限与导数

基础语言

「几何无王者之路。」

——欧几里得

第一章 极限与导数

微积分学处理变化与运动. 我们考虑一个物体沿直线运动, 设其位置由时间 t 的函数 $s = f(t)$ 给出. 为了刻画物体在某一时刻 t_0 的运动状态, 仅知道位置还不够, 我们还需要知道它的瞬时速度. 在时间段 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内, 物体的平均速度由位移与时间的比值给出.

$$\bar{v} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

在几何上, 若考虑 t-s 平面上的曲线 $s = f(t)$, 该比值对应于连接点 $P(t_0, f(t_0))$ 与点 $Q(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t))$ 的割线斜率.

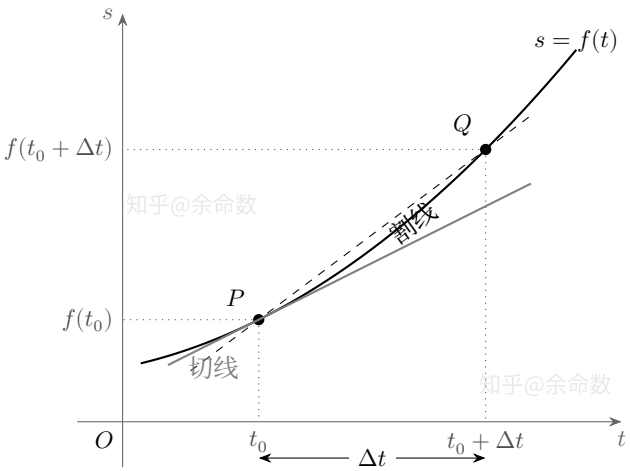


图 1.1 平均速度对应的割线斜率与瞬时速度对应的切线斜率.

物理直觉告诉我们, 当观测的时间间隔 Δt 越来越短时, 平均速度应当逼近某个确定的数值, 即瞬时速度. 几何上, 这对应于点 Q 沿曲线趋近于点 P, 于是割线趋向于曲线在点 P 处的切线. 然而, 若直接令 $\Delta t = 0$, 上述比值变为 $\frac{0}{0}$, 在代数运算中这是未定义的.

为了解决这一矛盾, 我们引入 极限 (limit) 的概念来严格描述无限趋近这一过程. 在定义极限之前, 我们先考察极限运算所依赖的数系. 若数系本身存在空隙, 则极限过程可能指向一个不存在的数, 理论便会失效.

1.1 实数系的完备性

我们希望在数轴上度量所有连续量, 但有理数系 $\mathbb{Q}$ 做不到这一点. 例如边长为 1 的正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$, 它不是有理数. 我们引入完备性公理来弥补这一缺陷, 使实数轴没有空隙, 从而保证极限过程不会指向一个不存在的数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 1.1 (记号)

- $\mathbb{N}$: 自然数集 $\{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Z}$: 整数集 $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$: 有理数集 $\{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
- $\mathbb{R}$: 实数集.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 对加、减、乘、除(除数非零)四则运算封闭, 且其元素在数轴上是稠密的. 但只靠有理数仍不足以度量所有几何量. 我们考虑边长为 1 的正方形, 其对角线长度 l 满足 $l^2 = 2$.

定理 1.1 ($\sqrt{2}$ 的无理性) 不存在有理数 r, 使得 $r^2 = 2$.

证明 我们用反证法. 假设存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $r^2 = 2$. 设 $r = p/q$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}^+$ 且 $\gcd(p, q) = 1$.

由 $(p/q)^2 = 2$ 得 $p^2 = 2q^2$. 故 p^2 为偶数, 从而 p 为偶数. 设 $p = 2k$. 代入得 $(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2$. 故 q^2 为偶数, 从而 q 亦为偶数. 故 p, q 至少有公约数 2, 这与 $\gcd(p, q) = 1$ 矛盾. □

上述定理表明数轴上存在无理数. 若只在 $\mathbb{Q}$ 中讨论, 极限过程可能失效. 例如有理数序列 $1, 1.4, 1.41, \dots$ 无限趋近于 $\sqrt{2}$, 而它的极限不在 $\mathbb{Q}$ 内. 因此我们把数系扩充为实数系 $\mathbb{R}$, 并要求 $\mathbb{R}$ 具有 *完备性*.

为了形式化实数轴没有空隙这一事实, 我们先引入上界与确界.

定义 1.1 (上界) 设 S 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集. 若存在 $M \in \mathbb{R}$, 使得对所有 $x \in S$ 都有 $x \le M$, 则称 M 为 S 的一个 *上界* (upper bound).

对于上有界的集合, 上界通常不唯一. 所有上界中最小的那个叫做上确界.

定义 1.2 (上确界) 设 $S \subseteq \mathbb{R}$ 非空且上有界. 若实数 α 满足以下条件, 则称 α 为 S 的 *上确界* (supremum), 记作 $\sup S$:

1. α 是 S 的上界;
2. 任何小于 α 的数都不是 S 的上界, 即 α 是最小的上界.

上确界 α 不一定属于集合 S. 例如 $S = [0, 1)$, 则 $\sup S = 1 \notin S$.

在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中, 有界集合的上确界可能不存在. 我们考虑 $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$.$A$ 在 $\mathbb{Q}$ 中有上界, 例如 2, 但没有最小的有理上界, 因为 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. 完备性公理保证这种情况在 $\mathbb{R}$ 中不会发生.

知乎@余命数

公理 1.1 (完备性公理) $\mathbb{R}$ 中任何非空且上有界的子集, 必有上确界.

这一公理在几何上刻画了实数轴的连续性 (continuity).

我们把实数轴看成一条直线. 点集 S 不向右无限延伸时, 它应当有一个最右端点. 完备性公理保证这个端点存在.

所有大于 S 中每个元素的数构成 S 的上界集合.

- 在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中, 集合 S 与它的上界集合之间可能存在空隙. 例如 $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ 没有最小的有理上界, 因为 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- 在实数系 $\mathbb{R}$ 中, 完备性公理填补这些空隙. 每个有上界的集合都有上确界作为精确边界; 任何小于它的数都不是上界, 所以它紧临 S.

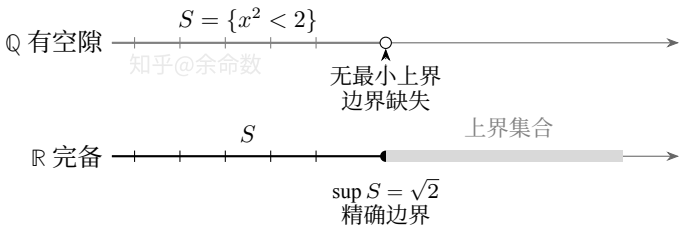


图 1.2 有理数系的空隙与实数系的完备性对比.

1.2 极限的定义 *

我们先给出极限的直观定义.

定义 1.3 当变量 x 无限趋近于定值 x_0 且 $x \neq x_0$ 时, 若函数值 $f(x)$ 无限趋近于定值 L, 则称 L 为函数 $f(x)$ 在 x 趋向于 x_0 时的**极限**.

这种描述同时涉及过程和结果两个方面. 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

其中 $\to$ 表示 x 趋近于 x_0.

- 符号 lim 是英文 limit 的缩写, 表示这里讨论的是极限.
- 记号 $x \to x_0$ 表示自变量 x 从 x_0 的左右两侧无限靠近, 与 x_0 的距离可以任意小, 但 $x \neq x_0$.
- $f(x)$ 是研究对象, 它的值随 x 变化.
- 等号右侧的 L 表示极限值为确定的常数 L.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个定义关心的是 x 在 x_0 附近的变化过程, 并不关心 $f(x_0)$ 是否存在.

例题 1.1　考察函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x\to 1$ 时的极限.

解　当 $x=1$ 时, 分母为 0, $f(1)$ 在该点**没有定义**.

极限由 $x=1$ 附近的函数值决定, 与 $f(1)$ 是否存在无关.

当 $x\neq 1$ 时, 函数可化简, 得

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

化简后 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=x+1$ 在 $x\neq 1$ 时相同, 点 $(1,2)$ 处无定义.

我们观察 x 趋近 1 时 $f(x)$ 的变化.

当 x 从 1 的右侧趋近, 例如 $1.1, 1.01, 1.001, \ldots$ 时,

$$f(x)=x+1 \text{ 的值依次为} 2.1, 2.01, 2.001, \ldots, \text{趋近于} 2.$$

当 x 从 1 的左侧趋近, 例如 $0.9, 0.99, 0.999, \ldots$ 时,

$$f(x)=x+1 \text{ 的值依次为} 1.9, 1.99, 1.999, \ldots, \text{趋近于} 2.$$

虽然 $f(1)$ 不存在, 但 x 从两侧无限趋近 1 时, $f(x)$ 都无限趋近于 2. 因此极限存在且等于 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

这个例子说明极限值是函数在该点附近的变化趋势.

为了分析 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, 我们分别观察 x 从右侧和左侧趋近 1 时函数值的变化. 两侧的函数值都趋近于 2.

于是我们引入左极限和右极限的定义.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

定义 1.4 (右极限与左极限) • 当 x 从大于 x_0 的一侧无限趋近于 x_0 时, 若 $f(x)$ 无限趋近于常数 L, 则称 L 为 $f(x)$ 在 x_0 的右极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

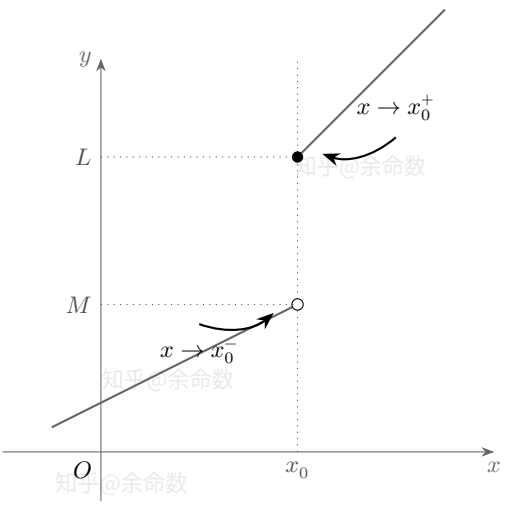
上标 $+$ 表示 x 从右侧趋近 x_0.

- 当 x 从小于 x_0 的一侧无限趋近于 x_0 时, 若 $f(x)$ 无限趋近于常数 M, 则称 M 为 $f(x)$ 在 x_0 的左极限, 记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = M.$$

上标 $-$ 表示 x 从左侧趋近 x_0.

知乎@余命数



函数在某点的极限存在, 当且仅当它的左、右极限都存在且相等.

定理 1.2 (极限存在的充要条件) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在且等于 L, 当且仅当下式成立:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L. \tag{1-1}$$

证明 我们证明必要性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - L| < \varepsilon$. 特别地, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 或 $0 < x_0 - x < \delta$ 时仍满足同一不等式, 因而右极限和左极限都等于 L.

充分性也由定义推出. 若左、右极限都等于 L, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < x_0 - x < \delta_1$ 时有 $|f(x) - L| < \varepsilon$; 也存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < x - x_0 < \delta_2$ 时

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

有 $|f(x)-L|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, x 必在 x_0 左侧或右侧之一, 于是由对应的一侧极限估计都可得到 $|f(x)-L|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$. □

直观地说, 函数在 x_0 处的极限存在, 当且仅当 x 从左右两侧趋近 x_0 时函数值都趋向同一个数.

例题 1.2　考察函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的极限.

解　先写成分段形式.

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

再分别计算左、右极限.

右极限(x 从右侧趋近 0, 此时 $x>0$)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

左极限(x 从左侧趋近 0, 此时 $x<0$)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

左、右极限都存在但不相等, 因此

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\quad \textbf{不存在}.$$

函数图像在 $x=0$ 两侧分别趋向 1 和 -1, 所以极限不存在.

直观定义中的无限趋近含义模糊, 需要严格的数学表述.

为了把靠近精确化, 我们引入邻域概念.

定义 1.5 (邻域)　以点 x_0 为中心、δ 为半径的开区间称为点 x_0 的**邻域**, 记作 $U(x_0,\delta)$.

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

其中 δ (delta) 是任意给定的正数, 称为邻域的**半径**.

邻域包含中心点, 极限过程需要排除中心点, 由此引入去心邻域.

注 1.2
以下用邻域与 $\varepsilon-\delta$ 语言给出极限的严格表述.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 1.6 (去心邻域) 点 x_0 的邻域去掉中心点 x_0 之后, 剩下的部分称为点 x_0 的**去心邻域**或**空心邻域**.

$$U^{\circ}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

去心邻域精确表达 x 趋近于 x_0 但 $x\neq x_0$.

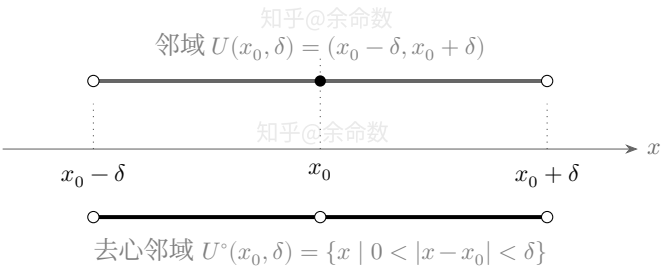


图 1.3 邻域与去心邻域的示意图

借助邻域可将定义改写成更便于使用的形式.

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个**去心邻域**内有定义. 若当 x 在该去心邻域内无限趋近于 x_0 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 L, 则称 L 为 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的**极限**, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L. \tag{1-2}$$

这个定义强调函数只需在 x_0 的去心邻域内有定义, x_0 本身可以没有定义.

邻域仍未消除无限趋近的动态性. 柯西和魏尔斯特拉斯用 $\varepsilon-\delta$ 语言给出了静态定义.

定义 1.8 (函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义. 若**对于任意给定的正数** ε(无论它有多小), **总存在**一个**正数** δ, 使得当自变量 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 那么我们就称常数 L 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 用逻辑符号可表示如下.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$
$$\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{s.t.}\ \forall x,\ (0<|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-L|<\varepsilon).$$

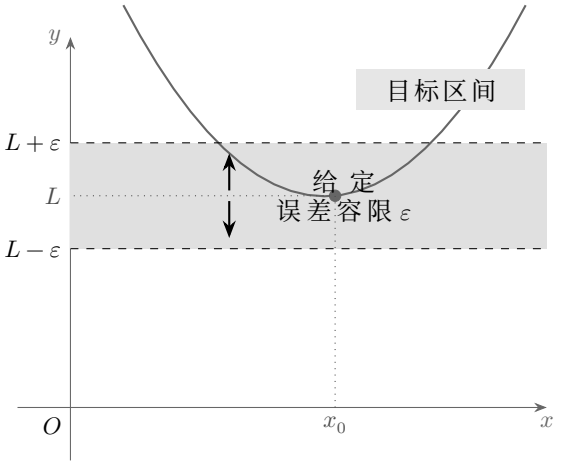
这个定义把动态趋近转化为静态逻辑关系.[1] 下面三幅图把这个定义逐步展开.[2]

[1] 参见《普林斯顿微积分读本》一书附录关于极限定义的说明.

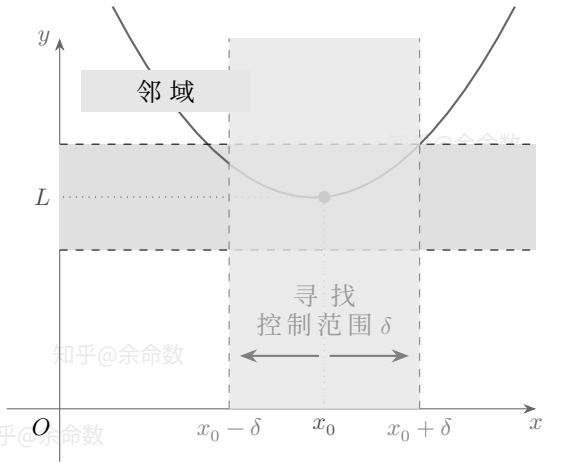
[2] 此图解思路引用自阿德里安·班纳 (Adrian Banner) 所著《普林斯顿微积分读本》一书的附录极限及其证明.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

给定任意正数 ε, 我们就在 y 轴上以 L 为中心确定区间 $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, 要求 $f(x)$ 的值落在该区间内.



接着寻找正数 δ, 使得去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$ 内的每个 x 都满足 $|f(x)-L|<\varepsilon$.



最后在去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$ 内任取 x, 验证 $|f(x)-L|<\varepsilon$. 几何上, 函数图像在垂直带 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 内的部分落在水平带 $L-\varepsilon<y<L+\varepsilon$ 中.

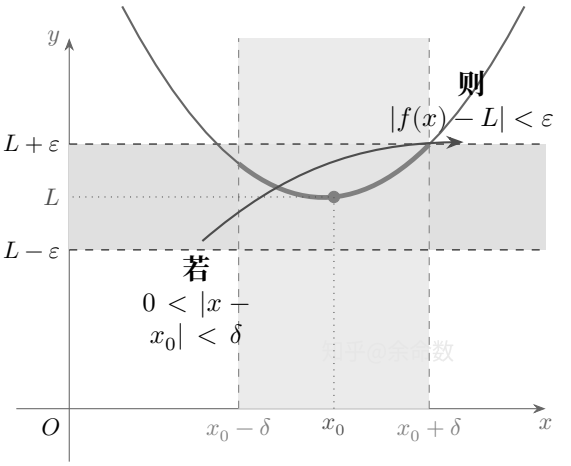
极限存在的含义可以用一个静态条件来描述. 给定任意正数 ε, 我们总能找到正数 δ, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 就有 $|f(x)-L|<\varepsilon$.

依赖关系 $\delta(\varepsilon)$ 是极限定义的灵魂.ε 越小, 所要求的精度越高, 对应的 δ 通常也越小, 但它总存在.

若 $f(x)$ 并不真正趋近于 L, 则当 ε 足够小时, 不存在这样的 δ, 极限便不存在.

例题 1.3 使用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明极限 $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



解 我们用 $\varepsilon-\delta$ 定义直接验证. 对任意 $\varepsilon>0$ 需找到 $\delta>0$, 使当 $0<|x-1|<\delta$ 时恒有 $|x^2-1|<\varepsilon$. 为此, 我们把 $|x^2-1|$ 用 $|x-1|$ 与 $|x+1|$ 表出, 并对因子 $|x+1|$ 给出一个与 x 无关的上界, 从而确定 δ.

将目标式因式分解得 $|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|$, 其中 $|x-1|$ 可由 δ 直接控制, 而 $|x+1|$ 随 x 变动. 因极限只关心 $x_0=1$ **附近**的行为, 我们预先限定 $\delta\leq 1$ 便可框住 $|x+1|$. 此时 $|x-1|<1$ 蕴含 $-1<x-1<1$, 两边加 2 得 $1<x+1<3$, 故 $|x+1|<3$. 代回变形即有

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<\delta\cdot 3,$$

要其小于 ε, 只需 $3\delta\leq\varepsilon$, 即 $\delta\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$. 合并两个约束, 取

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

则 $\delta>0$.

对任意给定的 $\varepsilon>0$ 取上述 δ. 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 由 $\delta\leq 1$ 知 $|x-1|<1$, 从而 $1<x+1<3$ 即 $|x+1|<3$; 同时由 $\delta\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$ 知 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 两估计结合得

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot 3=\varepsilon,$$

即 $|x^2-1|<\varepsilon$ 成立. 由 $\varepsilon-\delta$ 定义, $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$.

1.2.1 本节习题

1.1. 考察函数 $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数. 研究函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限是否存在.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.2. 运用极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义, 证明 $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=ac+b$, 其中 a,b,c 均为实常数且 $a\neq 0$.

1.3. 运用极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义, 证明 $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$, 其中 c 为任意正实数.

1.4. 研究函数 $g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x\to 0$ 时的极限.

1.5. 考虑极限 $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$. 对于给定的 $\varepsilon=0.1$, 请求出一个具体的正数 δ, 使得当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 恒有 $|x^3-8|<0.1$.

1.6. 证明极限的唯一性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L_1$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L_2$, 则 $L_1=L_2$.

1.7. 运用极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

1.8. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$. 若 $L>0$, 证明存在一个正数 δ, 使得对于所有满足 $0<|x-c|<\delta$ 的 x, 都有 $f(x)>0$.

1.3 数列的极限 *

数列的每一项都对应数轴上的一个点. 当项数无限增大时, 这些点要么无限远离原点, 要么始终落在某个有界范围内. 后者中一部分无限靠近某个固定点, 另一部分在有限范围内持续摆动. 极限理论研究的是无限靠近某个固定点的情形.

芝诺悖论阿喀琉斯追不上乌龟反映了早期人类对无穷过程的困惑. 要精确描述并解决这个悖论, 需要一种能够量化无限逼近的数学工具.

再看一个具体例子. 几何级数 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ 可化为 $S_n=1-\frac{1}{2^n}$. 当 n 增大时, $1/2^n$ 趋近于 0, 整个和 S_n 趋近于 1.

极限理论用严格的逻辑语言把这种直观的无限逼近固定下来. 它连接离散数列与连续函数、有限运算与无限过程, 是微积分和现代数学分析的基础.

1.3.1 逼近的尝试与定义的演进

把无限逼近严格化, 需要剔除一些看似合理却不严谨的说法. 现给出三个逐渐精确的定义尝试.

1.3.1.0.1　越来越近　一种直观想法是, 若数列 $\{a_n\}$ 趋向于 L, 则它到 L 的距离应越来越小. **一个粗糙的定义 (版本 1):** 数列 $\{a_n\}$ 的极限是 L, 如果对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 不等式 $|a_{n+1}-L|<|a_n-L|$ 恒成立. 这个定义要求距离严格单调递减. 它适用于 $a_n=1/n$ 这类极限为 0 的简单数列, 但限制太强, 会排除许多应被视为收敛的数列.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

考虑数列 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. 其项为 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, 明显趋近于 0. 距离序列 $|a_n - 0| = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ 满足版本 1 的定义. 但再看数列 $b_n = \begin{cases} 1/n & \text{若}n\text{为奇数} \\ 1/(2n) & \text{若}n\text{为偶数} \end{cases}$. 其项为 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \ldots$, 同样趋近于 0. 然而 $|b_3 - 0| = \frac{1}{3} > |b_2 - 0| = \frac{1}{4}$, 违反了版本 1 的要求, 于是版本 1 把这个数列错误地排除在外.

1.3.1.0.2 最终进入任何区间 版本 1 失败的原因在于对如何逼近限制过强. 于是我们放宽条件. 不再要求每一步都更近, 只要求最终进入任意一个包含 L 的区间.

一个粗糙的定义(版本 2): 数列 $\{a_n\}$ 的极限是 L, 如果对任意包含 L 的开区间 (a, b), 数列 $\{a_n\}$ 中只有限项在该区间之外. 这个定义已抓住极限的最终行为特征. 例如对前述反例 b_n, 无论包含 0 的区间多么小, 最终所有 b_n 都会落入其中.

但版本 2 仍不够精确, 也缺乏可操作性. 任意开区间的说法过于模糊, 无法直接代入不等式推导. 同时, 该定义没有突出 L 的中心地位. 区间 $(L - 0.1, L + 100)$ 与 $(L - 0.1, L + 0.1)$ 在其中没有区别.

1.3.1.0.3 $\epsilon - N$ 语言 为克服版本 2 的模糊性, 我们引入两个量化工具.

1. 用一个正数 ϵ 表示区间的任意小. 只考虑以 L 为中心的对称区间 $(L-\epsilon, L+\epsilon)$. 任何包含 L 的开区间都包含某个这样的对称区间, 因此进入所有对称区间等价于进入所有普通区间.ϵ 成为衡量误差的标尺.
2. 用一个正整数 N 表示最终. 只有限项在区间外等价于“从第 $N+1$ 项起, 所有项都在区间内”.N 区分初始项与最终规律.

把两者结合. 对任意给定的精度 ϵ, 我们总能找到足够大的项数分界点 N, 使得后续所有项都满足该精度.

1.3.2 极限的严格定义

定义 1.9 (数列极限的 $\epsilon - N$ 定义) 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, L 是一个实数. 如果对任意给定的正数 ϵ, 总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

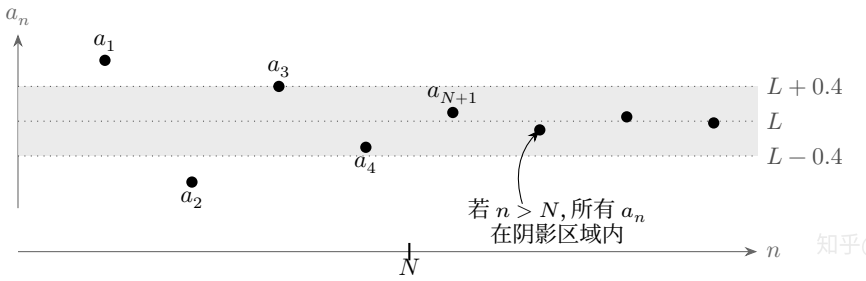
$$|a_n - L| < \epsilon$$

恒成立, 则称数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 L, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{或} \quad a_n \to L\ (n \to \infty)$$

如果一个数列不收敛于任何实数, 就称该数列**发散**.

知乎@余命数



这个定义完整量化了无限逼近的含义.

例题 1.4　证明: 一个常数数列 $a_n = c$ 收敛于 c.

解　解析: 需要证明 $\lim_{n\to\infty} c = c$. 根据定义, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 需要找到正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - c| < \epsilon$ 成立.

对该数列, $|a_n - c| = |c - c| = 0$. 因此不等式变为 $0 < \epsilon$. 由于 ϵ 为正数, $0 < \epsilon$ 恒成立, 与 n 无关.

于是可取任意正整数作为 N, 例如 $N = 1$. 当 $n > 1$ 时, $|a_n - c| = 0 < \epsilon$ 恒成立. 故 $\lim_{n\to\infty} c = c$.

例题 1.5　证明: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

解　解析: 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 需要找到正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$ 成立.

该不等式化简为 $\dfrac{1}{n} < \epsilon$. 解得 $n > \dfrac{1}{\epsilon}$.

根据实数的阿基米德性质, 对任意正数 $1/\epsilon$, 总存在正整数比它大. 因此可取 $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$, 先对 $1/\epsilon$ 向下取整, 再加 1, 这样 N 必为正整数.

这样, 当 $n > N$ 时, $n \geq N + 1 = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1 > \frac{1}{\epsilon}$. 这就保证了 $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ 成立. 证毕.

例题 1.6　证明: 若 $|q| < 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

解　解析: 若 $q = 0$, 则数列为 $0, 0, \ldots$, 收敛于 0.

考虑 $0 < |q| < 1$ 的情况. 由于 $1/|q| > 1$, 令 $\dfrac{1}{|q|} = 1 + h$, 其中 $h > 0$. 于是 $|q| = \dfrac{1}{1+h}$.

目标是证明对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n > N$ 时, $|q^n - 0| = |q|^n < \epsilon$. 即 $\left(\dfrac{1}{1+h}\right)^n < \epsilon$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据伯努利不等式, $(1+h)^n \geq 1+nh$. 因此,

$$|q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh}$$

要使 $|q|^n < \epsilon$, 只需保证 $\dfrac{1}{1+nh} < \epsilon$. 解此不等式:

$$1 < \epsilon(1+nh) \iff \frac{1}{\epsilon} < 1+nh \iff nh > \frac{1}{\epsilon} - 1 \iff n > \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$$

对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总可取正整数 N 大于 $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\epsilon} - 1\right)$. 当 $n > N$ 时, $|q^n| < \epsilon$ 成立. 证毕.

例题 1.7 证明: 数列 $a_n = (-1)^n$ 是发散的.

解 解析: 使用反证法. 假设该数列收敛, 极限为 L.

根据极限定义, 对任意 $\epsilon > 0$, 都存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - L| < \epsilon$.

取 $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. 由于数列的项在 1 与 -1 之间跳动, 两者距离为 2, 这个取值足够小.

若极限存在, 则对 $\epsilon = 1/2$, 必存在 N, 使得所有 $n > N$ 的项都满足 $|a_n - L| < 1/2$.

即对某个充分大的偶数 $n_{even} > N$,

$$|a_{n_{even}} - L| = |1 - L| < \frac{1}{2}$$

同时, 对某个充分大的奇数 $n_{odd} > N$,

$$|a_{n_{odd}} - L| = |-1 - L| < \frac{1}{2}$$

考察 1 与 -1 之间的距离, 并用三角不等式:

$$\begin{aligned} 2 &= |1 - (-1)| \\ &= |(1 - L) + (L - (-1))| \\ &\leq |1 - L| + |L - (-1)| \\ &= |1 - L| + |-1 - L| \end{aligned}$$

由上面两个不等式,

$$|1 - L| + |-1 - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

结合得到 $2<1$, 矛盾. 这说明最初的假设(数列收敛于某个极限 L)不成立. 因此, 数列 $a_n=(-1)^n$ 发散.

例题 1.8　使用 $\epsilon-N$ 定义证明 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$.

证明　**证明:** 对任意给定的 $\epsilon>0$, 目标是寻找正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{n+1}-2\right|<\epsilon$ 恒成立.

先化简不等式左侧:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2n-1-2(n+1)}{n+1}\right|=\left|\frac{-3}{n+1}\right|=\frac{3}{n+1}$$

此处利用 n 为正整数, 故 $n+1>0$.

接着确定需要多大的 n 才能保证 $\dfrac{3}{n+1}<\epsilon$. 解此不等式,

$$\frac{3}{n+1}<\epsilon \iff 3<\epsilon(n+1) \iff n+1>\frac{3}{\epsilon} \iff n>\frac{3}{\epsilon}-1$$

因此, 只要 n 大于 $\frac{3}{\epsilon}-1$, 期望的不等式便成立.

于是, 对任意给定的 $\epsilon>0$, 可取正整数 $N=\max\left(1,\lfloor\frac{3}{\epsilon}\rfloor\right)$. 当 $n>N$ 时, 必有 $n>\frac{3}{\epsilon}$, 从而 $n>\frac{3}{\epsilon}-1$ 也成立.

这便完成了证明. 根据定义, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$. □

1.3.3 极限的运算法则

若每次计算极限都直接套用 $\epsilon-N$ 定义, 过程会极其繁琐. 极限运算与代数运算具有良好的相容性, 可以把复杂数列的极限问题分解为若干基本部分. 现逐一证明这些法则.

定理 1.3 (极限的运算法则) 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ 且 $\lim_{n\to\infty}b_n=B$, 那么:

- **和差法则:** $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$.
- **乘法法则:** $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$.
- **常数倍数法则:** $\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot A$, 其中 c 为常数.
- **除法法则:** 如果 $B\neq0$, 那么 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

证明 (和差法则) 仅证明和法则,差法则的证明与之类似. 目标是证明对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \epsilon$. 从目标表达式出发, 用三角不等式 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 放缩:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

要使右侧之和小于 ϵ, 可让两部分都小于 $\epsilon/2$.

因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 所以对正数 $\epsilon/2$, 存在正整数 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

同理, 因为 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, 存在正整数 N_2, 使得当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

为使两个不等式同时成立, 取 $N = \max(N_1, N_2)$. 当 $n > N$ 时,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

1.3.3.1 证明乘法法则所需引理

在证明乘法法则之前, 先建立一个引理.

引理 1.1 一个收敛的数列必然是有界的.

证明 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. 根据定义, 对 $\epsilon = 1$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - A| < 1$. 即对 $n > N$, 有 $A - 1 < a_n < A + 1$. 因此从第 $N + 1$ 项起的所有项都落在区间 $(A-1, A+1)$ 内. 令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$. 则对所有 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $|a_n| \leq M$. 故 $\{a_n\}$ 有界. □

证明 (乘法法则) 目标是估计 $|a_n b_n - AB|$ 的大小. 技巧是引入中间项 $a_n B$, 再应用三角不等式:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n(b_n - B)| + |B(a_n - A)| \\ &= |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A| \end{aligned}$$

由于数列 $\{a_n\}$ 收敛,根据引理,它有界. 即存在常数 $M>0$ 使得对所有 n,$|a_n|\le M$. 因此,

$$|a_nb_n-AB|\le M|b_n-B|+|B||a_n-A|$$

目标是使右端小于给定的 ϵ. 可让两部分都小于 $\epsilon/2$. (为避免分母为零, 在分母中使用 $|B|+1$ 代替 $|B|$,这是常用技巧.)因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$,所以对正数 $\dfrac{\epsilon}{2(|B|+1)}$, 存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时,

$$|a_n-A|<\frac{\epsilon}{2(|B|+1)}$$

因为 $\lim_{n\to\infty}b_n=B$, 所以对正数 $\dfrac{\epsilon}{2M}$, 存在 N_2, 当 $n>N_2$ 时,

$$|b_n-B|<\frac{\epsilon}{2M}$$

取 $N=\max(N_1,N_2)$. 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_nb_n-AB|&\le M|b_n-B|+|B||a_n-A|\\&<M\cdot\frac{\epsilon}{2M}+|B|\cdot\frac{\epsilon}{2(|B|+1)}\\&=\frac{\epsilon}{2}+\frac{|B|}{|B|+1}\cdot\frac{\epsilon}{2}\\&\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

□

证明 (常数倍数法则) 若 $c=0$, 则 $ca_n=0$ 对所有 n 成立, 结论显然成立. 若 $c\neq0$, 对任意 $\epsilon>0$, 由 $a_n\to A$ 可知存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$|a_n-A|<\frac{\epsilon}{|c|}.$$

于是

$$|ca_n-cA|=|c|\,|a_n-A|<\epsilon.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}ca_n=cA$. □

证明 (除法法则) 根据乘法法则, 只需证明 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{B}$. 目标是估计 $\left|\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{B}\right|=\left|\dfrac{B-b_n}{b_nB}\right|=\dfrac{|b_n-B|}{|b_n||B|}$. 难点在于分母中的 $|b_n|$ 是变量, 需要为它找到一个正的下界.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因为 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ 且 $B \neq 0$, 所以 $|B| > 0$. 取 $\epsilon_1 = \dfrac{|B|}{2} > 0$. 根据极限定义, 存在正整数 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时,

$$|b_n - B| < \frac{|B|}{2}$$

利用反向三角不等式 $|x| - |y| \leq |x - y|$, 得到

$$|B| - |b_n| \leq |B - b_n| < \frac{|B|}{2}$$

移项得 $|b_n| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$. 这就给出了所需下界. 从第 N_1 项起, $|b_n|$ 远离 0.

对 $n > N_1$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} < \frac{|b_n - B|}{(\frac{|B|}{2})|B|} = \frac{2|b_n - B|}{|B|^2}$$

现在, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 希望上式右端小于 ϵ. 即 $|b_n - B| < \dfrac{\epsilon|B|^2}{2}$. 因为 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, 所以对正数 $\dfrac{\epsilon|B|^2}{2}$, 存在正整数 N_2, 使得当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon|B|^2}{2}$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$. 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \frac{2}{|B|^2} \cdot |b_n - B| < \frac{2}{|B|^2} \cdot \frac{\epsilon|B|^2}{2} = \epsilon$$

这证明了 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$. 结合乘法法则,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

□

1.3.3.2 幂法则的说明

对任意正整数 k, 可通过对乘法法则进行数学归纳证明 $\lim_{n\to\infty} a_n^k = A^k$. 当 $k = 1$ 时, 结论显然成立. 假设当 $k = m$ 时结论成立, 即 $\lim_{n\to\infty} a_n^m = A^m$. 那么对 $k = m + 1$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{m+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n^m \cdot a_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n^m\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = A^m \cdot A = A^{m+1}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故对所有正整数 k, 该法则成立. 对负整数 k, 可由除法法则导出. 对一般实数指数 k, 严格证明需要借助指数函数与对数函数的连续性, 此处只陈述结论.

例题 1.9 (有理函数极限) 设 $P(n)=a_pn^p+\cdots+a_0$ 和 $Q(n)=b_qn^q+\cdots+b_0$ 是两个关于 n 的多项式, 其中 $a_p\neq0, b_q\neq0$. 分析极限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}$.

解 将分子分母同除以分母的最高次幂 n^q.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^{p-q}+a_{p-1}n^{p-q-1}+\cdots+a_0n^{-q}}{b_q+b_{q-1}n^{-1}+\cdots+b_0n^{-q}}$$

知乎@余命数

分母的极限为 $\lim_{n\to\infty}(b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+...)=b_q\neq0$. 因此整个极限的行为由分子的行为决定.

分三种情况讨论:

- **当 $p<q$ 时:** $p-q<0$. 分子中 n 的所有幂次均为负. 当 $n\to\infty$ 时, 分子每一项都趋于 0. 故分子的极限为 0. 因此, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}=\dfrac{0}{b_q}=0$.
- **当 $p=q$ 时:** $p-q=0$. 分子变为 $a_p+\dfrac{a_{p-1}}{n}+....$ 其极限为 a_p. 因此, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}=\dfrac{a_p}{b_p}$.
- **当 $p>q$ 时:** $p-q>0$. 分子的首项 a_pn^{p-q} 趋于 ∞ 或 $-\infty$ (取决于 a_p 的符号). 其余项的增长速度都低于首项. 故整个分子无界. 因此, 数列发散, 极限不存在.

由此可知, 两个多项式之比的极限仅取决于它们的最高次幂. 若分母次数更高, 极限为 0; 若次数相同, 极限为最高次项系数之比; 若分子次数更高, 数列发散.

例题 1.10 (根式有理化) 计算极限 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$, 其中 a 为常数.

解 解析: 当 n 足够大时, $n^2+an=n(n+a)>0$, 根式有意义. 这是 $\infty-\infty$ 型的不定式, 不能直接计算. 处理这类根式差的标准做法是乘以共轭表达式, 把减法转化为加法.

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+an}-n&=(\sqrt{n^2+an}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{\sqrt{n^2+an}+n}\\&=\frac{(n^2+an)-n^2}{\sqrt{n^2+an}+n}\\&=\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}\end{aligned}$$

变换后原不定式化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 可用提取主项的方法处理. 分母中 n 的最高次幂等价于 n^1. 将分子分母同除以 n.

$$\frac{an/n}{(\sqrt{n^2+an}+n)/n}=\frac{a}{\frac{\sqrt{n^2+an}}{n}+1}=\frac{a}{\sqrt{\frac{n^2+an}{n^2}}+1}=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}$$

对变换后的表达式取极限.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{a}{2}$$

结果 $\frac{a}{2}$ 是微积分中常用的经典结论.

例题 1.11 (阶乘与指数的增长率比较) 我们证明, 对任意实数 a, 下列极限成立.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

解 解析: 这个极限说明阶乘增长的速度远快于指数增长. 若 $a=0$, 结论显然成立. 若 $a\neq 0$, 考虑其绝对值. 令 $x_n=\frac{|a|^n}{n!}$.

考察相邻项的比值:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{|a|^{n+1}/(n+1)!}{|a|^n/n!}=\frac{|a|}{n+1}$$

当 n 足够大时, 该比值会变得任意小. 取正整数 $N>2|a|$. 那么对所有 $n\geq N$,

$$\frac{|a|}{n+1}<\frac{|a|}{N}<\frac{1}{2}$$

即从第 N 项起, 数列每一项至多是前一项的一半.

对 $n>N$,

$$x_n=x_N\cdot\frac{|a|}{N+1}\cdot\frac{|a|}{N+2}\cdots\frac{|a|}{n}<x_N\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

令 $C=x_N\cdot(1/2)^{-N}=x_N\cdot 2^N$, 这是与 n 无关的常数. 于是当 $n>N$ 时,

$$0\leq x_n<C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

由于 $\lim_{n\to\infty}C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, 根据夹逼准则(有限项不影响极限), $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

因为 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a^n}{n!}|=0$, 原数列的极限也必然为 0.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.3.4 不定型极限的计算策略

直接应用极限运算法则时，常会遇到没有直接定义的表达式，例如 $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 等. 这些形式称为**不定型极限**. 具体结果取决于数列结构，需要进一步变形分析.

1.3.4.1 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

这种不定型最常见，尤其出现在有理函数或含根式的分式中.

处理办法是**提取主导项**. 在分子和分母中找出 $n\to\infty$ 时增长最快的项（主项），然后将分子分母同除以分母的主项，把原式化为分母极限非零、分子极限易求的形式.

例题 1.12 (有理函数) 计算 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+5}{2n^2+4n-1}$.

解 解析：分子分母的主项均为 n^2. 同除以 n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{3-0+0}{2+0-0}=\frac{3}{2}$$

例题 1.13 (根式分式) 计算 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+n}+n}{3n-\sqrt{n^2+1}}$.

解 解析：分子中，$\sqrt{4n^2+n}$ 的增长速度与 $\sqrt{4n^2}=2n$ 相当. 因此分子主项等价于 $2n+n=3n$. 分母中，$\sqrt{n^2+1}$ 的增长速度与 $\sqrt{n^2}=n$ 相当. 因此分母主项等价于 $3n-n=2n$. 整个分式的主项等价于 n. 将分子分母同除以 n.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}+\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n}-\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}}+1}{3-\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+1}{3-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\&=\frac{\sqrt{4+0}+1}{3-\sqrt{1+0}}=\frac{2+1}{3-1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

1.3.4.2 $\infty-\infty$ 型

这种不定型出现在两个都趋于无穷的项相减时，结果取决于两者增长速度的差异.

处理思路是用代数变换把减法不定型转化为除法不定型.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **对于分式之差:**进行**通分**, 合并成一个分式, 再化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 型.
- **对于根式之差:**用共轭表达式进行分子或分母有理化, 把减法变为加法, 再化成分式.

例题 1.14 (根式有理化) 计算 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn})$.

解 解析:当 n 足够大时, 两个根式均有意义. 这是 $\infty-\infty$ 型不定式. 乘以其共轭表达式.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn})\cdot\frac{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn}}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an)-(n^2+bn)}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+bn}}\end{aligned}$$

问题转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 同除以主项 n.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}}=\frac{a-b}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{a-b}{2}$$

1.3.4.3 1^∞ 型

形如 $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{v_n}$, 其中 $\lim u_n=1$ 且 $\lim v_n=\infty$.

处理办法是把表达式恒等变形为重要极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 的标准形式. 令 $u_n=1+\alpha_n$, 其中 $\lim\alpha_n=0$:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{\alpha_n v_n}$$

方括号内的部分趋向于 e, 因此整个极限的结果取决于指数部分 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n v_n)$. 若 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n v_n=L$, 则原极限为 e^L.

例题 1.15 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n+1}$.

解 解析:当 $n\to\infty$ 时, 底数 $\frac{n+2}{n-1}\to1$, 指数 $2n+1\to\infty$. 这是 1^∞ 型. 把底数改写为 $(1+\alpha_n)$ 的形式:

$$\frac{n+2}{n-1}=\frac{(n-1)+3}{n-1}=1+\frac{3}{n-1}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

其中 $\alpha_n = \dfrac{3}{n-1}$.

原极限变为 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{2n+1}$. 进行指数配凑:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right]^{\frac{3}{n-1}\cdot(2n+1)}$$

知乎@余命数

令 $m=\frac{n-1}{3}$. 当 $n\to\infty$ 时, $m\to\infty$. 方括号内的部分 $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$.

知乎@余命数

只需计算指数部分的极限, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+1)}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{n-1} = 6$$

因此, 原极限等于 e^6.

1.3.5 极限判敛准则

知乎@余命数

在很多情况下, 极限的值无法直接算出, 甚至不确定是否存在. 现两个准则是判断收敛性并求解极限的基本工具.

知乎@余命数

定理 1.4 (夹逼准则) 设有三个数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$. 如果从某一项 $(n>N_0)$ 开始, 恒有

$$a_n \le b_n \le c_n$$

并且 $\{a_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 都收敛于同一极限 L, 那么位于它们之间的数列 $\{b_n\}$ 也收敛于 L.

证明 我们要证明,对任意给定的 $\epsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$|b_n-L|<\epsilon$ 恒成立. 这个不等式等价于 $L-\epsilon<b_n<L+\epsilon$.

因为 $\lim_{n\to\infty}a_n = L$, 根据极限定义, 对上述 $\epsilon>0$, 存在正整数 N_1, 使得当 $n>N_1$ 时, 恒有

$$|a_n - L| < \epsilon$$

这等价于 $L-\epsilon<a_n<L+\epsilon$. 证明中需要左半部分:

$$L-\epsilon < a_n$$

同理, 因为 $\lim_{n\to\infty}c_n = L$, 存在正整数 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 恒有

$$|c_n - L| < \epsilon$$

知乎@余命数

知乎@余命数

这等价于 $L-\epsilon<c_n<L+\epsilon$. 证明中需要右半部分:

$$c_n<L+\epsilon$$

根据题设, 还存在正整数 N_0, 使得当 $n>N_0$ 时, $a_n\le b_n\le c_n$ 成立.

为使所有不等式同时成立, 取 $N=\max(N_0,N_1,N_2)$.

当 $n>N$ 时,

$$L-\epsilon<a_n\quad(\text{因为}n>N\ge N_1)$$

$$a_n\le b_n\quad(\text{因为}n>N\ge N_0)$$

$$b_n\le c_n\quad(\text{因为}n>N\ge N_0)$$

$$c_n<L+\epsilon\quad(\text{因为}n>N\ge N_2)$$

串联得到

$$L-\epsilon<a_n\le b_n\le c_n<L+\epsilon$$

因此

$$L-\epsilon<b_n<L+\epsilon$$

即 $|b_n-L|<\epsilon$.

证明完成. 根据极限定义, $\lim_{n\to\infty}b_n=L$. □

夹逼准则的含义是, 若一个数列被两个收敛于同一极限的数列从上下两侧夹住, 则它也必须收敛于该极限. 它的作用在于用两个易处理的数列控制一个复杂的数列, 从而确定后者的极限.

例题 1.16 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

解 解析: 该和式的项数随 n 变化, 不能直接用运算法则. 这是应用夹逼准则的典型情形. 令 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. 通过对和式中的每一项进行统一放缩, 构造 S_n 的上下界.

在和式各项中, 分母最小的是 $\sqrt{n^2+1}$, 故 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 是最大项. 分母最大的是 $\sqrt{n^2+n}$, 故 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 是最小项.

对上界, 把每一项都放大为最大项:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

对下界, 把每一项都缩小为最小项:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

于是得到

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

接着计算两边数列的极限.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1$$

由于上下界的极限均为 1, 根据夹逼准则, 原极限值为 1.

定理 1.5 (单调收敛定理) 一个单调且有界的数列必然收敛.

- 非减且有上界的数列收敛.
- 非增且有下界的数列收敛.

证明 这个定理体现了实数系的完备性, 也说明极限与序结构之间的紧密联系. 先证第一种情况, 第二种情况的证明与之对偶.

设 $\{a_n\}$ 是非减且有上界的数列. 非减意味着对所有 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_{n+1} \geq a_n$. 有上界意味着存在实数 M, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_n \leq M$.

考虑由所有项构成的集合 $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. 集合 S 非空, 且有上界 M.

根据实数系的**完备性公理**(或称最小上界公理), 任何非空且有上界的实数集都有最小上界, 即**上确界**. 令 $L = \sup S$. 现证 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

要证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, 需依据 $\epsilon - N$ 定义. 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 需要找到正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - L| < \epsilon$ 成立.

由上确界定义, L 是集合 S 的上界, 因此对所有 n, 都有 $a_n \leq L$. 由于 $\epsilon > 0$, $L < L + \epsilon$, 故 $a_n < L + \epsilon$ 自动成立.

再证明 $a_n > L - \epsilon$. 由于 $\epsilon > 0$, 有 $L - \epsilon < L$. 根据上确界的最小性, 任何严格小于 L 的数都不是集合 S 的上界. 因此 $L - \epsilon$ 不是 S 的上界, 集合 S 中必存在某个元素大于 $L - \epsilon$. 即存在正整数 N, 使得 $a_N > L - \epsilon$.

由于 $\{a_n\}$ 非减, 对任何 $n > N$, 都有 $a_n \geq a_N$.

于是对任何 $n > N$:

$$L - \epsilon < a_N \leq a_n$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

结合 $a_n \le L < L+\epsilon$, 得到对所有 $n > N$:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

这等价于 $|a_n - L| < \epsilon$.

因此, 对任意 $\epsilon > 0$, 都能找到对应的 N. 根据极限定义, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 L.

对非增且有下界的数列, 证明完全类似, 只需考虑集合的**下确界**, 并证明数列收敛于下确界. 证毕. □

单调收敛定理是**实数系 $\mathbb{R}$ 的标志性特征**, 其证明完全依赖实数系的完备性公理. 若把范围限制在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中, 该定理不再成立.

考虑有理数列 $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414, ...$$

这是 $\sqrt{2}$ 的十进制逐次逼近. 该数列满足:

- **单调递增**: $a_{n+1} > a_n$.
- **有上界**: 例如所有项都小于 2.

在有理数系中它满足定理的全部条件, 却不收敛, 因为它的极限 $\sqrt{2}$ 不属于 $\mathbb{Q}$. 有理数轴上存在这样的空洞, 单调有界数列可能通向一个不存在的点.

这个反例说明实数系的完备性填补了有理数轴上的这些空洞. 正因如此, 单调有界数列的极限总能在实数系中找到, 这个极限就是它的上确界或下确界.

例题 1.17 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. 证明该数列收敛, 并求其极限.

解 解析: 该数列由递推关系定义, 通项不易求出. 现用单调收敛定理分析其有界性与单调性.

先用数学归纳法证明数列有上界 2. 当 $n = 1$ 时, $a_1 = \sqrt{2} < 2$, 结论成立. 假设当 $n = k\,(k \ge 1)$ 时, $a_k < 2$ 成立. 则对 $n = k+1$, $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2+2} = 2$. 故对所有正整数 n, $a_n < 2$ 恒成立. 又显然 $a_n > 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 有界.

再判断单调性. 考察相邻两项的平方之差:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 + a_n) - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 2) = -(a_n - 2)(a_n + 1)$$

由于 $0 < a_n < 2$, 可知 $a_n - 2 < 0$ 且 $a_n + 1 > 0$. 因此 $a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$, 即 $a_{n+1}^2 > a_n^2$. 因为数列各项均为正, 所以 $a_{n+1} > a_n$. 故数列 $\{a_n\}$ 严格递增.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界. 根据单调收敛定理, 该数列收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. 对递推关系式 $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ 两边同时取极限. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, 并且平方根函数连续,

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+L}$$

得到关于 L 的方程 $L = \sqrt{2+L}$. 两边平方得 $L^2 = 2+L$, 即 $L^2 - L - 2 = 0$, 解得 $L = 2$ 或 $L = -1$. 由于数列 $\{a_n\}$ 的所有项均为正数, 其极限必为非负数, 故舍去 $L = -1$.

于是该数列收敛, 且极限为 2.

1.3.6 两个重要的极限

以下两个极限在更复杂的极限计算中常被作为已知结论引用.

定理 1.6

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

其中 $e \approx 2.71828\ldots$ 是自然对数的底数. 这个极限是指数函数 e^x 的一个基本定义. 在已经建立指数函数与对数函数连续性的框架下, 其更一般的形式为

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

证明 先说明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限确实存在. 记

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由二项式展开可得

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-\frac{j}{n}\right),$$

其中 $k=0$ 时约定空积为 1. 对固定的 k, 乘积中的每个因子随 n 增大而不减, 且 x_{n+1} 比 x_n 多出一个非负项, 因而 $\{x_n\}$ 单调递增. 又 $x_n < y_n$, 而 $\{y_n\}$ 单调递减; 后一结论可由

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right) < 1$$

得到, 其中最后一步使用伯努利不等式 $(1-t)^{-(n+1)} > 1+(n+1)t$ $(0<t<1)$. 因此 $\{x_n\}$ 单调递增且以 $y_1 = 4$ 为上界, 必收敛. 其极限定义为自然常数 e.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对一般实数 x, 当 n 足够大时 $1+x/n>0$. 在采用连续的指数、对数函数后,

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \to x,$$

这里使用基本极限 $\lim_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$. 再由指数函数连续性得

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x.$$

知乎@余命数

□

定理 1.7

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

证明 **证明:** 令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$. 显然当 $n>1$ 时, $\sqrt[n]{n}>1$, 故 $x_n>0$. 有 $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, 两边取 n 次幂, 得到 $n=(1+x_n)^n$.

根据二项式定理, 对 $n\geq 2$:

$$n=(1+x_n)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x_n+\binom{n}{2}x_n^2+\cdots+\binom{n}{n}x_n^n$$

由于所有项均为正, 可只取其中一项放缩:

$$n>\binom{n}{2}x_n^2=\frac{n(n-1)}{2}x_n^2$$

对 $n\geq 2, 1>\frac{n-1}{2}x_n^2$, 整理得

$$x_n^2<\frac{2}{n-1}$$

因此得到 x_n 的界:

$$0<x_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

当 $n\to\infty$ 时, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$.

根据夹逼准则,$\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 因此,$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+x_n)=1+0=1$.

□

这个极限刻画了不同增长类型在开 n 次方后的行为.

考虑两个函数: 常数函数 $f(n)=c$ 和线性函数 $g(n)=n$. 线性函数的增长速度显然远快于常数函数. 对两者同时施加 $\sqrt[n]{\cdot}$ 运算:

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 对常数 $c>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$. 因为 $\sqrt[n]{c}=c^{1/n}$, 当 $n\to\infty$ 时 $1/n\to 0$, 故 $c^{1/n}\to c^0=1$.
- 对线性函数 n, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

尽管 n 的增长速度远超任何常数 c, 但在开 n 次方后, 它们的极限行为完全相同.

这说明开 n 次方根运算的削弱作用极强. 它能将任何多项式速率增长的序列, 如 n, n^2, n^k 的极限都压回到 1. 与指数函数 a^n $(a>1)$ 的爆炸式增长相比, 任何多项式 $P(n)$ 的增长都可忽略; 考察 $\sqrt[n]{P(n)}$ 时, 其极限也总是 1.

这个极限是级数收敛性根值判别法的基础, 用来衡量一个数列增长速率是否快于几何级数.

知乎@余命数

1.4 级数

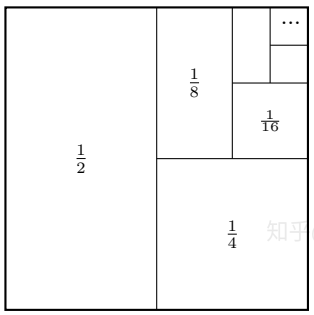


图 1.4　无穷级数 $1/2+1/4+1/8+\cdots=1$ 的几何直观.

阿喀琉斯与乌龟的赛跑

芝诺曾提出一个著名悖论. 阿喀琉斯永远追不上前面爬行的乌龟, 理由是每次阿喀琉斯到达乌龟所在位置时, 乌龟又向前移动了一小段; 待他跑完这段新距离, 乌龟又移动了一点. 这个过程可以无限细分, 阿喀琉斯似乎永远在完成超越.

这个悖论提出的问题是, 包含无穷多个步骤的过程能否在有限时间内完成, 换成更具体的说法, 把 1 米长的绳子依次切成 1/2 米、1/4 米、1/8 米……得到的这一串无穷片段能否重新拼成原来的 1 米.

直觉上, 无穷多个正数相加似乎结果应为无穷大. 但经验(阿喀琉斯确实能追上乌龟, 绳子也确实长 1 米)表明, 在特定条件下, 无穷多个数之和可以是一个有限值.

这种无穷项之和的数学结构称为**级数**. 它是理解连续、逼近与函数的重要工具.

1.4.1 定义与收敛性

无穷次加法无法直接执行. 为了给无穷和赋予数学意义, 需要借助部分和与极限.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 1.10 (级数) 给定一个数列 $\{a_n\}$. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

称为**无穷级数**, 简称**级数**. 其中 a_n 称为级数的**通项**.
为计算其值, 构造新的数列 $\{S_n\}$, 称为级数的**部分和数列**, 其中

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于实数 S, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 则称该级数**收敛**, 并称 S 为该级数的**和**. 如果 $\{S_n\}$ 发散, 则称该级数**发散**.

级数的和就是部分和数列的极限. 若前 n 项和随 n 增大而趋于某个固定数值, 这个数值就被当作无穷多项相加的结果.

1.4.2 级数收敛的必要条件

直观上, 要把无穷多个数加成一个有限值, 构成级数的数列 $\{a_n\}$ 必须越来越小, 最终趋于零.

上一节已经证明, 若两个数列都有极限, 则它们和与差的极限等于极限的和与差. 据此即证项趋零性.

定理 1.8 (项趋零性) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么其通项 a_n 随 n 趋于无穷时的极限必为零, 即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

证明 设级数收敛于 S, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. 通项与部分和的关系为 $a_n = S_n - S_{n-1}$ (当 $n \geq 2$). 又因为 $S_n \to S$, 去掉或平移有限项不改变极限, 所以 $S_{n-1} \to S$. 对等式两边取极限, 得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

证毕. □

这只是一个**必要条件**. 即使 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 级数也未必收敛. 这一点在后续关于调和级数的讨论中将得到证实. 但如果 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 则可以断定级数发散.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.18　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 的敛散性.

解　考察通项的极限.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

由于极限不为 0, 根据必要条件, 该级数发散.

知乎@余命数

1.4.3 重要的级数模型

1.4.3.1 几何级数(等比级数)

几何级数是最基本且应用最广泛的级数. 考虑等比数列 $\{aq^{n-1}\}$ 构成的级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots \quad (a \neq 0)$$

其部分和 S_n 由等比数列求和公式给出.

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na & q = 1 \end{cases}$$

分析 S_n 的极限行为.

- 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 故 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$. 级数收敛.
- 当 $|q| \geq 1$ 时, 通项 aq^{n-1} 不趋于 0, 故级数发散; 对应的部分和可能无界, 也可能振荡而不收敛.

综合两种情形, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛当且仅当 $|q| < 1$, 其和为 $\frac{a}{1-q}$.

例题 1.19　计算循环小数 $0.999\ldots$ 的值, 并判断它与 1 的关系.

解　首先明确 $0.999\ldots$ 的含义. 它表示一个极限过程. 依次取

$$s_1 = 0.9, \quad s_2 = 0.99, \quad s_3 = 0.999, \quad \ldots$$

一般地, 第 n 个近似写作

$$s_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n\text{个}9}.$$

把数列 $\{s_n\}$ 的极限(若存在)记作 $0.999\ldots$:

$$0.999\ldots := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接下来把 s_n 写成有限级数. 每个 s_n 可表示为

$$s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}.$$

这是等比级数的前 n 项和, 首项为 $a = \dfrac{9}{10}$, 公比为 $q = \dfrac{1}{10}$. 由等比数列求和公式

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

可得

$$s_n = \frac{9}{10} \cdot \frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1-10^{-n}}{\frac{9}{10}} = 1 - 10^{-n}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - 10^{-n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} 10^{-n} = 1 - 0 = 1.$$

根据 $0.999\ldots$ 的定义, 有

$$0.999\cdots = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

从差的角度再看一次. 由 $s_n = 1 - 10^{-n}$ 可得

$$1 - s_n = 10^{-n}.$$

对两边取极限, 得

$$1 - 0.999\cdots = 1 - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - s_n) = \lim_{n\to\infty} 10^{-n} = 0.$$

两数之差为 0, 说明 $0.999\ldots$ 与 1 表示同一个实数, 它们之间没有间隙.

上面的计算还给出了另一个常用写法的依据, 得

$$0.00999\cdots = \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9/10^3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^2} = 0.01.$$

因此

$$0.5 = 0.4999\ldots, \quad 0.25 = 0.24999\ldots, \quad \text{等等.}$$

任何有限小数的十进制展开都有一种等价表示. 把最后一位减一, 再接无穷多个 9; $0.999\cdots = 1$ 是其中最简单的一例.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.4.3.2 调和级数

考察通项为 $a_n = \frac{1}{n}$ 的级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

虽然 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 满足收敛的必要条件, 但该级数**发散**, 正印证了通项趋于零并非充分条件.

知乎@余命数

证明 (Oresme 的证明) 将级数的项分组放缩.

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

知乎@余命数

通过把 2^k 项的分母放大为 2^{k+1} 的倒数, 构造出了无穷多个 $1/2$. 这个和趋向于无穷大. 因此, 调和级数发散. □

1.4.3.3 裂项级数

若级数的通项 a_n 可写成 $a_n = b_n - b_{n+1}$, 则部分和 S_n 中会出现中间项抵消. 这种级数称为裂项级数.

知乎@余命数

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

此时级数的敛散性完全取决于数列 $\{b_n\}$ 的极限.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

例题 1.20 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的和.

解 利用部分分式分解.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

部分和为.

知乎@余命数

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

知乎@余命数

取极限.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

1.4.4 绝对收敛与条件收敛

项的符号发生变化的级数需要更细致的分析. 考虑交错调和级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

知乎@余命数

调和级数发散, 但由于正负项相互抵消, 这个级数收敛(收敛于 $\ln 2$).

定义 1.11 对级数 $\sum a_n$:

- 若各项绝对值构成的级数 $\sum |a_n|$ 收敛, 则称原级数**绝对收敛**.
- 若原级数 $\sum a_n$ 收敛, 但 $\sum |a_n|$ 发散, 则称原级数**条件收敛**.

绝对收敛的级数具有很好的性质, 例如可以任意交换求和顺序而不改变和的值. 条件收敛级数则不然. 黎曼重排定理指出, 对条件收敛级数, 可以通过重排项的顺序使其收敛于任意实数, 甚至发散. 这说明处理无穷级数时, 有限运算的直觉, 如交换律需要经过严格检验.

1.4.5 典型级数与函数展开

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

建立级数收敛概念后, 需要几个标准参照系. 判断陌生级数的敛散性, 常用方法是把它与已知典型级数比较. 同时, 级数也可以表示函数, 从而把研究对象从数字之和提升到函数.

1.4.5.1 几何级数

几何级数(等比级数)是计算中最友好的级数, 也是衡量其他级数收敛速度的参照.

考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$. 前文已知, 当且仅当 $|x| < 1$ 时, 该级数收敛于 $\frac{1}{1-x}$.

这个求和公式说明了一个基本代数事实. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 可以展开为一个无穷多项式.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1) \tag{1-3}$$

这个等式是现代分析中幂级数理论的起点. 在收敛区间内, 复杂的函数可以被简单的幂函数之和替代.

知乎@余命数

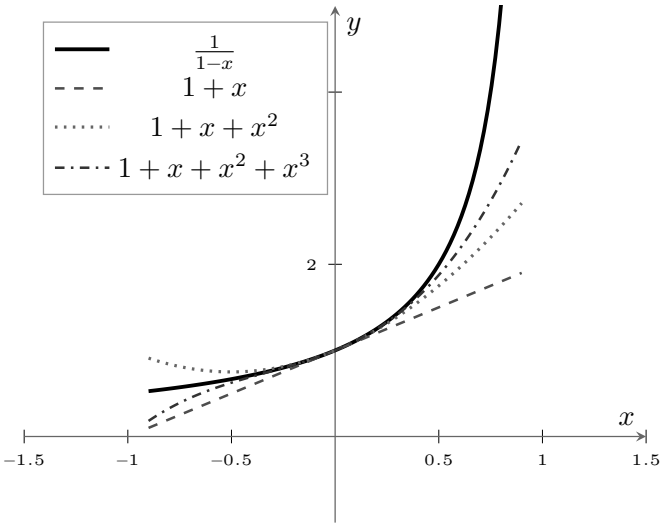


图 1.5　函数 $y=\frac{1}{1-x}$ 与其部分和多项式的逼近情况. 注意在 $|x|<1$ 区间内的拟合效果.

1.4.5.2 调和级数的推广

调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 的发散性划定了敛散性的边界. 若通项趋于 0 的速度比 $1/n$ 更慢, 级数必发散; 若快得多, 级数可能收敛. 为量化这种快慢, 引入 p-级数.

定义 1.12 (p-级数) 形如以下的级数称为 **p-级数**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots$$

其中 p 为实常数.

其敛散性完全由指数 p 决定.

- 当 $p\le 1$ 时, 级数**发散**.($p=1$ 即为调和级数)
- 当 $p>1$ 时, 级数**收敛**.

例如, $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛(欧拉证明了其和为 $\pi^2/6$), 而 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p=1/2$) 发散.p-级数常被用作比较判别法中的参照物.

1.4.5.3 交错级数

数学中常出现正负项交替出现的级数, 称为**交错级数**. 其一般形式为.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\dots\quad(a_n>0)$$

对这类级数, 莱布尼茨给出了一个简洁实用的判别法.

知乎@余命数

定理 1.9 (莱布尼茨判别法) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 中 $a_n>0$, 且满足以下两个条件.

1. **单调递减**, 即 $a_{n+1}\le a_n$ 对所有 n 成立;
2. **趋于零**, 即 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

那么该级数**收敛**.

证明 记部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k.$$

将奇数项、偶数项的部分和分开.

$$S_{2n}=a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n},\qquad S_{2n+1}=a_1-a_2+\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}.$$

偶数部分和单调递增.

$$\begin{aligned}S_{2n+2}-S_{2n}&=(a_1-\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2})\\&\quad-(a_1-\cdots-a_{2n})\\&=a_{2n+1}-a_{2n+2}\ge 0,\end{aligned}$$

因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 所以 $a_{2n+1}\ge a_{2n+2}$. 因此 $\{S_{2n}\}$ 单调递增.

奇数部分和单调递减.

$$S_{2n+3}-S_{2n+1}=(S_{2n+1}-a_{2n+2}+a_{2n+3})-S_{2n+1}=-a_{2n+2}+a_{2n+3}\le 0,$$

同样由于 $a_{2n+2}\ge a_{2n+3}$, 故 $\{S_{2n+1}\}$ 单调递减.

奇偶部分和互相夹逼. 一方面,

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}>S_{2n},$$

所以对所有 n, 都有 $S_{2n}\le S_{2n+1}$, 即

$$S_2\le S_4\le\cdots\le S_{2n}\le S_{2n+1}\le\cdots\le S_3\le S_1.$$

于是 $\{S_{2n}\}$ 有上界 S_1, $\{S_{2n+1}\}$ 有下界 S_2. 结合第 1、2 点, 得到.

$$\{S_{2n}\}\text{ 单调递增有上界 }\Rightarrow\ \{S_{2n}\}\text{ 收敛},$$

$$\{S_{2n+1}\}\text{ 单调递减有下界 }\Rightarrow\ \{S_{2n+1}\}\text{ 收敛}.$$

知乎@余命数 知乎@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L_1, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = L_2.$$

利用 $a_n \to 0$ 说明两极限相同：注意到

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

两边取极限可得

$$L_2 - L_1 = \lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$

所以 $L_1 = L_2 =: L$.

这说明奇数、偶数部分和收敛到同一极限 L, 于是整体部分和 S_n 也收敛到 L, 即原交错级数收敛.

直观理解. 每加一项就向左右交替摆动, 由于加上的正负项绝对值越来越小, 部分和在一段越来越短的区间内震荡; 区间长度约为 a_n, 而 $a_n \to 0$, 所以震荡最终集中到同一个点, 这个点就是级数的和. □

例题 1.21 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 这是交错调和级数. 令 $a_n = \frac{1}{n}$. 1. 显然 $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$, 满足单调递减. 2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 满足极限为零. 根据莱布尼茨判别法, 该级数收敛.

例题 1.22 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性, 并说明是绝对收敛还是条件收敛.

解 令 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. 单调性. 对 $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n,$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减;

2. 极限. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

满足莱布尼茨判别法的两个条件, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

收敛.

再看绝对收敛性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

是 p 级数 ($p=\frac{1}{2}\leq 1$), 发散.

因此原级数**条件收敛**, 绝对值级数发散.

例题 1.23 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性, 并说明是绝对收敛还是条件收敛.

解 令 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. 单调性. 对 $n\geq 1$,

$$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

比较 a_{n+1} 与 a_n:

$$\begin{aligned}a_{n+1}<a_n &\iff \frac{1}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n(n+1)}\\ &\iff n(n+1)<(n+1)(n+2),\end{aligned}$$

而 $n(n+1)<(n+1)(n+2)$ 显然成立, 所以 $a_{n+1}<a_n$, 序列单调递减;

2. 极限. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=0$.

故由莱布尼茨判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$$

收敛.

再看绝对收敛性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

注意

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{N+1}\xrightarrow{N\to\infty}1.$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 从而原级数**绝对收敛**.

例题 1.24　判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性, 并说明是绝对收敛还是条件收敛.

知乎@余命数

解　令 $a_n=\sin\frac{1}{n}$.

1. 单调性. 当 n 增大时, $\dfrac{1}{n}$ 单调递减; 而在区间 $(0,1]$ 上, $\sin x$ 单调递增 (因为 $\cos x>0$), 因此复合函数

$$a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

随 n 增大而单调递减, 即 $a_{n+1}\le a_n$;

2. 极限. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin 0=0.$

知乎@余命数

满足莱布尼茨判别法条件, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$$

收敛.

知乎@余命数

考察绝对收敛性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{n}\right|.$$

对大 n, $\dfrac{1}{n}$ 很小, 利用极限

知乎@余命数

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

知乎@余命数

于是由极限比较判别法,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{n}\right|\quad\text{与}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

有相同的敛散性, 而调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin \frac{1}{n}\right|$$

发散.

故原级数**条件收敛**, 绝对值级数发散.

1.4.5.4 作为函数的级数

把几何级数 $\sum x^n$ 的思想推广. 若级数中的常数项替换为变量 x 的函数, 级数本身就定义了一个函数. 最重要的一类是**幂级数**.

定义 1.13 (幂级数) 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

的级数称为关于 x 的幂级数, 其中 c_n 为常数系数.

幂级数可看作次数无限的多项式. 对一个幂级数, 存在非负实数 R, 称为**收敛半径**, 使得

- 当 $|x| < R$ 时, 级数绝对收敛;
- 当 $|x| > R$ 时, 级数发散.

许多常见初等函数都可以表示为幂级数, 称为函数的**泰勒展开**. 这种表示把复杂的函数运算, 如求导、积分转化为简单的多项式系数运算.

例题 1.25 指数函数 e^x 的幂级数展开如下.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

该级数对所有实数 x 收敛, 即 $R = +\infty$.

例题 1.26 正弦函数 $\sin x$ 的幂级数展开如下.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

这也是一个交错级数, 且对所有实数 x 收敛.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

借助这些展开式, 计算机可用有限的加减乘除高精度计算 e^2 或 $\sin(1)$ 等数值. 这是级数理论在现代计算中的主要用途之一.

1.5 切线问题

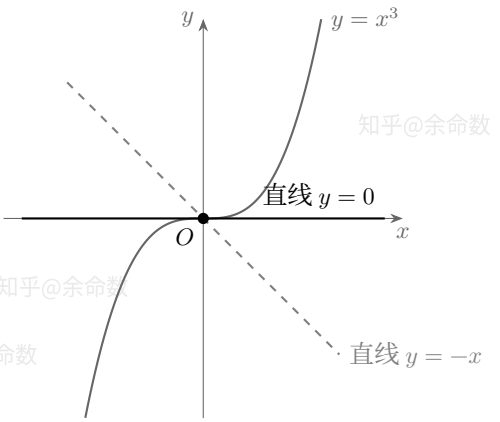
有了极限的初步概念, 我们就可以严格定义曲线在某一点的切线, 这是最初激发微积分的几何问题.

@余命数　知乎@余命数

1.5.1 古典定义

古希腊几何学家对圆、椭圆等二次曲线的切线已有基本认识. 他们所依赖的要点是, 若一条直线与曲线在某点附近**仅有一个交点**, 则此直线为该曲线在该点的切线. 这种基于交点个数的判别法对凸性良好的简单曲线直观有效.

然而, 当我们把定义用于更复杂的函数曲线时, 它暴露出根本缺陷. 我们考察函数 $y = x^3$ 在原点 $(0,0)$ 处的切线. 从直观上看, 水平的 x 轴是最佳候选. 但用古典定义检验它, 会立即陷入矛盾.



知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

图 1.6　曲线 $y = x^3$ 在原点的切线问题

直线 $y = 0$ 即 x 轴, 与曲线 $y = x^3$ 在原点接触. 但当 $x > 0$ 时 $x^3 > 0$, 曲线在直线上方; 当 $x < 0$ 时 $x^3 < 0$, 曲线在直线下方. 于是该直线在接触点处**穿过**了曲线, 这与切线应支撑于曲线一侧的直观感受矛盾.

更严重的是唯一性问题. 我们考察任意一条斜率为负的直线 $y = mx$ $(m < 0)$. 方程 $x^3 = mx$ 仅有唯一实数解 $x = 0$. 若依据唯一交点准则, 则任何一条过原点的斜率为负的直线都是切线, 这显然是荒谬的.

这些矛盾说明, 依赖曲线**全局**交点个数的静态定义不够用. 我们需要一种能精确捕捉曲线在某点附近**局部趋势**的工具, 而极限理论正好提供这一工具.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.5.2 割线的极限观点

我们要求曲线在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线. 确定一条直线需要一个点与一个斜率. 点 P 已知, 剩下的问题是求斜率.

斜率定义 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 需要两个不同点, 仅凭点 P 无法直接算出任何斜率. 因此我们在曲线点 P 的邻近另取一个不同点 $Q(x, f(x))$. 连接 P 与 Q 的直线称为曲线的一条**割线**. 其斜率 k_{PQ} 为

$$k_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

知乎@余命数

此值量化了函数在 $[x_0, x]$ 这段区间内的**平均变化率**.

这条割线是对切线的一个近似. 点 Q 越接近点 P, 割线 PQ 对点 P 处切线的近似就越精确. 我们用**极限** 严格表述这一逼近过程. 让点 Q 沿曲线向点 P 移动, 即横坐标 x 无限趋近于 x_0.

从几何上看, 割线 PQ 在此过程中不断旋转. 当 Q 无限接近 P 时, 割线稳定于一个确定的极限位置. 这个极限位置的直线就是曲线在点 P 处的**切线**.

几何上的极限位置对应着代数上割线斜率的极限值. 因此, 点 P 处切线的斜率就是割线斜率 k_{PQ} 当 $x \to x_0$ 时的极限.

1.5.3 切线斜率的严格定义

知乎@余命数 知乎@余命数

我们将上述直观思想写成数学语言. 曲线在点 P 处的切线斜率, 就是当 $x \to x_0$ 时割线斜率 k_{PQ} 的极限.

定义 1.14 (切线斜率) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的**切线斜率** $k_{\tan}$ 定义为

$$k_{\tan} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1-4}$$

若令 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $x \to x_0$ 等价于增量 $\Delta x \to 0$. 于是定义式可改写为

$$k_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1-5}$$

若此极限存在, 则称曲线在该点处的切线存在.

基于极限的定义解决了古典定义的困境, 并给 $\frac{0}{0}$ 型不定式赋予了几何意义. 它考察的是当 Δx 无限趋近于 0 时整个比值的极限.

回到 $f(x) = x^3$ 在原点的例子. 连接原点 $(0, 0)$ 与曲线上另一点 (x, x^3) 的割线斜率为

$$k_{\text{割线}} = \frac{x^3 - 0}{x - 0} = x^2 \quad (x \neq 0)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

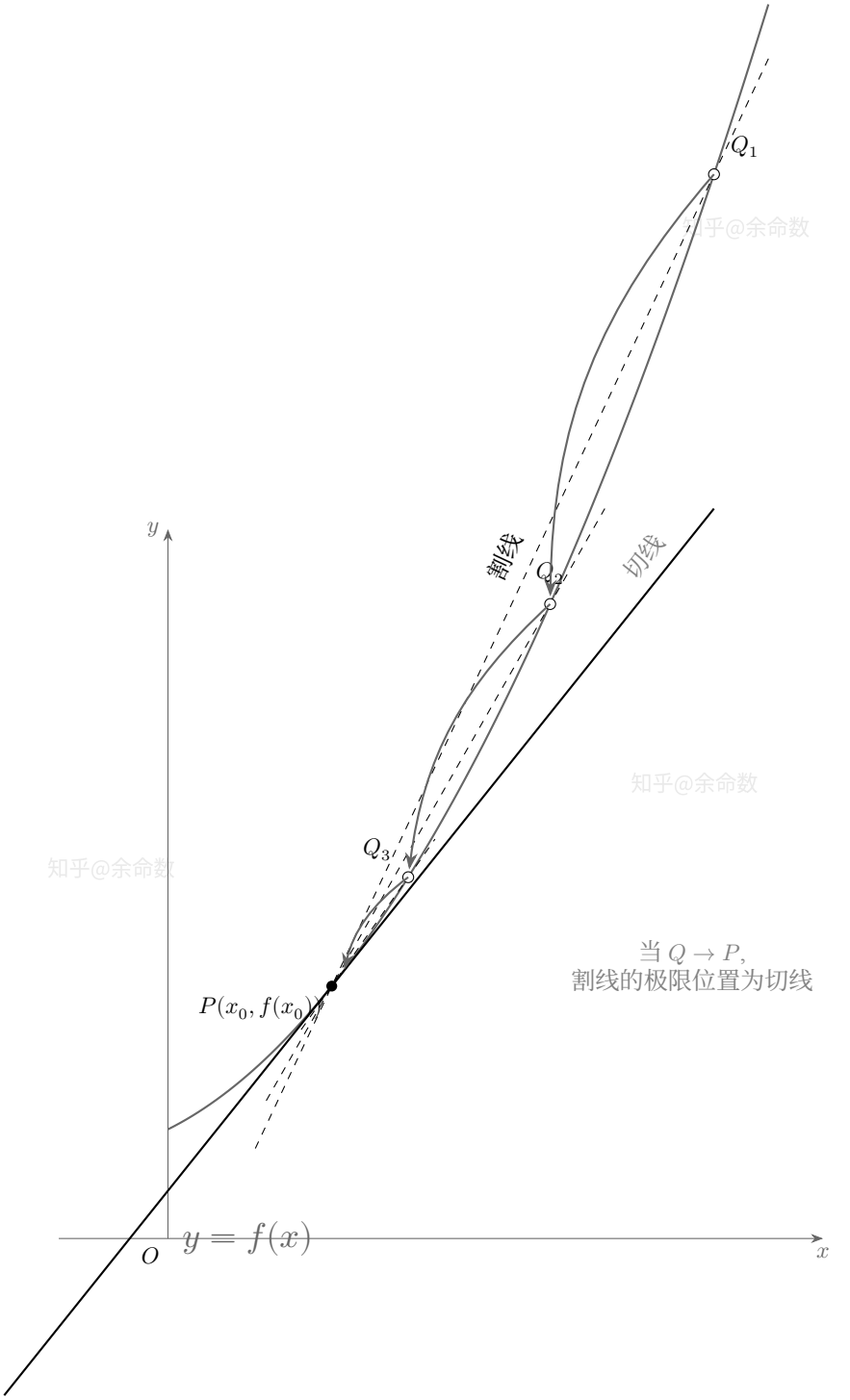


图 1.7　当点 Q 沿曲线趋近于点 P 时, 割线 PQ 的极限位置即为在点 P 处的切线.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

我们考察当 $x \to 0$ 时此斜率的极限

$$k_{\tan} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

这个极限唯一且确定. 无论动点从左侧还是右侧趋近原点, 割线斜率都趋向于 0. 因此原点处切线的斜率为 0, 对应切线方程为 $y - 0 = 0(x - 0)$, 即 $y = 0$. 定义由此解决了之前的矛盾.

极限提供了一个局部放大的视角. 在无限小的尺度下, 任何光滑曲线都近似于一条直线, 这条直线就是它的切线. 切线是曲线在该点附近的**最佳线性近似**.

例题 1.27 求曲线 $f(x) = x^2$ 在点 $P(1, 1)$ 处的切线斜率, 并写出切线方程.

解 所求切线斜率, 是连接定点 $P(1, 1)$ 与其邻近动点 $Q(1 + \Delta x, (1 + \Delta x)^2)$ 的割线斜率在 $\Delta x \to 0$ 时的极限.

割线 PQ 的斜率为 $k_{PQ} = \dfrac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$. 若直接令 $\Delta x = 0$ 将得到 $\frac{0}{0}$ 的无意义形式, 因此我们在取极限前先作代数化简. 将分子展开并在 $\Delta x \neq 0$ 时提取公因式约分, 得

$$k_{PQ} = \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x \quad (\Delta x \neq 0).$$

这表明只要 Q 点不与 P 点重合, 割线斜率就等于 $2 + \Delta x$. 令 $\Delta x \to 0$, 得切线斜率

$$k_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2,$$

即曲线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率为 2.

由点斜式方程, 所求切线方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x - 1$.

切线问题说明, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 这一形式的极限既解决了几何问题, 又描述瞬时变化. 我们给它取名为**导数**.

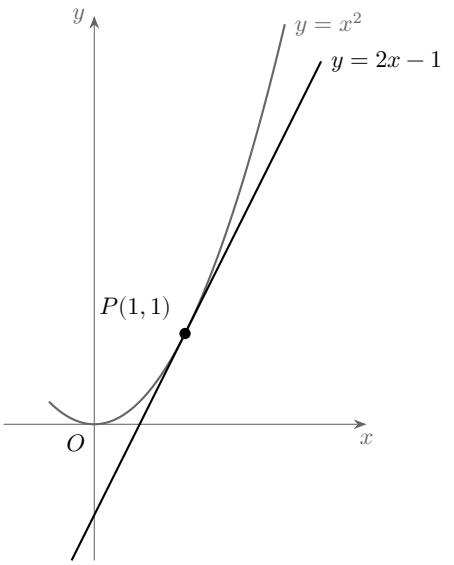
1.5.4 本节习题

1.9. 考察函数 $g(x) = \sqrt{x}$. 运用极限的定义, 证明其在任意点 $P(x_0, \sqrt{x_0})$ $(x_0 > 0)$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

1.10. 求所有通过点 $A(1, -3)$ 且与抛物线 $y = x^2$ 相切的直线方程.

1.11. 考虑函数 $h(x) = |x^2 - 4|$. 判断该函数在点 $x = 2$ 处是否存在切线. 若存在, 求出其方程; 若不存在, 请阐述其几何与代数原因.

知乎@余命数



1.12. 确定参数 a 的值, 使得抛物线 $y=ax^2$ 与对数曲线 $y=\ln x$ 恰好相切.

1.13. 确定常数 b 的值, 使得直线 $y=x+b$ 与对数曲线 $y=\ln x$ 相切.

1.14. 求抛物线 $y=x^2-1$ 上的点, 使得该点处的法线通过坐标原点 $(0,0)$.

1.15. 证明对于任意实数 x, 不等式 $e^x \geq x+1$ 恒成立.

1.16. 考虑双曲线 $y=1/x$ 在第一象限的分支. 证明由该曲线上任意一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积是一个与切点位置无关的常数.

1.5.5 高考真题选讲

以下高考真题围绕切线的构造与判别展开, 涵盖“过点”与“在点”的区分、公切线求解以及切线倾斜角的取值范围.

例题 1.28 (2004 年重庆卷文科数学第 15 题) 已知曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}$, 求过点 $P(2,4)$ 的切线方程.

解 点 $P(2,4)$ 在曲线上, 但“过点”的切线未必以 P 为切点. 设切点为 $\left(x_0, \frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)$, 则切线斜率为 $k=y'(x_0)=x_0^2$, 切线方程为

$$y-\left(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)=x_0^2(x-x_0)$$

将 $P(2,4)$ 代入, 得

$$4-\frac{1}{3}x_0^3-\frac{4}{3}=x_0^2(2-x_0)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

整理得 $x_0^3-3x_0^2+4=0$, 因式分解为 $(x_0-2)^2(x_0+1)=0$, 解得 $x_0=2$ 或 $x_0=-1$.

当 $x_0=2$ 时, 斜率 $k=4$, 切线方程为 $y-4=4(x-2)$, 即 $4x-y-4=0$. 当 $x_0=-1$ 时, 斜率 $k=1$, 切点为 $(-1,1)$, 切线方程为 $y-1=x+1$, 即 $y=x+2$.

故过点 $P(2,4)$ 的切线有两条: $4x-y-4=0$ 与 $y=x+2$.

例题 1.29 (2016 年全国 □ 卷理科数学第 16 题) 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线, 求 b 的值.

解 设直线与两曲线的切点分别为 $(x_1,\ln x_1+2)$ 和 $(x_2,\ln(x_2+1))$. 由导数的几何意义, 切线斜率同时满足

$$k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1}$$

故 $x_1=x_2+1$. 切点在直线 $y=kx+b$ 上, 给出

$$kx_1+b=\ln x_1+2$$

$$kx_2+b=\ln(x_2+1)$$

两式相减, 并利用 $x_1=x_2+1$ 与 $\ln x_1=\ln(x_2+1)$, 得

$$k(x_1-x_2)=2$$

即 $k=2$. 代回得 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$.

由 $kx_1+b=\ln x_1+2$ 得 $b=\ln\frac{1}{2}+2-2\cdot\frac{1}{2}=1-\ln 2$.

例题 1.30 (2021 年全国乙卷文科数学第 21 题) 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

1. 讨论 $f(x)$ 的单调性;
2. 求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

解 (1) 单调性分析 $f'(x)=3x^2-2x+a$, 判别式 $\Delta=4-12a$.

当 $\Delta\le 0$ 即 $a\ge\frac{1}{3}$ 时, $f'(x)\ge 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

当 $\Delta>0$ 即 $a<\frac{1}{3}$ 时, 令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$. $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1,x_2) 上单调递减.

(2) 过原点的切线设切点为 $(x_0,f(x_0))$, 切线斜率 $f'(x_0)=3x_0^2-2x_0+a$. 切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

切线过原点, 代入 $(0,0)$ 得 $f(x_0)=x_0f'(x_0)$, 即

$$x_0^3-x_0^2+ax_0+1=x_0(3x_0^2-2x_0+a)$$

整理得 $2x_0^3-x_0^2-1=0$, 因式分解为 $(x_0-1)(2x_0^2+x_0+1)=0$. 二次因子判别式 $1-8=-7<0$, 故唯一实根 $x_0=1$.

切线斜率 $f'(1)=a+1$, 切线方程为 $y=(a+1)x$.

求切线与曲线的交点, 令 $f(x)=(a+1)x$, 即 $x^3-x^2-x+1=0$, 因式分解为 $(x-1)^2(x+1)=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=-1$.

公共点坐标为 $(1,a+1)$ 与 $(-1,-a-1)$.

例题 1.31 (2010 年辽宁卷理科数学第 10 题) 已知点 P 在曲线 $y=\dfrac{4}{e^x+1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

B. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

D. $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

解 求导得

$$y'=-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=-\frac{4}{e^x+e^{-x}+2}$$

由基本不等式 $e^x+e^{-x}\geq 2$, 故分母 $e^x+e^{-x}+2\geq 4$, 从而 $y'\in[-1,0)$.

切线倾斜角 $\alpha\in[0,\pi)$, 且 $\tan\alpha=y'\in[-1,0)$, 因此 $\alpha\in[\frac{3\pi}{4},\pi)$.

故选 D.

1.6 函数的连续性

我们前面研究的是, 当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 的极限. 我们刻意把极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与函数在该点的取值 $f(x_0)$ 当作两个独立的对象. 它们可能相等, 也可能不相等, 甚至 $f(x_0)$ 可能没有定义.

然而, 许多常见函数满足另一个关系. 例如, 对 $f(x)=x^2$, 我们有 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$, 而 $f(2)=2^2=4$. 这说明极限值恰好等于函数值. 从几何上看, 函数图像在该点连续不断, 没有孔洞、断裂或跳跃.

连续不断是一个几何直观. 下面我们用极限给出它的严格定义.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.6.1 连续性的定义

定义 1.15 (函数在一点的连续性) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其某个邻域内有定义. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 并且等于 $f(x_0)$, 那么我们就称 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

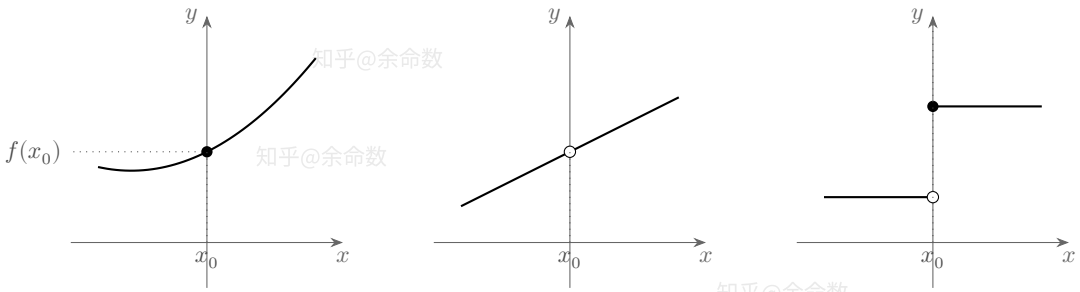
这一定义要求三个条件同时满足.

1. 函数在点 x_0 处有定义, 即 $f(x_0)$ 存在.
2. 函数在点 x_0 处的极限存在, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.
3. 极限值等于函数值, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中任何一个不满足, 我们就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**不连续**或**间断**.

注 1.3 (连续的关键)
若函数在某点连续, 则极限过程的终点恰好是函数在该点的取值. 这件事可写成

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$



(a) 在 x_0 处连续　　(b) 可去间断点　　(c) 跳跃间断点

图 1.8 连续与间断的几何直观

图 (a) 展示连续函数的情形. 当 x 从两侧逼近 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 逼近的高度正好等于 $f(x_0)$. 图 (b) 展示一种间断. 虽然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但 $f(x_0)$ 在该点无定义, 或取了别的值, 于是形成一个孔洞. 这种间断称为**可去间断点**. 图 (c) 展示另一种间断. 左极限与右极限虽然都存在, 但二者不相等, 于是函数图像在此处发生跳跃. 这种间断称为**跳跃间断点**.

1.6.1.0.1 区间上的连续性 我们把点的连续性推广到区间上.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的**每一点**都连续, 则称 $f(x)$ 在**开区间** (a,b) **上连续**.
- 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 并且在左端点 a 处**右连续**（即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$）, 在右端点 b 处**左连续**, 即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, 则称 $f(x)$ 在**闭区间** $[a,b]$ **上连续**.

常见连续函数

所有**基本初等函数**在其**定义域**内的每一个区间上都连续. 它们包括

- 幂函数 $y = x^a$
- 指数函数 $y = a^x$
- 对数函数 $y = \log_a x$
- 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, \ldots$
- 常数函数 $y = c$

此外, 由这些基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成的函数, 在其定义域内也连续.

@余命数

我们下一节将直接利用这个结论. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 那么根据定义, 求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 就等价于计算函数值 $f(x_0)$.

1.7 极限的运算

知乎@余命数

来龙去脉

知乎@余命数

我们已对极限有一个直观认识. 极限描述的是函数值在一点附近的归宿. 当遇到由多个简单函数通过加、减、乘、除组合而成的复杂函数时, 就需要一套求极限的运算法则. 以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-1)$ 为例. 一个自然的想法是, 当 x 趋近于 1 时, x^2 趋近于 $1^2=1$, $3x$ 趋近于 $3\cdot 1=3$, 于是整个表达式的极限就是这些部分极限的简单加减, 即 $1+3-1=3$.

知乎@余命数

这个猜想成立. 极限的运算性质允许我们把一个复杂函数的极限问题**分解**为若干个简单函数极限的四则运算问题, 从而简化求解.

知乎@余命数

1.7.1 极限的四则运算法则

引理 1.2 (三角不等式) 对任意实数 a 和 b, 以下不等式恒成立.

$$|a+b| \le |a| + |b| \tag{1-6}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 设 x 为任意实数, 则 $-|x| \le x \le |x|$. 令 $x = a$ 和 $x = b$, 分别得到

$$-|a| \le a \le |a|,$$

$$-|b| \le b \le |b|.$$

将这两式相加, 得到 $-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$. 不等式 $-k \le y \le k$ 与 $|y| \le k$ 等价, 因此 $|a + b| \le |a| + |b|$. □

定理 1.10 (极限的运算法则) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. 那么

1. **和差法则**.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$$

(和的极限等于极限的和)

2. **乘积法则**.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to x_0} g(x)\right] = L \cdot M$$

(积的极限等于极限的积)

3. **常数倍法则**(乘积法则的特例).

$$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot L \quad (c \text{ 为常数})$$

4. **商法则**. 如果 $M \neq 0$, 那么

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$$

(商的极限等于极限的商, 前提是分母极限不为零)

证明 由题设, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. 根据极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义,

- 对任意 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - L| < \varepsilon_1$;
- 对任意 $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - M| < \varepsilon_2$.

下面我们用这些条件证明四条法则.

先证明和法则, 差法则只需把 g 换成 $-g$ 即可. 现证, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \varepsilon$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

考虑目标表达式, 根据引理 1.2,

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)| = |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \le |f(x)-L|+|g(x)-M|$$

为了使上式最终小于 ε, 我们让右侧的每一项都小于 $\varepsilon/2$.

根据极限的定义,

- 取 $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, 则存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x)-L| < \varepsilon/2$;
- 取 $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$, 则存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x)-M| < \varepsilon/2$.

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 上述两个不等式同时成立, 因此

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)| \le |f(x)-L|+|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这就证明了和法则.

接着证明乘积法则. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, 取 $\varepsilon_2 = 1$ 可知, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_0$ 时有 $|g(x)-M| < 1$, 从而 $|g(x)| \le |M|+1$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 再取 $\delta_1 > 0$ 使 $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$, 取 $\delta_2 > 0$ 使 $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$. 当 $0 < |x-x_0| < \delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-LM| &= |(f(x)-L)g(x)+L(g(x)-M)| \\ &\le |f(x)-L|\,|g(x)|+|L|\,|g(x)-M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}(|M|+1)+\frac{|L|\varepsilon}{2(|L|+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此乘积法则成立. 常数倍法则令 $g(x) \equiv c$ 即为乘积法则的特例.

最后证明商法则. 设 $M \neq 0$. 因 $g(x) \to M$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $0 < |x-x_0| < \delta_0$ 时 $|g(x)-M| < \frac{|M|}{2}$, 从而 $|g(x)| > \frac{|M|}{2}$, 故分母不为零. 由乘积法则可知 $g(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = 1$ 的极限若存在应满足 $M \cdot \lim\frac{1}{g(x)} = 1$; 直接验证如下.

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x)-M|}{|M|\,|g(x)|} \le \frac{2|g(x)-M|}{|M|^2}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$. 再由乘积法则,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

□

这些法则的要点是, **极限符号可以穿透四则运算**. 设每个部分的极限都存在, 并且除法中分母的极限不为零, 那么我们就可以先对每个部分求极限, 再进行运算.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

例题 1.32 试利用极限的运算法则，计算 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$.

解 我们把这个极限一步步分解到最基本的极限形式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2+3x) &= \lim_{x\to 2}(x^2)+\lim_{x\to 2}(3x) && \text{(和法则)}\\ &= \lim_{x\to 2}(x\cdot x)+3\cdot\lim_{x\to 2}(x) && \text{(积法则与常数倍法则)}\\ &= \left(\lim_{x\to 2}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2}x\right)+3\cdot\left(\lim_{x\to 2}x\right) && \text{(再次应用积法则)}\end{aligned}$$

对于 $\lim\limits_{x\to 2}x$，其值为 2. 将此结果代入，得到

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (2)\cdot(2)+3\cdot(2)\\ &= 4+6\\ &= 10\end{aligned}$$

注 1.4 (注记) 这个例题说明，对任意多项式函数 $P(x)$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)$ 的值都等于 $P(x_0)$. 这就是直接代入法的理论基础.

对于多项式函数、有理分式函数（分母不为零时）、三角函数、指数函数和对数函数，它们在其定义域内都连续. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

求极限的黄金法则

对任意初等函数 f，在其**定义域内**任取一点 x_0，求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，第一步总是**把 $x=x_0$ 直接代入函数表达式**.

- 如果得到一个确定的数值，那么这个数值就是所求的极限.
- 如果代入后出现**分母为零**，那么直接代入法失效，需要改用其他方法.

例题 1.33 求下列极限. (1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-5x+1)$ (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{x}$

解 (1) 该函数是多项式函数，在 $x=2$ 处连续. 直接代入，得到

$$\lim_{x\to 2}(x^3-5x+1)=2^3-5(2)+1=8-10+1=-1$$

(2) 该函数在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处有定义且连续（分母不为零），故可直接代入，得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

知乎@余命数

1.7.2 本节习题

1.17. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-4}$.

1.18. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

1.19. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$, 其中 a,b 为常数.

1.20. 计算极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

1.21. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$, 求常数 a,b 的值.

1.22. 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}, & x\neq 1\\ k, & x=1\end{cases}$$

若函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 求常数 k 的值.

1.23. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$.

1.24. 确定常数 a,b 的值, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

1.25. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$, 其中 a 为任意实数.

1.26. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

1.27. 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ 的所有渐近线.

1.28. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=L$, 其中 L 为非零常数. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{\sin^2 x}$.

1.29. 设函数 $f(x)$ 定义为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax}{x^{2n}+1}$, 其中 n 为正整数. 试确定常数 a 的值, 使得 $f(x)$ 是一个连续函数.

1.30. 证明方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实数根.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

1.8 无穷远处的极限与无穷小量

我们之前讨论的极限多是当 x 趋近于某个**有限值** x_0 时的情形. 但很多应用关心自变量 x 变得**无限大**或无限小时函数的长期变化趋势.

我们引入 $x \to +\infty$ 时的极限来描述这种最终趋势. 它用于研究函数的**渐近线**、比较函数的**增长速度**.

知乎@余命数

1.8.1 无穷远处的极限

知乎@余命数

定义 1.16 ($x \to +\infty$ 时的极限) 如果当 x 沿正方向无限增大时, 函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 L, 那么我们就称 L 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷时的极限, 记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \tag{1-7}$$

几何上, 这表示函数 $y = f(x)$ 的图像有一条**水平渐近线** $y = L$.

知乎@余命数

无穷远极限的一个基本结论是, 幂函数的倒数在无穷远处趋于零.

定理 1.11 (最重要的无穷极限) 对于任意正数 $n > 0$ 和任意实常数 c, 当 x 取正实数并趋于正无穷时, 有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \tag{1-8}$$

知乎@余命数

证明 按定义, 需证明对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $M > 0$, 使当 $x > M$ 时恒有 $\left|\frac{c}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$. 现分 $c = 0$ 与 $c \neq 0$ 两种情形.

若 $c = 0$, 则对任意 $x \neq 0$, $\frac{c}{x^n} = 0$, 不等式化为 $0 < \varepsilon$, 由 $\varepsilon > 0$ 恒成立, 任取 $M > 0$, 例如 $M = 1$ 即可.

若 $c \neq 0$, 由目标不等式 $\left|\frac{c}{x^n}\right| < \varepsilon$ 出发定出 M. 因 $x \to +\infty$ 时只关心 $x > 0$, 此时 $x^n > 0$ 故 $|x^n| = x^n$, 不等式化为 $\frac{|c|}{x^n} < \varepsilon$. 由 $\varepsilon > 0$ 且 $x^n > 0$ 交叉相乘(不改变不等号方向)得 $|c| < \varepsilon\, x^n$, 即 $x^n > \frac{|c|}{\varepsilon}$; 因 $n > 0$, 两边取 n 次方根得 $x > \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{1/n}$. 故取 $M = \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{1/n}$.

验证此 M: 当 $x > M$ 时, $x > \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{1/n}$, 两边取 n 次方(因 $n > 0$ 且两边为正, 合法)得 $x^n > \frac{|c|}{\varepsilon}$, 由 x^n, ε 均为正整理得 $\varepsilon > \frac{|c|}{x^n} = \left|\frac{c}{x^n}\right|$, 即 $\left|\frac{c}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$.

知乎@余命数

综合两种情形, 对任意 $\varepsilon>0$ 都存在相应 $M>0$ 使当 $x>M$ 时 $|\frac{c}{x^n}-0|<\varepsilon$ 成立. 由定义, 定理成立. 证毕. □

这条公式是求有理函数在无穷远处极限的基本工具.

1.8.2 高次项、低次项与抓高次原则

我们处理多项式或有理分式在无穷远处的极限时, 一个有用的观察是, **在无穷的尺度下, 只有增长最快的那一项才重要**.

定义 1.17 (高次项与低次项) 在一个多项式中, 我们称次数最高的项为**最高次项**或**高阶项**, 其余的项为**低阶项**.
例如, 在多项式 $P(x)=3x^4-100x^2+5x-2024$ 中.

- $3x^4$ 是**最高次项**.
- $-100x^2, 5x, -2024$ 都是**低次项**.

当 x 变得非常大时, 例如 $x=10^9$, $3x^4$ 的值将远远超过所有低次项之和, 低次项的影响变得可以忽略不计. 这就是所谓的抓高次原则.

阅读提示

当 $x\to+\infty$ 时, 一个多项式或有理分式的极限, 完全由其分子和分母的**最高次项**所决定.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} \tag{1-9}$$

例题 1.34 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+5}{7x^3+3x-1}$.

解 法一直接将分子、分母同除以最高次幂 x^3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-4x^2+5}{7x^3+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

法二使用抓高次原则.$x\to+\infty$ 时极限由分子、分母的最高次项决定,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-4x^2+5}{7x^3+3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{7x^3}=\frac{2}{7}.$$

知乎@余命数

注 1.5 (有理函数无穷极限的快速判断)
对于有理函数 $f(x)=\dfrac{a_nx^n+\cdots}{b_mx^m+\cdots}$, 我们按以下方式判断它在 $x\to+\infty$ 时的极限.

- 若 $n>m$(分子次数 > 分母次数), 则函数趋于 ∞ 或 $-\infty$, 在有限实数意义下极限**不存在**.
- 若 $n<m$(分子次数 < 分母次数), 则极限为 **0**.
- 若 $n=m$(分子次数 = 分母次数), 则极限为最高次项系数之比 $\dfrac{a_n}{b_m}$.

1.8.3 高阶无穷大与低阶无穷大

知乎@余命数

1.8.3.1 抓高次原则的升维

我们在前面遇到的抓高次原则, 实质上是在比较不同次幂的幂函数 x^n 在 $x\to+\infty$ 时的增长速度. 可见 x^3 比 x^2 增长得快, x^2 又比 x 增长得快.

但如果问题变成比较 e^x 和 x^{10000} 哪个增长更快, 或者比较 $\ln x$ 和 $\sqrt[100]{x}$, 仅仅比较次数就不够用了. 我们需要一个更普适的工具来描述和比较**任意函数**在趋于无穷时的增长速率, 这就是阶的概念.

知乎@余命数

定义 1.18 (无穷大的阶) 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$. 考察它们的比值在 $x\to+\infty$ 时的极限以比较增长速度.

- 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, 我们称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ **更高阶的无穷大**. 这说明 $f(x)$ 增长得比 $g(x)$ **快得多**.
- 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 我们称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ **更低阶的无穷大**. 这说明 $f(x)$ 增长得比 $g(x)$ **慢得多**.
- 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$($c$ 为非零常数), 我们称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**同阶无穷大**. 这说明它们的增长速度在同一量级. 例如 $2x^2$ 和 $10x^2$ 就是同阶无穷大.

知乎@余命数 知乎@余命数

注 1.6 (常见函数的增长速度阶梯)
当 $x\to+\infty$ 时, 我们熟知的几类函数, 其增长速度存在清晰的层级.
对数函数 $\ll$ 幂函数 $\ll$ 指数函数 $\ll$ 更高阶的函数
更具体地说, 对于任意的 $a>1, n>0$, 下面两个极限极为重要.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^n}=0 \qquad \text{(幂函数增速 远快于对数函数)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \qquad \text{(指数函数增速 远快于幂函数)}$$

知乎@余命数

一个更形象的排序是(从慢到快).

$$\cdots \ll \ln x \ll \sqrt{x} \ll x \ll x^2 \ll \cdots \ll (1.01)^x \ll e^x \ll 3^x \ll \cdots \ll x^x \ll \ldots$$

抓高次原则的终极形态

当 $x \to +\infty$ 时, 求一个由不同阶无穷大**相加减**构成的分式极限时, 我们只需要保留分子和分母中**最高阶的无穷大**, 其余低阶项均可忽略.

例题 1.35　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 100x^{10} + \ln x}{2e^x + 500x^2}$.

解　按抓高次原则, 关键是定出分子与分母中各自最高阶的无穷大. 依增长速度阶梯, 在分子 $e^x - 100x^{10} + \ln x$ 中指数函数 e^x 是最高阶无穷大, x^{10} 与 $\ln x$ 是其低阶无穷大; 分母 $2e^x + 500x^2$ 中同样以 e^x 为最高阶, x^2 为低阶. 保留最高阶项, 极限即 $\dfrac{e^x}{2e^x} = \dfrac{1}{2}$.

为使论证严格, 我们仿照有理函数的做法, 将分子、分母同除以最高阶的无穷大 e^x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 100x^{10} + \ln x}{2e^x + 500x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 100\frac{x^{10}}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}}{2 + 500\frac{x^2}{e^x}}.$$

由增长速度阶梯, 当 $x \to +\infty$ 时 $\frac{x^{10}}{e^x} \to 0$、$\frac{\ln x}{e^x} \to 0$、$\frac{x^2}{e^x} \to 0$, 故

$$\text{原式} = \frac{1 - 100(0) + 0}{2 + 500(0)} = \frac{1}{2}.$$

1.8.4 常见函数的极限图像分析

我们通过观察函数图像, 总结几类基本初等函数在无穷远处或定义域边界处的极限行为.

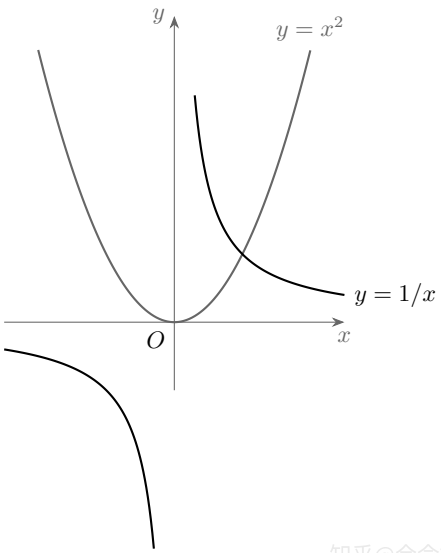
1.8.4.0.1　幂函数 $y = x^n$

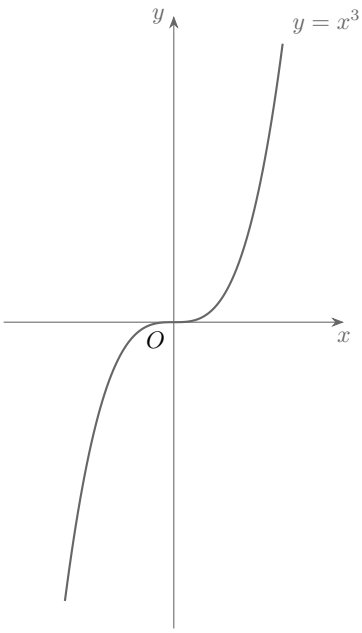
- 当 n 为**正整数**时, 图像向两侧无限延伸.

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ 为偶数}) \\ -\infty & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

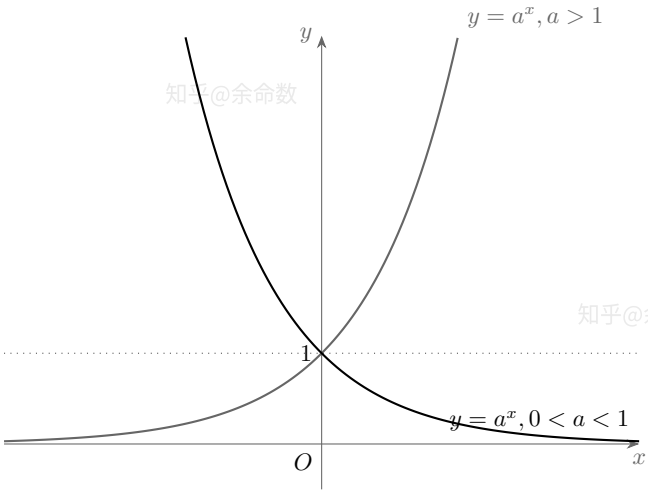




知乎@余命数

- 当 n 为**负整数**时, 如 $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 图像以 x 轴为水平渐近线.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \text{ 为正整数})$$



知乎@余命数

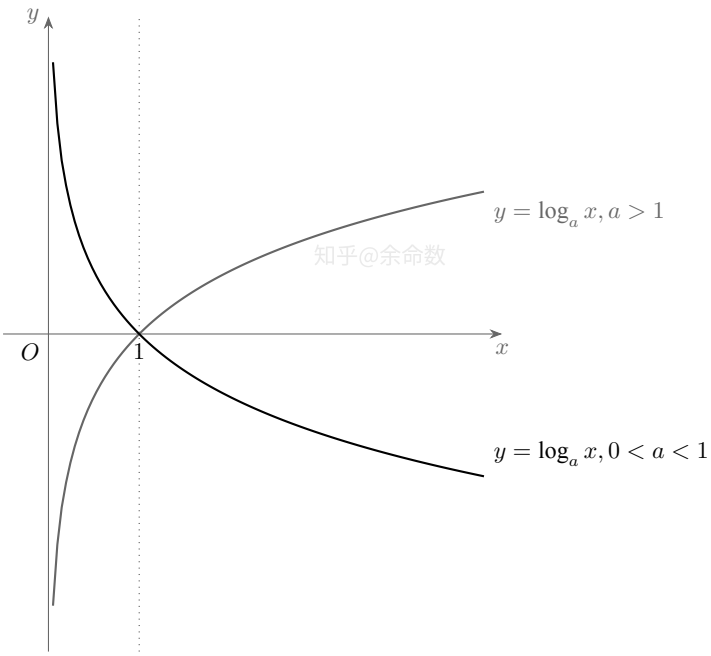
1.8.4.0.2 指数函数 $y = a^x$

- 当底数 $a > 1$ 时, 函数单调递增, 向右侧无限增长, 向左侧无限趋近于 0.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

- 当底数 $0<a<1$ 时, 函数单调递减, 向左侧无限增长, 向右侧无限趋近于 0.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$



知乎@余命数

1.8.4.0.3　对数函数 $y=\log_a x$

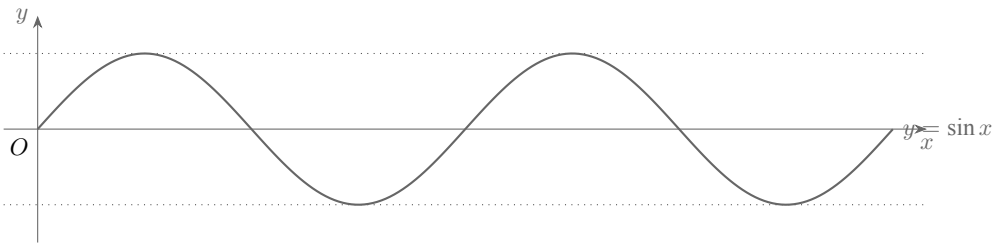
- 当底数 $a>1$ 时, 函数单调递增. 图像向右无限缓慢上升, 以 y 轴为垂直渐近线向下无限延伸.

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$$

- 当底数 $0<a<1$ 时, 函数单调递减. 图像向右无限缓慢下降, 以 y 轴为垂直渐近线向上无限延伸.

知乎@余命数

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$$



1.8.4.0.4 **三角函数** $y=\sin x, y=\cos x$ 从图像可见, 当 x 无限增大时, $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值在 -1 和 1 之间永无休止地**振荡**, 它们并不趋近于任何一个**确定的**常数.

$$\lim_{x\to+\infty}\sin x \text{ 不存在}, \quad \lim_{x\to+\infty}\cos x \text{ 不存在}$$

1.8.5 本节习题

1.31. 分析函数 $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2+x+1}$ 在 $x\to\pm\infty$ 处的渐近行为, 并绘制其函数图像的示意图.

1.32. 分析函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2-1}$ 的渐近线(包含水平与垂直渐近线), 并绘制其函数图像的示意图.

1.33. 分析函数 $f(x)=\sqrt{x^2+6x}-x$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限, 阐述其几何意义并绘制示意图.

1.34. 分析函数 $f(x)=\sqrt{x^2+6x}+x$ 在 $x\to-\infty$ 时的极限, 阐述其几何意义并绘制示意图.

1.35. 分析函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的渐近线, 并绘制其函数图像的示意图.

1.36. 分析函数 $f(x)=\dfrac{x^2+\cos x}{2x^2-\sin x}$ 的水平渐近线, 并绘制其示意图.

1.37. 分析函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 处的极限, 绘制示意图以展示其两条不同的水平渐近线.

1.38. 分析函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ 的水平渐近线, 并绘制示意图.

1.39. 分析函数 $f(x)=x(e^{1/x}-1)$ 的水平渐近线, 并绘制其示意图.

1.40. 分析函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ 的水平渐近线, 并绘制其示意图.

1.41. 分析函数 $f(x)=x+\arctan x$ 的渐近行为. 阐述该函数为何有两条不同的斜渐近线并求出其方程, 随后绘制示意图.

1.42. 求函数 $f(x)=\sqrt{4x^2+x}$ 的所有斜渐近线, 并绘制其示意图.

1.43. 确定常数 a,b 的值, 使得 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx}-(ax-1)\right)=3$, 并解释 a,b 取值背后的数学原理.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.44.　考虑函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2x}{x^{2n}+1}$, 其中 n 为正整数. 请分段写出 $f(x)$ 的解析式, 分析其间断点, 并绘制其函数图像的示意图.

1.9 导数的概念

在极限的帮助下, 我们终于可以触及一个在科学与哲学上困扰了人类近两千年的古老难题, 即如何精确地描述一个事物在**某一瞬间**的变化速度.

古希腊的芝诺悖论就说明了这一困境. 一支飞行的箭, 在任何一个确定的瞬间, 它都占据着一个确定的位置, 似乎是静止的. 那么, 它的运动究竟体现在哪里, 这个问题实质上是混淆了瞬间和时间段的区别. 在有限的时间段内, 可计算平均速度, 但在一个没有长度的瞬间, 速度的概念似乎失效了.

直到 17 世纪, 科学的发展迫切需要解决这一难题. 天文学家开普勒需要研究行星运动的瞬时速度, 物理学家伽利略需要描述落体在每一时刻的速度. 他们都遇到了同样的问题, 却只能用近似和模糊的语言来描述. 这一挑战最终由牛顿和莱布尼茨以相似的思路攻克.

1.9.1 牛顿与莱布尼茨的逼近思想

牛顿从物理学的视角出发, 关心物体的**瞬时速度**; 莱布尼茨则从几何学的视角入手, 醉心于曲线的**切线问题**. 尽管切入点不同, 他们都意识到面对的是同一个矛盾, 只能计算两点之间的量(平均变化率), 却想知道一点处的量, 即瞬时变化率. 直接计算会导致 $\frac{0}{0}$ 的困境.

他们的解决方法是, **既然无法直接到达那一点, 就用无限逼近来代替.**

我们跟随莱布尼茨的几何思路来重温这一过程.

1.9.1.0.1　从割线斜率出发　要研究曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 的倾斜程度, 无法直接下手, 可在曲线上另取一点 $Q(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$, 然后计算连接 P,Q 两点的**割线**的斜率. 这是一个简单的初中数学问题.

$$k_{\text{割线}}=\frac{\text{纵坐标之差}}{\text{横坐标之差}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

这个值, 代表了函数在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 这段区间内的**平均变化率**.

1.9.1.0.2　动态逼近的过程　接着, 让点 Q 沿着曲线向点 P 移动. 这个过程的实质, 就是让横坐标的增量 Δx 越来越小, 趋向于 0.

随着 $\Delta x\to 0$, 点 Q 无限逼近点 P, 连接它们的割线也在不断旋转. 其最终归宿, 就是那条在点 P 处与曲线相切的**切线**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

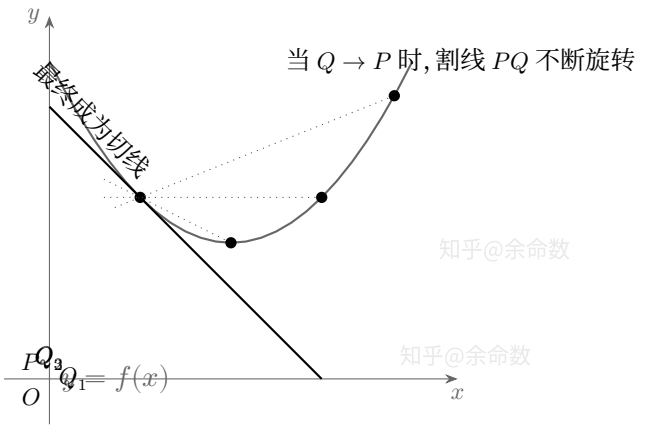


图 1.9 割线旋转逼近切线的过程

1.9.1.0.3 用极限锁定最终结果 割线的斜率 $k_{\text{割线}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在这个过程中不断变化. 它所无限逼近的那个**极限值**就是切线的斜率. 这一逼近思想绕开了 Δx 直接等于 0 的障碍, 不问当 $\Delta x = 0$ 时是什么, 只问当 $\Delta x \to 0$ 时比值的**极限**是什么.

$$k_{\text{切线}} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{割线}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

至此, 几何上的切线斜率问题和物理上的瞬时速度问题, 都通过这个统一的、基于极限的思想得到了解决.

1.9.2 导数的诞生

这个通过平均变化率求极限得到的瞬时变化率是一个基本而实用的概念, 数学家们给它取名为**导数**.

定义 1.19 (函数在一点的导数) 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**导数** $f'(x_0)$, 定义为函数在该点的平均变化率当自变量增量趋于零时的极限, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1-10}$$

如果这个极限存在, 我们就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是**可导的**.

注 1.7 (导数的三种意义)

- **几何意义**. $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处**切线的斜率**.
- **物理意义**. 如果 $s(t)$ 是位移关于时间的函数, 那么 $s'(t_0)$ 就是物体在时刻 t_0 的**瞬时速度**.
- **一般意义**. 导数 $f'(x_0)$ 衡量了函数 $f(x)$ 在点 x_0 处变化的**快慢程度**, 是函数的**瞬时变化率**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.9.3 用定义求导

我们把求瞬时变化率这个模糊的想法精确地固化为导数的极限定义.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

知乎@余命数

这就是导数的定义. 接下来运用它, 实际计算一个函数的导数.

下面沿着早期微积分先驱的思路, 不借助现成的求导公式, 仅凭极限的定义计算一些简单函数的导数. 这一过程会使导数的瞬时变化率含义更加具体.

注 1.8 (用定义求导)
根据导数的定义, 求解函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的过程分为三步.

1. **求增量**. 计算当自变量从 x 变为 $x+\Delta x$ 时, 函数值的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.
2. **作商**. 计算平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 这一步要进行代数化简, 尤其是通过因式分解、有理化等技巧, **约分掉分母中的** Δx, 从而消除 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{0}{0}$ 的不定形式.
3. **取极限**. 计算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 所得的结果就是导函数 $f'(x)$.

知乎@余命数

例题 1.36　求函数 $f(x)=c$(c 为常数)的导数.

知乎@余命数

解　这是一个最简单的例子. 它代表了一条水平直线, 直觉上认为它的变化率(斜率)处处为 0.

求增量

知乎@余命数

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$$

知乎@余命数

作商当 $\Delta x\neq 0$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

取极限

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

于是 $(c)'=0$, 印证了直觉, 常数函数没有变化, 其瞬时变化率恒为零.

例题 1.37　求函数 $f(x)=x^2$ 的导数.

解　这是第一个非线性函数, 它的倾斜程度是随 x 变化的.

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\text{求增量}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=(x+\Delta x)^2-x^2\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

知乎@余命数

作商 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \quad \text{(关键一步:提取公因式并约分)}$$
$$= 2x + \Delta x$$

知乎@余命数

这里的差商只在 $\Delta x \neq 0$ 时讨论,因而上述约分是合法的.

取极限 $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$
$$= 2x$$

于是 $(x^2)' = 2x$. 这个基本结果表明,抛物线 $y = x^2$ 在任意一点 x 处的切线斜率恰好是该点横坐标的两倍. 例如在 $x = 1$ 处斜率为 2, 在 $x = -3$ 处斜率为 -6. 导数本身是一个新的函数.

知乎@余命数

例题 1.38 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的导数.

解 这个例子需要运用分式通分的技巧. 以下计算在 $x \neq 0$ 处进行, 且取 Δx 足够小时有 $x + \Delta x \neq 0$.

知乎@余命数

知乎@余命数

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \quad \text{(通分)}$$
$$= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$
$$= \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$$
$$= \frac{-1}{x(x + 0)} = -\frac{1}{x^2}$$

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是当 $x \neq 0$ 时, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

以上例子表明, 导数的定义本身蕴含着实用的计算能力. 然而这一过程虽然逻辑清晰, 对于稍复杂一点的函数(比如 $f(x) = x^5$ 或 $f(x) = \sin x$), 代数变形将变得异常繁琐.

这正是数学家们曾经面临的困境. 为摆脱每次都从极限定义出发的低效做法, 他们基于定义推导出了一系列普适的、可以直接使用的**求导法则与公式**.

1.9.4 基本求导公式的诞生

知乎@余命数

1.9.4.1 来龙去脉

在上一节中, 我们用导数定义直接计算了导数. 这个过程虽然严谨, 但对每一个新函数都必须重复一遍复杂的极限运算, 无疑是低效的. 正如我们不会每次计算乘法都去重复地做加法一样, 数学家们也渴望拥有更直接、更高效的求导工具.

这一节的任务是进行最后一次艰苦的劳动, 利用导数的极限定义, 系统地推导出高中阶段遇到的所有基本初等函数的导数. 一旦这些**基本求导公式**建立起来, 套用它们就能替代每次重复的极限计算, 把繁琐的运算压缩成可以直接使用的结论.

在处理三角函数、指数函数与对数函数的求导之前, 要先解决两个以 $\frac{0}{0}$ 或 1^∞ 形式出现的特定极限, 直接使用极限的四则运算法则对它们无能为力. 这两个极限就是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad 和 \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

它们沟通了代数与超越函数世界. 为了攻克它们, 必须先掌握一个直观且实用的极限法则, 即三明治定理.

1.9.4.2 三明治定理 *(选读内容)

引理 1.3 如果在点 x_0 的某个去心邻域内, 有三个函数 $g(x), f(x), h(x)$ 始终满足

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

并且, $g(x)$ 与 $h(x)$ 的极限存在且相等

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

那么, 被夹在中间的 $f(x)$ 的极限也必然存在, 且等于 L:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

知乎@余命数

证明 现证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$. 根据极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义, 需证明

> 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在实数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 恒成立.

由已知条件, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$, 即对上述给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时 $|g(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$. 同理, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$, 即对同一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_2>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时 $|h(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$. 又已知 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内成立, 设其半径为 $\delta_3>0$.

接着, 让这三个条件同时生效, 需选取使 x 同时位于三个邻域之内的范围. 取

$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3),$$

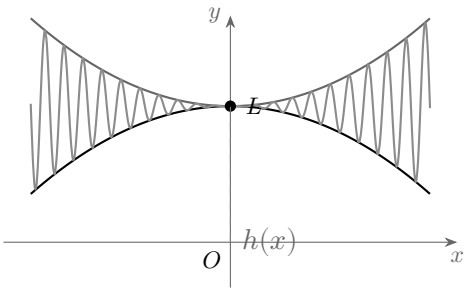
由 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 均为正知 $\delta>0$.

考察任一满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x, 上述三个条件同时成立, 串联起来, 由条件 1 有 $L-\varepsilon<g(x)$, 由条件 3 有 $g(x)\le f(x)$, 故 $L-\varepsilon<g(x)\le f(x)$; 又由条件 3 有 $f(x)\le h(x)$, 由条件 2 有 $h(x)<L+\varepsilon$, 故 $f(x)\le h(x)<L+\varepsilon$. 合并左右两半得不等式链 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$, 即 $|f(x)-L|<\varepsilon$.

至此, 已证明, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 已找到 $\delta>0$, 即 $\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$.

这完全符合极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义.

证毕. □

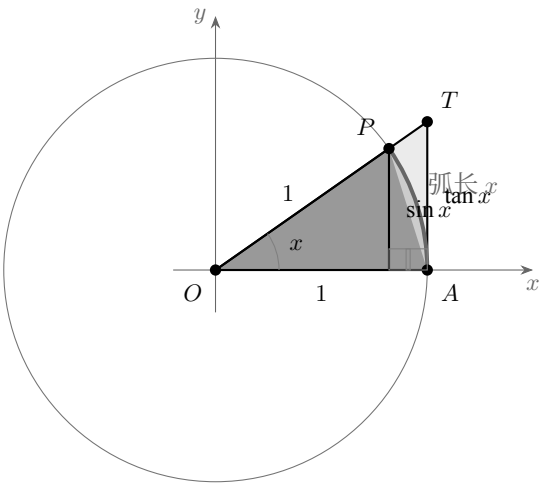


这个定理的直观意义是, 如果一个函数被另外两个在某点收敛于同一值的函数夹住, 那么它只能收敛到同一个值.

例题 1.39 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

解 这个极限的证明是三明治定理最经典的几何应用. 考虑在单位圆中, 一个很小的正角 x(弧度制).

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



比较图中三角形、扇形与大三角形三块区域的面积, 得

$$\text{面积}(\triangle OAP) < \text{面积}(\text{扇形}OAP) < \text{面积}(\triangle OAT)$$

分别计算这三个面积(单位圆中半径 $r=1$), 得

- 面积 $(\triangle OAP) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x$
- 面积 $(\text{扇形}OAP) = \frac{1}{2}r^2 x = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{1}{2}x$
- 面积 $(\triangle OAT) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AT| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2}\tan x$

代入面积不等式, 并同乘以 2, 得

$$\sin x < x < \tan x$$

因为考虑的是一个很小的正角 $x \to 0^+$, 所以 $\sin x > 0$. 将不等式同除以 $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

取倒数, 不等号反向, 得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

至此夹逼的结构已经形成, 考察两侧函数的极限, 得

$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

根据三明治定理, 被夹在中间的函数极限也必须是 1, 即

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

对于 $x\to 0^-$ 的情况, 由于 $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}$ 是一个偶函数, 其左极限等于右极限. 因此, 证得第一个重要极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1-11}$$

第二个重要极限的推导, 更像是一个发现与定义的过程. 它源于对复利问题的思考.

假设银行年利率为 100

- 如果每年计息一次, 一年后本利和为 $1\times(1+1)=2$ 元.
- 如果每半年计息一次, 一年后本利和为 $1\times(1+\frac{1}{2})^2=2.25$ 元.
- 如果每月计息一次, 一年后本利和为 $1\times(1+\frac{1}{12})^{12}\approx 2.613$ 元.
- 如果每天计息一次, 一年后本利和为 $1\times(1+\frac{1}{365})^{365}\approx 2.715$ 元.

可见, 随着计息周期越来越短, 即计息次数 n 越来越大, 本利和 $(1+\frac{1}{n})^n$ 似乎在逼近一个确定的数值. 数学家们证明了这个极限确实存在, 并把这个极限值定义为一个基本的无理数, 即**自然常数** e.

定义 1.20 (自然常数 e) 自然常数 e 定义为当 n 趋于无穷时, 表达式 $(1+\frac{1}{n})^n$ 的极限值.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2.71828\ldots \tag{1-12}$$

严格证明还需说明当连续变量趋于无穷时 $(1+\frac{1}{t})^t$ 也趋于同一个数 e. 在这个结论基础上, 令 $x=\frac{1}{t}$, 则当 $t\to\infty$ 时 $x\to 0^+$, 再结合左侧极限可得到第二个重要极限.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \tag{1-13}$$

这两个重要极限, 是后续求导推导的必备工具.

1.9.4.3 幂函数 $f(x)=x^n$ (n 为正整数)

这是最重要、最基础的求导公式. 推导它的要点是二项式定理 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}\Delta x + C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots) - x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots}{\Delta x} \quad (\text{因为} C_n^0 = 1, C_n^1 = n)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots\right)
\end{aligned}
$$

当 $\Delta x \to 0$ 时, 除了第一项 nx^{n-1} 外, 所有其余项都含有 Δx 因子, 因此它们的极限都为 0.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

上面的二项式推导证明了正整数指数情形. 更一般地, 在相应可导定义域内, 幂函数公式对实数指数也成立, 例如我们之前求过的 $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$ 和 $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ 都符合该规律.

1.9.4.4 三角函数 $f(x) = \sin x$

推导三角函数的导数, 需要用到一个重要的极限 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$. 以及和差化积公式 $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (\text{凑重要极限的形式})
\end{aligned}
$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$ 且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, 于是得

$$(\sin x)' = \cos x$$

同理可证(作为练习).

$$(\cos x)' = -\sin x$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.9.4.5 指数函数 $f(x)=a^x$

推导指数函数的导数, 需要用到另一个重要的极限, 它与自然对数的底 e 有关, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$.

$$\begin{aligned}(a^x)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\\&=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\end{aligned}$$

根据重要极限的定义, 得

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

当底数是特殊的 e 时, 由于 $\ln e=1$, 得最简洁的求导公式

$$(e^x)'=e^x$$

这个函数 e^x 的特殊之处在于, 它在任意一点的变化率恰好等于它在该点本身的函数值.

1.9.4.6 对数函数 $f(x)=\log_a x$

这是推导中技巧性最强的一个, 它需要用到对数运算法则以及 e 的极限定义 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

$$\begin{aligned}(\log_a x)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)\quad(\text{利用}c\log A=\log A^c)\end{aligned}$$

为了凑出 e 的定义, 我们进行代换, 令 $t=\frac{\Delta x}{x}$, 则 $\Delta x=xt$, 当 $\Delta x\to 0$ 时 $t\to 0$.

$$\begin{aligned}(\log_a x)'&=\lim_{t\to 0}\log_a\left((1+t)^{\frac{1}{xt}}\right)=\lim_{t\to 0}\log_a\left(\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\\&=\log_a\left(\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\quad(\text{对数函数连续, 极限可以进到内部})\\&=\log_a\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x}\log_a e\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用对数的换底公式 $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$, 得最终结果

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

同样, 当底数是 e 时, 由于 $\ln a = \ln e = 1$, 得一个非常简洁的形式

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

经过这一系列推导, 即得基本求导公式, 汇总如下表.

阅读提示

函数	导数
$f(x) = c$(常数)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$($n \in \mathbb{R}$, 在相应定义域内)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

至此已有一张基本求导公式表, 它在求导中的作用正如算术中的乘法口诀表. 接下来需要学习如何运用这些基本公式, 去处理由它们通过加、减、乘、除等运算组合而成的更复杂的函数.

告别了每次都要从极限定义出发的低效做法, 我们进入高效的公式化阶段. 首先学习求导运算中最基础的两个法则.

知乎@余命数

阅读提示

设函数 $f(x), g(x)$ 均可导, c 为常数, 则:

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1. **常数倍法则**

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

求导时, 常数系数可以原封不动地提到导数符号外面.

2. **加减法则**

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

和的导数等于导数的和, 差的导数等于导数的差. 即可以将复杂的函数拆开, 逐项求导, 最后再合并结果.

知乎@余命数

证明 (常数倍法则的证明) 令 $h(x) = c \cdot f(x)$, 并利用导数的定义来求 $h'(x)$.

根据导数的定义, 得

$$\begin{aligned}
[c \cdot f(x)]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x+\Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot [f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \quad (\text{在分子中提取公因式} c) \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{利用极限的常数倍运算法则}) \\
&= c \cdot f'(x) \quad (\text{根据} f'(x) \text{ 的定义})
\end{aligned}$$

这就证明了常数系数在求导时可以被直接提到求导符号的外面. □

知乎@余命数

证明 (加减法则的证明 (以加法为例)) 令 $h(x) = f(x) + g(x)$, 并利用导数的定义来求 $h'(x)$.

根据导数的定义, 得

$$\begin{aligned}
[f(x) + g(x)]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}
\end{aligned}$$

重新组合分子中的项, 得

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

知乎@余命数

将分数拆分成两部分, 并利用极限的加法运算法则, 得

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

最后, 根据 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 的定义, 得

$$= f'(x) + g'(x)$$

和的导数等于导数的和得证. 减法法则的证明过程完全类似, 只需将上述过程中的加号替换为减号即可. □

结合基本求导公式和这两个运算法则, 已能够解决一大类常见函数的求导问题了.

例题 1.40　求多项式函数 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ 的导数.

解

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x^3 - 5x^2 + 7x - 1)' \\
&= (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' - (1)' && \text{(利用加减法则, 逐项求导)} \\
&= 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x^1)' - (1)' && \text{(提出常数系数)} \\
&= 2(3x^2) - 5(2x) + 7(1) - 0 && \text{(套用幂函数和常数求导公式)} \\
&= 6x^2 - 10x + 7 && \text{(最后化简整理)}
\end{aligned}$$

这是求导运算中最基本的应用, 一个复杂的多项式求导被分解为一系列简单的幂函数求导的组合.

例题 1.41　求函数 $y = 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$ 在定义域 $x > 0$ 上的导数.

解 要点是将所有项都改写为幂函数 x^n 的形式. 以下在函数定义域 $x > 0$ 内求导.

$$y = 3x^{1/2} - 2x^{-2}$$

接着, 可像处理多项式一样来求导, 得

$$\begin{aligned}
y' &= (3x^{1/2} - 2x^{-2})' \\
&= (3x^{1/2})' - (2x^{-2})' \\
&= 3(x^{1/2})' - 2(x^{-2})' \\
&= 3\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right) - 2\left(-2x^{-2-1}\right)
\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= \frac{3}{2}x^{-1/2} - (-4)x^{-3}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}$$

知乎@余命数（应用幂函数公式时，指数为小数和负数要格外小心；最后将结果写回根式与分式形式更清晰.）

例题 1.42 求函数 $f(x) = 4\cos x + e^x - \ln 2$ 的导数.

解 这个例子混合了三角函数、指数函数和一个常数项（$\ln 2$ 是一个常数）.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4\cos x + e^x - \ln 2)' \\ &= (4\cos x)' + (e^x)' - (\ln 2)' \\ &= 4(\cos x)' + (e^x)' - (\ln 2)' \\ &= 4(-\sin x) + e^x - 0 \quad \text{(套用三角函数、指数函数和常数求导公式)} \\ &= -4\sin x + e^x \end{aligned}$$

可见，掌握了基本求导公式和加减、数乘运算法则后，已经能够处理任何由基本函数加减组合而成的函数.

但现实世界中的函数关系远比这复杂，函数还会相乘、相除，比如 $f(x) = x^2\sin x$，或者相互复合，如 $y = \sin(2x+1)$.

对于这些情况，简单的加减法则已无能为力，还需要**乘法法则、除法法则和链式法则**.

1.9.5 乘、除、复合求导法则

1.9.5.1 三大运算法则

阅读提示

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处均可导.

1. **乘法法则**

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

用语言说，两函数乘积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第一个函数乘以第二个函数的导数.

知乎@余命数

2. **除法法则**

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \quad (v(x) \neq 0)$$

用语言说, 两函数商的导数, 等于分子的导数乘以分母, 减去分子乘以分母的导数, 所得的差再除以分母的平方.

3. **链式法则**设函数 $y = f(u)$ 的自变量 u 本身是另一个关于 x 的函数 $u = g(x)$, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 对 x 的导数为

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

用语言说, 复合函数的导数, 等于外层函数对内层函数求导, 乘以内层函数对自变量求导.

1.9.5.1.1　链式法则的莱布尼茨表示　莱布尼茨符号把链式法则书写为:若记 $y = f(u), u = g(x)$, 则链式法则写作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

此形式在结构上酷似分数的约分, 非常直观. 它提醒我们, 导数的传递过程是逐层相乘.

知乎@余命数　　知乎@余命数

这些法则均可由导数的极限定义严格推导.

1.9.5.2　乘法法则的证明

证明的要点在于构造项, 即添一项, 减一项的技巧.

$$\begin{aligned}
[u(x)v(x)]' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) \\
&\qquad + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\Big) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\, v(x+\Delta x)\right. \\
&\qquad \left. + u(x)\,\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x)\right)
\end{aligned}$$

知乎@余命数

$$+u(x)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)$$

由于函数 $v(x)$ 可导则必然连续,所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$. 其余两项分别是 $u'(x)$ 和 $v'(x)$ 的定义. 因此,

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

证毕.

1.9.5.3 除法法则的证明

证明过程与乘法法则类似, 首先对分数作差进行通分, 再应用构造项的技巧.

$$\begin{aligned}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x)v(x+\Delta x)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x\cdot v(x)v(x+\Delta x)}\Big(u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)\\&\qquad+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)\Big)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x)\right.\\&\qquad\left.-u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)\\&=\frac{1}{[v(x)]^2}[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]\end{aligned}$$

证毕.

1.9.5.4 链式法则的证明

链式法则的严格证明涉及对内层函数增量是否为零的讨论,过程较为精细,证明从略, 以下关注其应用.

1.9.6 三大法则的应用与实战

1.9.6.1 识别最外层结构

掌握了这三个基本法则后,由基本初等函数构成的任意复杂函数都能求导,关键在于**准确识别函数最外层的代数结构**.

最外层是两个函数**相乘**的, 应用乘法法则; **相除**的, 应用除法法则; 一个函数**复合**另一个函数的, 应用链式法则. 施加法则时, 如果遇到某个组成部分需要求导,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再对该部分重复这个识别过程，直至所有求导问题都化归为基本求导公式. 这个过程可以看作是一个递归分析的过程.

例题 1.43 (乘法法则) 求函数 $f(x) = x^2 \sin x$ 的导数.

解 结构分析. 函数 $f(x)$ 是 $u(x) = x^2$ 与 $v(x) = \sin x$ 的**乘积**. 因此，首要应用乘法法则.

根据乘法法则 $[uv]' = u'v + uv'$：

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' \\ &= (2x) \cdot \sin x + x^2 \cdot (\cos x) \\ &= 2x \sin x + x^2 \cos x \end{aligned}$$

例题 1.44 (除法法则) 求函数 $y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ 的导数.

解 结构分析. 函数 y 是 $u(x) = e^x$ 与 $v(x) = x^2 + 1$ 的**商**. 应用除法法则.

根据除法法则 $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$：

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x)'(x^2+1) - e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

在分子上提取公因式 e^x 使表达式更为清晰，这是一个良好的代数习惯.

例题 1.45 (链式法则) 求函数 $y = \cos(x^3 - 4x)$ 的导数.

解 结构分析. 函数 y 的结构是 $\cos(\cdot)$ 函数**复合**一个多项式 $x^3 - 4x$. 这是一个典型的复合函数，必须使用链式法则，从外层向内层逐层处理.

- 外层函数为 $y = \cos(u)$
- 内层函数为 $u = x^3 - 4x$
- 外导，即 y 对 u 求导，$\dfrac{dy}{du} = (\cos u)' = -\sin u$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 内导, 即 u 对 x 求导, $\dfrac{du}{dx} = (x^3 - 4x)' = 3x^2 - 4$

  根据链式法则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (-\sin u) \cdot (3x^2 - 4) \\ &= -\sin(x^3 - 4x) \cdot (3x^2 - 4) \\ &= -(3x^2 - 4)\sin(x^3 - 4x)\end{aligned}$$

(最后一步必须将中间变量 u 换回关于 x 的表达式.)

例题 1.46 (多层复合) 求函数 $f(x) = \ln(\sin(e^{x^2}))$ 的导数.

解 这是一个典型的多层复合函数, 结构层次清晰, 需要从最外层开始, 逐层向内求导, 并将每一层的导数相乘. 以下计算均在函数有定义的点进行.

层次分解我们把这个函数分解为四层.

- 最外层为 $y = \ln(u)$
- 第二层为 $u = \sin(v)$
- 第三层为 $v = e^w$
- 最内层为 $w = x^2$

逐层求导并应用链式法则根据链式法则 $[f(g(h(k(x))))]' = f' \cdot g' \cdot h' \cdot k'$, 有

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sin(e^{x^2})} \cdot [\sin(e^{x^2})]' \\ &= \frac{1}{\sin(e^{x^2})} \cdot \cos(e^{x^2}) \cdot [e^{x^2}]' \quad \text{(对第二层求导)} \\ &= \frac{\cos(e^{x^2})}{\sin(e^{x^2})} \cdot e^{x^2} \cdot [x^2]' \quad \text{(对第三层求导)} \\ &= \cot(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot (2x) \quad \text{(对最内层求导)}\end{aligned}$$

整理, 得最终结果

$$f'(x) = 2xe^{x^2}\cot(e^{x^2})$$

例题 1.47 求函数 $y = x^3\sqrt{1 - x^2}$ 的导数.

解 函数在 $-1 < x < 1$ 内可导. 其**最外层结构**是两个部分 $u(x) = x^3$ 和 $v(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 的**乘积**. 因此, 须首先应用乘法法则. 计算 $v'(x)$ 时, 需要应用链式法则.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据乘法法则 $y'=u'v+uv'$, 先写出求导框架

$$y'=(x^3)'\sqrt{1-x^2}+x^3(\sqrt{1-x^2})'$$

第一部分导数很简单.

$$(x^3)'=3x^2$$

第二部分 $(\sqrt{1-x^2})'$ 需要使用链式法则. 将根式写为幂函数形式 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. 外层函数是 $w^{\frac{1}{2}}$, 内层函数是 $w=1-x^2$.

$$(\sqrt{1-x^2})'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

知乎@余命数

将各部分代入乘法法则的框架中, 得

$$\begin{aligned}y'&=3x^2\sqrt{1-x^2}+x^3\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\&=3x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

知乎@余命数

为了得到更简洁的形式, 进行通分, 得

$$\begin{aligned}y'&=\frac{3x^2(1-x^2)-x^4}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{3x^2-3x^4-x^4}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{3x^2-4x^4}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^2(3-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

例题 1.48　求函数 $f(x)=\frac{x^2e^{2x}}{\ln(x^2+1)}$ 的导数.

解　此函数在 $x\neq 0$ 时有定义, 最外层结构是**商**, 因此主框架是除法法则. 然而, 分子 $u(x)=x^2e^{2x}$ 本身是一个**乘积**, 求其导数需要乘法法则. 分子中的 e^{2x} 和分母 $v(x)=\ln(x^2+1)$ 求导则需要**链式法则**.

令 $u(x)=x^2e^{2x}$, $v(x)=\ln(x^2+1)$. 先求出 $u'(x)$ 和 $v'(x)$.

求 $u'(x)$(应用乘法法则):

$$\begin{aligned}u'(x)&=(x^2)'e^{2x}+x^2(e^{2x})'\\&=2x\cdot e^{2x}+x^2\cdot(e^{2x}\cdot 2)\quad(\text{对}e^{2x}\text{ 应用链式法则})\\&=2xe^{2x}(1+x)\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

求 $v'(x)$(应用链式法则):

$$v'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{2x}{x^2+1}$$

接着,将 u,v,u',v' 代入除法法则 $\left[\frac{u}{v}\right]'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{[2xe^{2x}(1+x)]\cdot\ln(x^2+1)-(x^2e^{2x})\cdot\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)}{[\ln(x^2+1)]^2}\\&=\frac{2xe^{2x}\left((1+x)\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{[\ln(x^2+1)]^2}\end{aligned}$$

例题 1.49 求函数 $g(x)=\left(\ln(x\sin^2 x)\right)^3$ 的导数.

解 复合结构由外到内依次为 u^3、$\ln v$、$v=x\sin^2 x$、以及 w^2 $(w=\sin x)$. 在 $x\sin^2 x>0$ 的定义域内,

$$g'(x)=3\big(\ln(x\sin^2 x)\big)^2\cdot\frac{1}{x\sin^2 x}\cdot(x\sin^2 x)'.$$

由乘法法则与链式法则,

$$(x\sin^2 x)'=\sin^2 x+x\cdot 2\sin x\cdot\cos x=\sin^2 x+x\sin(2x).$$

代回得

$$g'(x)=\frac{3(\sin^2 x+x\sin(2x))}{x\sin^2 x}\big(\ln(x\sin^2 x)\big)^2.$$

例题 1.50 求函数 $y=(x^2+1)^{\ln x}$ 的导数.

解 函数形式为 $f(x)^{g(x)}$,底数和指数均为变量,必须使用对数求导法.

$$\ln y=\ln((x^2+1)^{\ln x})=(\ln x)\cdot\ln(x^2+1)$$

左边应用链式法则,右边应用乘法法则.

$$(\ln y)'=[(\ln x)\cdot\ln(x^2+1)]'$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=(\ln x)'\cdot\ln(x^2+1)+(\ln x)\cdot(\ln(x^2+1))'$$

分别计算右侧的导数,得

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

代回方程, 得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ln(x^2+1) + (\ln x)\frac{2x}{x^2+1}$$

将 y 乘到右边, 并代入其原始表达式, 得

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \frac{2x\ln x}{x^2+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^{\ln x}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \frac{2x\ln x}{x^2+1}\right)$$

知乎@余命数

例题 1.51　求函数 $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$ 的导数.

解　直接对复合式求导会陷入冗长的商法则与链式法则, 宜先化简对数内部. 分子有理化, 得

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{(x^2+1)-x^2} = (\sqrt{x^2+1}-x)^2.$$

知乎@余命数

故 $f(x) = \ln((\sqrt{x^2+1}-x)^2) = 2\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$. 求导, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

知乎@余命数

若不化简而直接求导, 令 $u = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{u}u' = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)'.$$

记 $P = \sqrt{x^2+1}-x, Q = \sqrt{x^2+1}+x$, 则

知乎@余命数

$$P' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1, \qquad Q' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1.$$

知乎@余命数

由商法则 $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q-PQ'}{Q^2}$:

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)'$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)(\sqrt{x^2+1}+x)-(\sqrt{x^2+1}-x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{\frac{x(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}}-(\sqrt{x^2+1}+x)-\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}}-(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{\frac{x\sqrt{x^2+1}+x^2-x\sqrt{x^2+1}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}-(\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}-2\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{\frac{2x^2-2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{\frac{2x^2-2x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)^2}
\end{aligned}
$$

将这个复杂的结果代回 $f'(x)$ 的表达式, 得

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x^2+1}-x)\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)]} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}[(x^2+1)-x^2]} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}[1]} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

虽然最终也能化简到 $-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, 但过程的繁琐程度和出错风险远高于法一.

可见, 面对含嵌套分式或根式的结构时, 先化简再求导通常更稳妥. 直接套用商法则与链式法则虽然可行, 但计算量大、出错风险高.

例题 1.52 (综合应用) 求函数 $y = e^{-x}\ln(x^2)$ 的导数.

解 结构分析. 此函数在 $x \neq 0$ 时有定义, 最外层的结构是 e^{-x} **乘以** $\ln(x^2)$, 因此首要步骤是应用**乘法法则**. 在计算乘法法则的各个部分时, 可见 $(e^{-x})'$ 和 $(\ln(x^2))'$ 需要用到**链式法则**.

知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

应用乘法法则, 先写出框架

$$y' = (e^{-x})' \ln(x^2) + e^{-x}(\ln(x^2))'$$

接着, 分别计算两个需要链式法则求导的部分, 得

- 求 $(e^{-x})'$: 外层为 e^u, 内层为 $u = -x$. 导数为 $e^u \cdot u' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$.
- 求 $(\ln(x^2))'$: 外层为 $\ln u$, 内层为 $u = x^2$. 导数为 $\dfrac{1}{u} \cdot u' = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x}$.

知乎@余命数

最后, 将计算结果代回乘法法则的框架中, 得

知乎@余命数

$$\begin{aligned} y' &= (-e^{-x}) \cdot \ln(x^2) + e^{-x} \cdot \left(\frac{2}{x}\right) \\ &= e^{-x}\left(\frac{2}{x} - \ln(x^2)\right) \end{aligned}$$

注 1.9 (常见错误与关键技巧)

- **混淆运算法则**
  一个根本性错误是将乘法或除法法则误用为线性法则, 例如认为 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v'(x)$. 必须明确, 导数运算对于乘法和除法不具有这种简单的分配性质.
- **链式法则遗漏内导**
  这是应用链式法则时最频发的错误, 即**只对外层函数求导, 而忘记乘以内层函数的导数**.
  例如, 将 $(\sin(2x))'$ 错误地计算为 $\cos(2x)$.
  正确过程 $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot (2x)' = 2\cos(2x)$. 内层的导数是链条中必要的一环.
- **复合层次识别不清**
  对于 $y = \sin^3 x$, 其真实结构是 $y = (\sin x)^3$. 最外层是**幂函数** u^3, 内层是三角函数 $u = \sin x$.
  求导 $y' = 3(\sin x)^{3-1} \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$.
  而对于 $y = \sin(x^3)$, 最外层是**正弦函数** $\sin u$, 内层是幂函数 $u = x^3$.
  求导 $y' = \cos(x^3) \cdot (x^3)' = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2\cos(x^3)$.
- **先化简, 再求导**
  在启动复杂的求导法则之前, 应先审视函数表达式是否可以化简. 例如, 对函数 $y = \ln(e^{2x})$ 求导, 若直接使用链式法则, 则 $y' = \frac{1}{e^{2x}} \cdot (e^{2x})' = \frac{1}{e^{2x}} \cdot 2e^{2x} = 2$. 若先化简 $y = \ln(e^{2x}) = 2x$, 则 $y' = 2$, 过程更为简捷.

1.9.7 求导技巧选讲 *

知乎@余命数

至此, 已构建一套实用的、普适的求导法则体系. 对于任何能明确写成 $y = f(x)$ 形式的函数, 似乎都能通过乘法、除法与链式法则解决. 然而数学的世界充满了更多奇特的结构:

- 当一个函数的结构是幂的幂或者一长串的乘积时, 比如 $y = \dfrac{\sqrt{x+1}(x-2)^3}{(x+5)^4}$, 直接使用乘除法和链式法则会非常繁琐.

- 当函数关系隐藏在一个方程中, 比如圆的方程 $x^2+y^2=25$, 就需要另想办法求出曲线上任意一点的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$.

1.9.7.1 取对数求导法

在处理导数问题时, 若函数表达式呈现变量的变量次幂或多项因子的乘除开方结构, 常规的求导法则往往导致运算冗杂. 取对数求导法利用对数运算将乘除转化为加减、将幂转化为乘积的代数性质, 从而简化求导结构.

注 1.10 (取对数求导法)
设 $y=f(x)$ 在某个区间上满足 $f(x)\neq 0$(幂指结构 $u(x)^{v(x)}$ 还要求 $u(x)>0$). 若 f 的表达式由多项因子的积、商或幂指结构构成, 可按如下路径求导:

1. 考虑等式两边绝对值的自然对数 $\ln|y|=\ln|f(x)|$;
2. 利用对数性质展开右端, 将其化为各项的代数和;
3. 视 y 为 x 的函数, 两边对 x 求导, 左端应用链式法则得到 $\frac{y'}{y}$;
4. 解出 y', 即 $y'=y\cdot[\ln|f(x)|]'$.

例题 1.53 求幂指函数 $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ 的导数.

解 观察函数结构, 底数 x 与指数 $\sin x$ 均随变量变化, 既非单纯的幂函数也非指数函数, 无法直接套用基本公式. 考虑引入对数以分离底数与指数.

在 $x>0$ 的假设下, 两边取自然对数, 得

$$\ln y=\ln(x^{\sin x})=\sin x\cdot\ln x$$

此时, 复杂的幂指关系转化为三角函数与对数函数的乘积.

方程两边对 x 求导. 左边应用链式法则, 右边应用乘法法则, 得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'$$

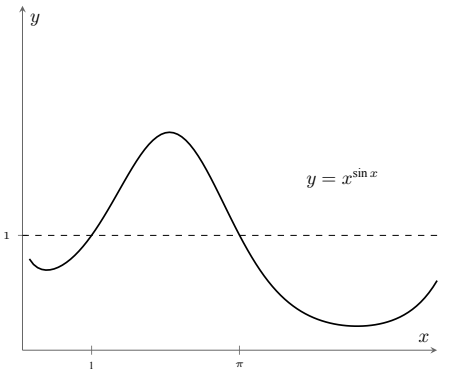
即

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

将 $y=x^{\sin x}$ 代回整理, 得最终结果

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

知乎@余命数



知乎@余命数

例题 1.54　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}(x-2)^3}{(x+5)^4}$ 的导数.

解　此函数由三个代数式的幂通过乘除构成. 若直接使用商的求导法则, 分子部分需嵌套乘法法则, 且涉及根式求导, 计算路径冗长. 利用对数性质将运算线性化更加自然.

先在 $x>-1$ 且 $x\neq 2$ 的区域考察绝对值的对数, 利用 $\ln(abc)=\ln a+\ln b+\ln c$ 及 $\ln(a^n)=n\ln a$ 展开, 得

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \ln\left|\frac{(x+1)^{1/2}(x-2)^3}{(x+5)^4}\right| \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1|+3\ln|x-2|-4\ln|x+5|\end{aligned}$$

两边同时对 x 求导. 注意 $\frac{d}{dx}(\ln|u|)=\frac{u'}{u}$, 运算被简化为简单的分式求和, 得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+5}$$

最后解出 y', 即用原函数表达式乘以对数导数项, 得

$$y'=\frac{\sqrt{x+1}(x-2)^3}{(x+5)^4}\left[\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+5}\right]$$

该式适用于 $x>-1$ 且 $x\neq 2$. 当 $x=2$ 时, 原函数可写为 $y=A(x)(x-2)^3$, 其中 $A(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+5)^4}$ 在 $x=2$ 附近可导, 故 $y'(2)=0$.

通过这种变换, 原本需要多重嵌套法则的运算被分解为独立的对数求导, 结构清晰且易于检验.

知乎@余命数
知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.9.7.2 隐函数求导法

当 x 和 y 的关系由一个方程 $F(x,y)=0$ 确定, 而没有, 或很难写成 $y=f(x)$ 的形式时, 我们就称这个关系定义了一个**隐函数**. 求这种函数的导数, 需要直接在方程上操作.

注 1.11 (隐函数求导法要点)
将方程中的 y 看作是 x 的一个未知函数 $y(x)$. 然后, 将方程两边**同时对 x 求导**. 在这个过程中, 凡是遇到与 y 相关的项, 都要应用**链式法则**. 最后, 从得到的方程中解出 y'.

例题 1.55 求由圆的方程 $x^2+y^2=25$ 所确定的函数在任意点 (x,y) 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 这是典型的隐函数. 将方程两边同时对 x 求导.

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$

利用加法法则展开, 得

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

- 对 x^2 求导, 即 $2x$.
- 对 y^2 求导则不同. 因为 y 是 x 的函数, 所以 y^2 是一个复合函数, 外层是平方运算, 内层是 $y(x)$. 根据链式法则, 得

$$\frac{d}{dx}(y^2)=2y\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot y'$$

将求导结果代回方程, 得

$$2x+2y\cdot y'=0$$

接着, 把它当作一个关于 y' 的普通代数方程来解, 得

$$2y\cdot y'=-2x$$

$$y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}\quad(y\neq 0)$$

这个结果符合几何直观, 它表明, 圆上满足 $y\neq 0$ 的任意一点 (x,y) 的切线斜率就是 $-\frac{x}{y}$. 例如在点 $(3,4)$, 切线斜率为 $-\frac{3}{4}$. 当 $y=0$ 时, 对应点为 $(\pm 5,0)$, 切线为竖直直线, 此时不能写成有限的 $\dfrac{dy}{dx}$.

知乎@余命数

1.9.8 单调性

导数 $f'(x)$ 精确地刻画了函数在一点的瞬时变化率, 其几何意义为该点切线的斜率, 这是一个局部性质. 本节利用函数在每一点的瞬时变化信息, 推断其在整个区间上的增减趋势, 即单调性.

导数的正负符号直观上预示了函数的走向, 正的导数意味着上升趋势, 负的导数意味着下降趋势. 然而这还不够严谨, 需要为这一直观建立严格的理论基础, 并形成一套分析方法.

1.9.8.1 从理论基石到判定法则

此探索始于对函数图像中转折点的精确描述, 这些点是函数单调性可能发生改变的地方, 我们称之为极值点.

定义 1.21 (函数的极值) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义.

- 如果对于该邻域内**任意**异于 x_0 的点 x, 都恒有 $f(x)<f(x_0)$, 那么我们称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个**极大值**, 称 x_0 为**极大值点**.
- 如果对于该邻域内**任意**异于 x_0 的点 x, 都恒有 $f(x)>f(x_0)$, 那么我们称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个**极小值**, 称 x_0 为**极小值点**.

极大值与极小值统称为**极值**, 极大值点与极小值点统称为**极值点**.

极值是一个局部概念, 它只关心一个点在其邻域中的地位, 而最值是全局概念. 此定义告诉了我们什么是极值, 却未指明如何寻找它们. 直接用定义去比较无穷多个点的大小是不现实的. 直观提供了线索, 在任何光滑曲线的峰顶或谷底, 切线必然是水平的. 这一观察被精确地表述为费马引理.

引理 1.4 (费马引理) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足以下两个条件.

1. $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值;
2. $f(x)$ 在点 x_0 处可导;

那么, 函数在该点的导数必为零, 即 $f'(x_0)=0$.

证明 以 $f(x_0)$ 为极大值为例. 根据极大值的定义, 存在一个以 x_0 为中心的邻域, 对于该邻域内任意异于 x_0 的点 x, 都有 $f(x)<f(x_0)$, 因而对充分小且非零的 Δx, 有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leq 0$.

考察导数 $f'(x_0)$ 的定义式. 当自变量从右侧逼近 ($\Delta x\to 0^+$) 时, 分母 $\Delta x>0$, 分子 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leq 0$. 故比值非正, 其极限, 即右导数满足 $f'_+(x_0)\leq 0$. 当自

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

变量从左侧逼近 ($\Delta x \to 0^-$) 时, 分母 $\Delta x < 0$, 分子非正. 故比值非负, 其极限, 即左导数满足 $f'_-(x_0) \geq 0$.

由于函数在 x_0 处可导, 其左、右导数必须存在且相等, 即 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. 联立 $f'(x_0) \leq 0$ 与 $f'(x_0) \geq 0$, 唯一可能的情况便是 $f'(x_0) = 0$. □

注 1.12 (必要而不充分)
费马引理仅为必要条件.
它的真正含义是, **可导函数的极值点必定是导数为零的点.** 于是寻找极值点时, 只需在所有导数为零的点, 也称**驻点**或**稳定点**以及导数不存在的点(**奇点**)中筛选.
然而反之不成立, 即 $f'(x_0) = 0$ **并不能保证** x_0 **就是极值点.** 经典反例是 $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处, 其导数为零但函数持续递增, 该点是一个**拐点**.

知乎@余命数

费马引理联系了单个点的极值性质与导数性质. 要从点的性质推广到区间的性质, 需要中值定理. 先从其特殊形式, 即罗尔定理, 开始.

知乎@余命数

引理 1.5 (罗尔定理) 设 $a < b$. 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件.(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) 在端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$. 那么, 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

知乎@余命数 知乎@余命数

证明 根据闭区间上连续函数的最值定理, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值 M 和最小值 m. 若 $M = m$, 则 $f(x)$ 为常数函数, 其导数在 (a, b) 内处处为零, 结论显然成立. 若 $M > m$, 由于 $f(a) = f(b)$, 则 M 与 m 中至少有一个必定在区间的**内部**某点 $\xi \in (a, b)$ 处取得. 即点 ξ 是一个极值点, 且函数在该点可导. 根据费马引理, 可导函数在极值点处的导数必为零, 故 $f'(\xi) = 0$. □

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

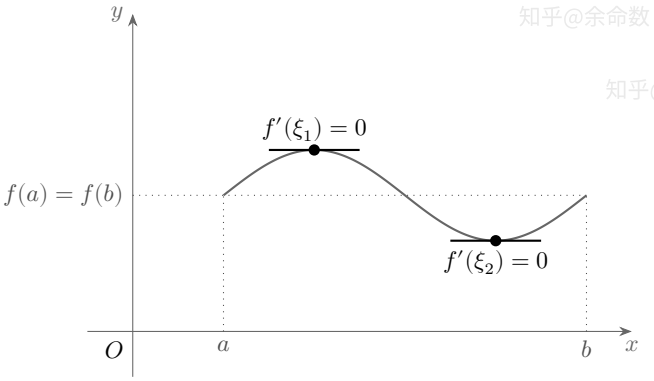


图 1.10 罗尔定理的几何意义是, 若曲线两端点等高, 则其间必有水平切线.

罗尔定理要求 $f(a) = f(b)$, 条件较为苛刻. 拉格朗日将其推广到一般情形, 思想是通过构造辅助函数, 将任意函数旋转至满足罗尔定理条件的状态.

知乎@余命数

定理 1.12 (拉格朗日中值定理) 设 $a<b$. 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件.(1) 在 $[a,b]$ 上连续;(2) 在 (a,b) 内可导. 那么, 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{1-14}$$

证明 证明的思路是构造一个辅助函数, 使其恰好满足罗尔定理的条件. 连接端点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的割线方程为 $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. 构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$. 此函数 $\varphi(x)$ 代表了曲线 $y=f(x)$ 与其端点割线之间的竖直距离. 验证 $\varphi(a)=0$ 且 $\varphi(b)=0$, 故 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理的全部条件. 因此, 存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$. 对 $\varphi(x)$ 求导得 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 令 $x=\xi$ 并代入 $\varphi'(\xi)=0$, 移项后即得定理结论. □

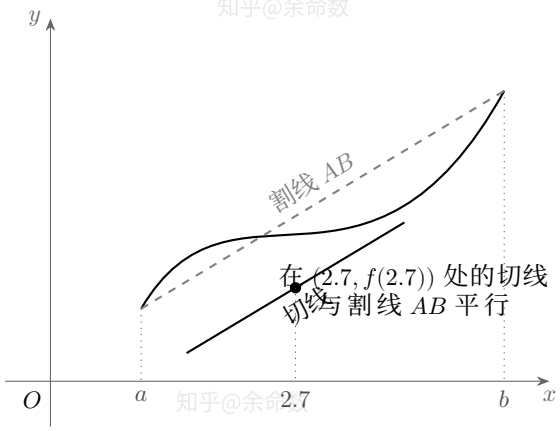


图 1.11　拉格朗日中值定理的几何意义

拉格朗日中值定理把瞬时变化率 $f'(\xi)$ 与区间平均变化率 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 联系起来. 至此所有理论工具已准备就绪, 可以严谨地证明单调性判定法则了.

定理 1.13 (函数单调性的判定法) 设 I 是一个区间, 函数 $y=f(x)$ 在 I 上连续, 在 I 的内部可导.

- 如果在 I 的内部恒有 $f'(x)>0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调递增**的.
- 如果在 I 的内部恒有 $f'(x)<0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调递减**的.
- 如果在 I 的内部恒有 $f'(x)=0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 I 上是一个**常数函数**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 设 x_1, x_2 是区间 I 内的任意两点, 且 $x_1 < x_2$. 由于 I 是区间, 闭区间 $[x_1, x_2]$ 包含于 I; 由题设知 f 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导. 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 可知在开区间 (x_1, x_2) 内必定存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

变形, 得核心关系式

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

因为假设 $x_1 < x_2$, 所以因子 $(x_2 - x_1)$ 恒为正数. 因此, 函数值的差 $f(x_2) - f(x_1)$ 的符号, 完全由导数值 $f'(\xi)$ 的符号决定.

- **若在 I 内** $f'(x) > 0$: 由于 $\xi \in (x_1, x_2) \subset I$, 所以 $f'(\xi) > 0$. 此时 $f(x_2) - f(x_1) =$ (正数) $\times$ (正数) > 0, 即 $f(x_2) > f(x_1)$. 根据定义, 函数单调递增.
- **若在 I 内** $f'(x) < 0$: 同理, 此时 $f'(\xi) < 0$. 于是 $f(x_2) - f(x_1) =$ (负数) $\times$ (正数) < 0, 即 $f(x_2) < f(x_1)$. 根据定义, 函数单调递减.
- **若在 I 内** $f'(x) = 0$: 同理, 此时 $f'(\xi) = 0$. 于是 $f(x_2) - f(x_1) = 0$, 即 $f(x_2) = f(x_1)$. 由于 x_1, x_2 是任意两点, 故函数为常数函数.

至此, 由导数符号判定单调性的法则得证. □

1.9.8.2 单调性分析的标准流程与应用

根据上述定理, 我们把求解函数单调区间的流程整理为四步.

1. **确定定义域**. 这是最基础也是最容易被忽略的一步. 后续所有讨论都必须在定义域内进行.
2. **求出导数**. 计算出导函数 $f'(x)$.
3. **求解驻点与奇点**. 求解方程 $f'(x) = 0$ 的根(驻点), 以及使 $f'(x)$ 不存在的奇点. 这些点是划分单调区间的**分界点**.
4. **列表分析**. 用表格清晰地展示出定义域被分界点划分成的各个子区间, 以及每个子区间上 $f'(x)$ 的符号和 $f(x)$ 的单调性.

例题 1.56 求函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解 **定义域** 该函数为多项式函数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

求导数

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

求分界点, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=2$. 这两个驻点将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为三个区间.

列表分析

区间	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$ 的符号	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$ 的单调性	↗(增)	极大值	↘(减)	极小值	↗(增)

因此, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$, 单调递减区间为 $(1,2)$.

例题 1.57　求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间.

知乎@余命数

解 **定义域**函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

求导数利用除法法则, 得

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

求分界点, 由于 $x\in(0,+\infty)$, 分母 x^2 恒为正, 所以 $f'(x)$ 的符号完全由分子 $1-\ln x$ 决定. 令 $f'(x)=0$, 得 $1-\ln x=0$, 解得 $x=e$.

列表分析

区间	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$ 的符号	$+$	0	$-$
$f(x)$ 的单调性	↗(增)	极大值	↘(减)

因此, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$, 单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

例题 1.58　已知函数 $f(x)=x\ln x$.

1. 讨论函数 $g(x)=f(x)-x+1$ 的单调性, 并证明对任意 $x>0$, 恒有 $x\ln x\geq x-1$.
2. 证明存在唯一的 $x_0\in(1,e)$, 使得曲线 $y=x\ln x$ 在点 x_0 处的切线, 与连接点 $(1,0)$ 和 (e,e) 的直线平行.

解　第 (1) 问把不等式 $x\ln x\geq x-1$ 转化为 $g(x)=x\ln x-x+1\geq 0$ 的非负性, 通过求导定其最小值即可; 第 (2) 问要求存在唯一的 $x_0\in(1,e)$ 使曲线在 x_0 处的切线与连接 $(1,0)$、(e,e) 的直线平行, 等价于方程 $f'(x_0)=\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}$ 在 $(1,e)$ 内有

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

唯一解, 这正是拉格朗日中值定理保证存在、由导函数单调性保证唯一性的典型情形.

(1) 函数 $g(x)=x\ln x-x+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 对其求导得 $g'(x)=(\ln x+1)-1=\ln x$. 令 $g'(x)=0$ 解得 $x=1$. 当 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)=\ln x<0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $g'(x)=\ln x>0$, $g(x)$ 单调递增. 故 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 亦为全局最小值, $g(1)=1\ln 1-1+1=0$. 由最小值为 0, 对任意 $x>0$ 有 $g(x)\geq 0$, 即 $x\ln x-x+1\geq 0$, 移项得 $x\ln x\geq x-1$.

(2) 如上分析, 本问等价于证明方程 $\ln x+1=\frac{e}{e-1}$ 在 $(1,e)$ 内有唯一解. 构造辅助函数 $H(x)=\ln x+1-\frac{e}{e-1}$, 证明其在 $(1,e)$ 内有唯一零点.

先证**存在性**.$H(x)$ 在闭区间 $[1,e]$ 上连续, 其端点值为 $H(1)=\ln 1+1-\frac{e}{e-1}=-\frac{1}{e-1}<0$, $H(e)=\ln e+1-\frac{e}{e-1}=\frac{e-2}{e-1}>0$. 因 $H(x)$ 在 $[1,e]$ 两端异号, 由零点存在性定理, 在 $(1,e)$ 内至少存在一点 x_0 使 $H(x_0)=0$.

再证**唯一性**. 对 $H(x)$ 求导得 $H'(x)=\frac{1}{x}$, 对任意 $x\in(1,e)$ 有 $H'(x)>0$, 故 $H(x)$ 在 $(1,e)$ 上严格单调递增, 其图像与 x 轴至多有一个交点. 结合已证的存在性, $H(x)$ 在 $(1,e)$ 内有且仅有一个零点. 证毕.

1.10 中值定理的应用与推广

前一节建立了费马引理、罗尔定理及拉格朗日中值定理. 这些定理构成微分学的主要理论框架, 并把导数符号与函数单调性联系起来. 本节从定性判断转向定量分析. 我们利用中值定理建立函数增量与导数取值范围的联系, 证明不等式; 估计线性近似的误差; 并把拉格朗日中值定理推广为处理两函数比值的柯西中值定理.

1.10.1 利用中值定理证明不等式

我们先写出拉格朗日中值定理的等式形式.

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)$$

该等式给出函数在区间两端的增量 $\Delta y=f(b)-f(a)$ 与导数在中间点的值 $f'(\xi)$、自变量增量 $\Delta x=b-a$ 之间的精确关系.

ξ 的具体位置未知, 但由 $\xi\in(a,b)$ 可估计 $f'(\xi)$ 的取值范围, 从而得到函数增量的上界或下界. 这样便由局部变化率推出了整体改变量.

1.10.1.1 方法与实例

证明 $g(x)>h(x)$ 这类不等式, 可转化为证明 $g(x)-h(x)>0$. 把 x 看作区间的一个端点, 构造函数并在相应区间上应用中值定理.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.59　证明当 $x>0$ 时, 不等式 $e^x>1+x$ 成立.

证明　不等式可变形为 $e^x-1>x$. 考虑函数 $f(t)=e^t$. 该函数在闭区间 $[0,x]$ 上连续, 在 $(0,x)$ 内可导. 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(0,x)$, 使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$$

代入函数具体的表达式, 得

$$e^x-1=e^{\xi}\cdot x$$

由于 $\xi>0$, 利用指数函数的单调性可知 $e^{\xi}>e^0=1$. 又因为 $x>0$, 所以 $e^{\xi}\cdot x>1\cdot x=x$. 即 $e^x-1>x$, 亦即 $e^x>1+x$. □

对于包含对数或分式的不等式, 直接比较往往较难, 而中值定理可将其化为倒数或线性函数的比较.

例题 1.60　证明对于任意 $a>b>0$, 有

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$$

证明　首先观察中间项 $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$, 这提示我们利用对数函数的增量公式. 构造函数 $f(x)=\ln x$. 函数 $f(x)$ 在区间 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件. 于是存在 $\xi\in(b,a)$, 使得

$$\ln a-\ln b=f'(\xi)(a-b)=\frac{1}{\xi}(a-b)$$

即

$$\ln\frac{a}{b}=\frac{a-b}{\xi}$$

由于 $b<\xi<a$, 且函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 故有

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$$

因为 $a>b$, 所以 $a-b>0$. 在上述不等式各项同时乘以 $(a-b)$, 得

$$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$$

代入 $\ln\frac{a}{b}=\frac{a-b}{\xi}$, 即证得结论. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.10.2 中值定理与近似计算的误差分析

工程与科学计算中常用切线近似曲线, 我们称这种近似为线性近似. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 x 在 x_0 附近的**线性近似**(或一阶泰勒近似)定义为

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

知乎@余命数

几何上, 这是用切线 $y = L(x)$ 代替曲线 $y = f(x)$. 我们把近似带来的**误差**记为

$$R(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

知乎@余命数

当 $x \to x_0$ 时, 误差 $R(x)$ 是比 $(x - x_0)$ 高阶的无穷小. 应用中值定理可进一步给出 $R(x)$ 的具体表达式, 从而量化近似的精确度.

定理 1.14 (线性近似的误差估计) 设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间上具有二阶导数. 则对于区间内任意一点 x, 当 $x \neq x_0$ 时, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 \tag{1-15}$$

当 $x = x_0$ 时, 上式两边均等于 $f(x_0)$, 结论直接成立. 即误差项为 $R(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2$.

知乎@余命数

证明 若 $x = x_0$, 公式直接成立. 以下设 $x \neq x_0$. 我们引入参数 K, 使得等式在 x 处成立.

知乎@余命数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + K(x - x_0)^2$$

知乎@余命数

令 $\varphi(t)$ 为函数值与近似值在点 t 处的差.

$$\varphi(t) = f(t) - [f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0) + K(t - x_0)^2]$$

直接有 $\varphi(x_0) = 0$. 由 K 的定义可知 $\varphi(x) = 0$. 根据罗尔定理, 在 x_0 与 x 之间存在一点 η, 使得 $\varphi'(\eta) = 0$. 对 $\varphi(t)$ 求导得 $\varphi'(t) = f'(t) - [f'(x_0) + 2K(t - x_0)]$, 注意 $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$. 现有 $\varphi'(\eta) = 0$ 和 $\varphi'(x_0) = 0$. 再次对 $\varphi'(t)$ 在区间 $[x_0, \eta]$ (或 $[\eta, x_0]$) 上应用罗尔定理, 可知存在 ξ 介于 x_0 与 η 之间, 也就是同时介于 x_0 与 x 之间, 使得 $\varphi''(\xi) = 0$. 计算 φ 的二阶导数 $\varphi''(t) = f''(t) - 2K$, 代入 $\varphi''(\xi) = 0$ 得 $f''(\xi) - 2K = 0$, 即 $K = \frac{1}{2}f''(\xi)$. 将 K 代回原式, 即得证. □

该结论表明, 线性近似的误差大小取决于函数二阶导数 $f''(x)$ 的界. 二阶导数越大, 曲线弯曲越甚, 切线近似的误差也越大.

知乎@余命数

1.10.3 柯西中值定理

拉格朗日中值定理建立了单个函数增量与导数的关系. 考察两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的增量比值, 就得到柯西中值定理. 它是拉格朗日中值定理的推广, 也是推导洛必达法则的工具.

定理 1.15 (柯西中值定理) 设 $a<b$. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件.

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
2. 在开区间 (a,b) 内可导;
3. 对任意 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$.

那么, 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{1-16}$$

注 1.13
我们对此定理作三点说明. 1. 若取 $g(x)=x$, 则 $g'(x)=1$, 定理退化为拉格朗日中值定理. 2. 条件 $g'(x)\neq 0$ 保证了分母 $g(b)-g(a)\neq 0$(否则由罗尔定理知存在一点导数为零). 3. 该式不能简单地通过对 f 和 g 分别应用拉格朗日定理得到, 因为那样会得到两个不同的中间点 ξ_1 和 ξ_2, 分别属于 f 和 g, 因此不能直接把两个等式相除.

证明 我们仍用罗尔定理证明, 关键是构造端点相等的辅助函数. 将结论变形为 $[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$. 构造辅助函数 $\Phi(x)$, 得

$$\Phi(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$$

其端点值为

$$\Phi(a)=f(b)g(a)-f(a)g(a)-g(b)f(a)+g(a)f(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$$

$$\Phi(b)=f(b)g(b)-f(a)g(b)-g(b)f(b)+g(a)f(b)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$$

可见 $\Phi(a)=\Phi(b)$. 由 f,g 的性质知 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 根据罗尔定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\Phi'(\xi)=0$. 求导得 $\Phi'(\xi)=[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$. 由条件 $g'(x)\neq 0$ 与罗尔定理可知 $g(b)-g(a)\neq 0$; 同时 $g'(\xi)\neq 0$. 因而可以相除. 移项并整理, 即得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

□

知乎@余命数

1.10.3.1 几何意义

柯西中值定理有几何解释. 我们用参数方程表示这条曲线.

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

此时, 比值 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 代表连接曲线起点 $A(g(a), f(a))$ 和终点 $B(g(b), f(b))$ 的**弦的斜率**. 而比值 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=\xi} = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\xi}$ 代表曲线在参数 $t = \xi$ 对应点处的**切线斜率**.

定理表明, 对一条光滑的参数曲线, 在起点和终点之间, 必有一点, 该点处的切线与连接两端点的弦平行.

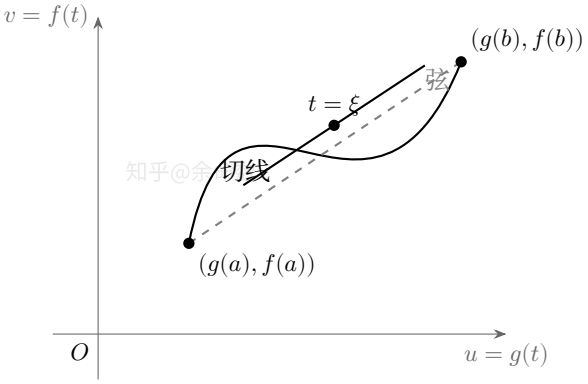


图 1.12 柯西中值定理的几何意义是, 参数曲线上的切线平行于弦.

当 $f(a) = g(a) = 0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. 令 $x \to a$, 则 $\xi \to a$, 于是函数之比便过渡到导数之比. 这正是洛必达法则的雏形.

1.11 导数的综合应用

我们已能用导数判断函数的单调性与极值. 本节把它们用来处理三类问题,即方程根的分布、函数零点个数、以及含参不等式的恒成立. 这三类问题的共同之处是都需要把代数命题翻译成函数图像的几何特征, 再用导数进行计算.

讨论零点就是研究函数图像与 x 轴的交点. 一条曲线怎样穿越或接触 x 轴,取决于它的起伏与位置. 我们用导数确定起伏, 再用端点值与极值确定位置.

1.11.1 函数零点问题

函数 f 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实根. 如果解析式里没有参数, 我们只研究一条固定的曲线; 如果含有参数, 曲线会随参数移动, 零点个数也会改变. 本节分别处理这两种情形.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.11.1.1 基本判定准则

零点的存在性由介值定理保证. 如果连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 端点取值异号, 即 $f(a)f(b)<0$, 那么 (a,b) 内至少存在一个零点. 导数进一步约束了零点的个数.

定理 1.16 (单调性与零点) 若 $f(x)$ 在区间 I 内严格单调, 则 $f(x)$ 在 I 内至多有一个零点.

知乎@余命数

证明 我们用反证法. 假设 f 在 I 内存在两个不同零点 x_1,x_2, 不妨设 $x_1<x_2$. 若 f 严格递增, 则 $f(x_1)<f(x_2)$; 若 f 严格递减, 则 $f(x_1)>f(x_2)$. 但 x_1,x_2 都是零点, 所以 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 这与严格单调性矛盾. 因此零点至多一个. □

对于非单调函数, 我们先把定义域分成若干单调区间, 再分别考察每个区间端点处的函数值与极值. 极值的符号决定曲线在该区间是否穿过 x 轴.

1.11.1.2 定系数函数的零点

解析式确定后, 零点个数由极值符号与区间端点函数值共同决定. 我们按求导、找极值、看边界的顺序操作.

例题 1.61 确定函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 的零点个数.

知乎@余命数

解 函数的定义域为 $\mathbb{R}$. 求导得 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. 令 $f'(x)=0$, 解得驻点 $x_1=-1, x_2=1$.

知乎@余命数

导数符号如下.

- 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f'(x)>0$, f 单调递增;
- 当 $x\in(-1,1)$ 时, $f'(x)<0$, f 单调递减;
- 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, f 单调递增.

知乎@余命数

极大值为 $f(-1)=-1+3+1=3>0$. 极小值为 $f(1)=1-3+1=-1<0$.

再考察边界趋势. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)<0$ 且 $f(-1)>0$, 结合该区间上的单调性, 在 $(-\infty,-1)$ 存在唯一零点; 由 $f(-1)>0>f(1)$, 在 $(-1,1)$ 存在唯一零点; 由 $f(1)<0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>0$, 结合该区间上的单调性, 在 $(1,+\infty)$ 存在唯一零点. 故该函数共有 3 个零点.

例题 1.62 (2024· 重庆南开中学)设函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$.

1. 当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时, 求 $f(x)$ 的最值;

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

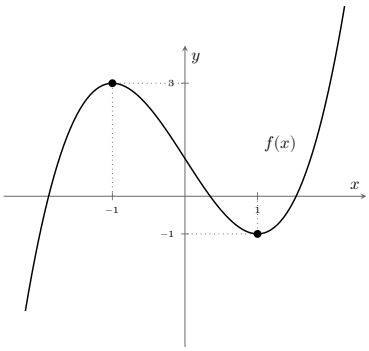


图 1.13 利用极大值与极小值的符号判定三次函数的零点个数

知乎@余命数

2. 讨论函数 $g(x)=\ln(x+1)-f'(x)$ 在区间 $(-1,2\pi)$ 内的零点个数.

解 **(1) 单调性分析**对 $f(x)$ 求导, 得

$$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x.$$

知乎@余命数

当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时,

- 若 $x\in[-\pi,0)$, 则 $x<0,\sin x<0$, 于是 $f'(x)>0$;
- 若 $x\in(0,\pi]$, 则 $x>0,\sin x>0$, 于是 $f'(x)>0$.

知乎@余命数

故 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上单调递增. 最小值为 $f(-\pi)=\sin(-\pi)-(-\pi)\cos(-\pi)=-\pi$. 最大值为 $f(\pi)=\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi$.

(2) 分段考察零点函数解析式为 $g(x)=\ln(x+1)-x\sin x$, 定义域为 $(-1,2\pi)$. 由于含三角函数, 我们按它的符号周期性分区间讨论.

区间 $(-1,0)$. 当 $x\in(-1,0)$ 时, $0<x+1<1$, 故 $\ln(x+1)<0$. 同时 $x<0$, $\sin x<0$, 于是 $x\sin x>0$. 因此 $g(x)=$ 负 $-$ 正 <0, 该区间无零点.

点 $x=0$. $g(0)=\ln 1-0=0$, 故 $x=0$ 是一个零点.

区间 $(\pi,2\pi)$. 当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时, $\sin x<0$, 且 $x>0$, 故 $-x\sin x>0$. 又 $\ln(x+1)>\ln(\pi+1)>0$. 两项均为正, 故 $g(x)>0$, 该区间无零点.

区间 $(0,\frac{\pi}{2})$. 将方程 $g(x)=0$ 改写为

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sin x\quad(x>0).$$

令 $H(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}-\sin x$. 则

$$H'(x)=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}-\cos x<0,$$

知乎@余命数

其中 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$，且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $\cos x > 0$. 因此 H 在该区间严格递减. 又 $\lim\limits_{x\to 0^+} H(x) = 1 > 0$, 且

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\ln(1+\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} - 1 < 0,$$

故 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内恰有一个零点.

区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. 先看端点符号.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} < 0, \quad g(\pi) = \ln(1+\pi) > 0.$$

因此至少存在一个零点. 为证明唯一性, 考察

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \sin x - x\cos x, \quad g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - 2\cos x + x\sin x.$$

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 时, $x\sin x > 1 > \frac{1}{(x+1)^2}$, 且 $-2\cos x \geq 0$; 当 $x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 时, $-2\cos x \geq 1 > \frac{1}{(x+1)^2}$, 且 $x\sin x > 0$. 故 $g''(x) > 0$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上恒成立. 于是 $g'(x)$ 严格递增. 又

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} - 1 < 0, \quad g'(\pi) = \frac{1}{1+\pi} + \pi > 0,$$

故 g' 在该区间仅有一个零点, 从而 g 先减后增. 结合 $g(\frac{\pi}{2}) < 0$ 与 $g(\pi) > 0$, 可知 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内恰有一个零点.

综合结论 $(0, \frac{\pi}{2})$ 与 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内各有一个零点, $x = 0$ 也是零点; 而 $(-1, 0)$ 与 $(\pi, 2\pi)$ 内无零点.

$g(x)$ 在 $(-1, 2\pi)$ 上共有 3 个零点(分别为 $0, x_1, x_2$).

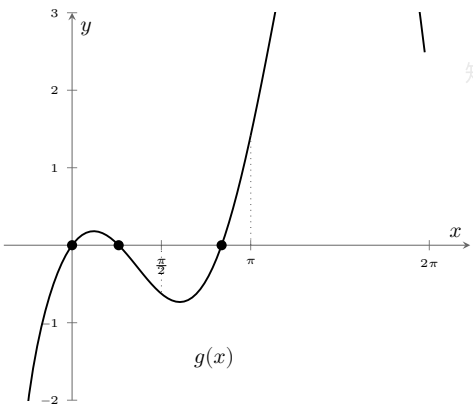


图 1.14　超越函数 $g(x)$ 的零点分布示意图

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

1.11.1.3 含参方程的零点

当方程含有参数时, 零点个数随参数变化而改变. 此时需对参数进行分类讨论. 常用方法有两种.

1. **直接分析法**. 研究含参函数 $f(x,a)$ 的极值点位置及极值大小与参数的关系.
2. **参变分离法**. 将方程变形为 $g(x)=a$, 转化为固定曲线 $y=g(x)$ 与水平直线 $y=a$ 的交点问题.

下例采用直接分析法演示.

例题 1.63 讨论关于 x 的方程 $x-a\ln x=0\ (a>0)$ 的实根个数.

解 **构造与求导**令 $f(x)=x-a\ln x$, 定义域为 $(0,+\infty)$. 求导得 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$.

单调性与极值由于 $x>0$, $a>0$, 导数符号仅取决于 $x-a$. 当 $x\in(0,a)$ 时, $f'(x)<0$, f 递减; 当 $x\in(a,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, f 递增. 故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值, 亦为最小值

$$f(a)=a-a\ln a=a(1-\ln a).$$

边界趋势

$$\lim_{x\to0^+}(x-a\ln x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}x(1-a\frac{\ln x}{x})=+\infty.$$

函数图像呈 U 型, 两端趋于正无穷.

分类讨论零点个数取决于最小值 $f(a)$ 与 0 的关系.

1. 若 $f(a)>0$, 即 $a(1-\ln a)>0$, 则 $0<a<e$. 图像整体位于 x 轴上方, **无实根**.
2. 若 $f(a)=0$, 即 $a=e$, 图像与 x 轴相切于顶点, **有唯一实根**.
3. 若 $f(a)<0$, 即 $a>e$, 极小值小于 0 且两端趋于 $+\infty$, 分别在 $(0,a)$ 与 $(a,+\infty)$ 各有**一个实根**, 共两个.

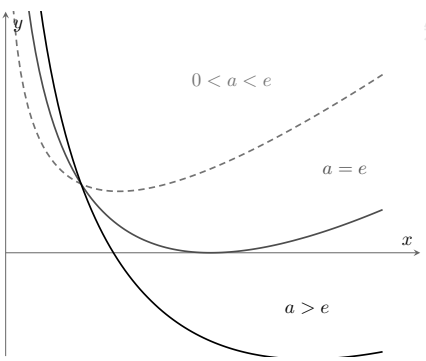


图 1.15 参数 a 改变了 $f(x)$ 极小值的位置与大小, 从而改变零点个数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.64　(2024· 成都七中三诊)已知函数 $f(x)=e^x-ax\sin x-x-1$, 其中 $x\in(0,\pi)$.

1. 若 $a=\frac{1}{2}$, 证明 $f(x)>0$;
2. 若函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有唯一零点, 求实数 a 的取值范围.

解　(1) 二阶导数定性当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1$. 求导得

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)-1.$$

由于直接判断符号困难, 我们考察 $f'(x)$ 的导数, 即原函数二阶导.

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{2}(2\cos x-x\sin x)=e^x-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

当 $x\in(0,\pi)$ 时, $e^x>1\geq\cos x$, 且 $x\sin x>0$, 故 $f''(x)>0$. 故 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.

又 $f'(0)=e^0-0-1=0$, 故当 $x>0$ 时, $f'(x)>f'(0)=0$. 进而 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增. 又 $f(0)=1-0-0-1=0$, 故对于 $x\in(0,\pi)$, 恒有 $f(x)>f(0)=0$.

(2) 分类与比较由题意, 我们讨论方程 $f(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 上的根.

情形一 ($a\leq\frac{1}{2}$). 利用第 (1) 问结论进行缩放.

$$f(x)=\left(e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)x\sin x.$$

由 (1) 知第一部分大于 0; 由 $a\leq\frac{1}{2}$ 及 $x\in(0,\pi)$ 知 $(\frac{1}{2}-a)x\sin x\geq 0$. 故 $f(x)>0$, 函数无零点.

情形二 ($a>\frac{1}{2}$). 由于 $x\sin x>0$ 在 $(0,\pi)$ 内恒成立, 方程 $f(x)=0$ 等价于

$$a=\Phi(x):=\frac{e^x-x-1}{x\sin x}.$$

现证 $\Phi(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上严格递增, 且值域为 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

将其写成

$$\Phi(x)=\frac{\frac{e^x-x-1}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}.$$

记 $A(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$. 则

$$A'(x)=\frac{(x-2)e^x+x+2}{x^3}.$$

令 $q(x)=(x-2)e^x+x+2$, 则 $q(0)=0$、$q'(x)=(x-1)e^x+1$、$q''(x)=xe^x>0$. 因而 $q'(x)>0$, $q(x)>0$ 在 $x>0$ 上成立, 所以 $A(x)$ 严格递增.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

又 $B(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上为正且严格递减, 因为

$$B'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0,$$

其中 $\sin x-x\cos x$ 的导数为 $x\sin x>0$, 且在 $x=0$ 处极限为 0. 故 $1/B(x)$ 严格递增. 于是正函数 $A(x)$ 与 $1/B(x)$ 的乘积 $\Phi(x)$ 严格递增.

再由

$$\lim_{x\to 0^+}\Phi(x)=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to\pi^-}\Phi(x)=+\infty,$$

可知当且仅当 $a>\frac{1}{2}$ 时, 方程 $a=\Phi(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有唯一解, 即 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有唯一零点.

故满足题意的 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

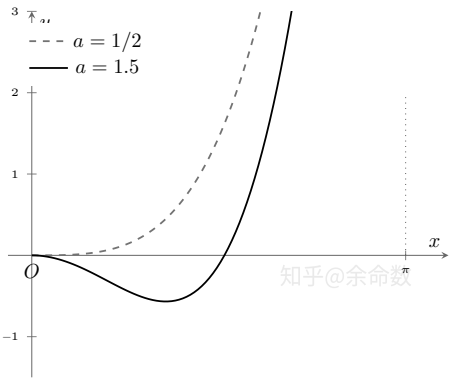


图 1.16 参数 a 改变了函数在 0 附近的凹凸性与单调性

例题 1.65 (2022· 全国乙卷)已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$.

1. 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;
2. 若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

解 (1) 切线求解当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln(1+x)+xe^{-x}$. $f(0)=\ln 1+0=0$. 切点为 $(0,0)$. 求导得

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+e^{-x}-xe^{-x}=\frac{1}{1+x}+e^{-x}(1-x).$$

故切线斜率 $k=f'(0)=1+1(1)=2$. 切线方程为 $y-0=2(x-0)$, 即 $y=2x$.

(2) 转化与分类函数定义域为 $(-1,+\infty)$. 求导并通分, 得

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+ae^{-x}(1-x)=\frac{e^x+a(1-x^2)}{e^x(1+x)}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设辅助函数 $h(x)=e^x+a(1-x^2)$. 当 $x>-1$ 时, 分母恒正, 故 $f'(x)$ 与 $h(x)$ 同号.

情形一 ($a\geq 0$). 当 $x\in(-1,0)$ 时, $e^x>0$ 且 $1-x^2>0$. 若 $a\geq 0$, 则 $h(x)>0$ 恒成立. 此时 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增. 又 $f(0)=0$, 故当 $x\in(-1,0)$ 时, $f(x)<f(0)=0$, 不存在零点. 不合题意.

情形二 ($-1\leq a<0$). 考察 $h(x)$ 的导数, 得 $h'(x)=e^x-2ax$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $e^x>1$, 且 $-2ax\geq 0$ (因为 a 为负、x 为正), 故 $h'(x)>0$. $h(x)$ 单调递增, 且 $h(0)=1+a\geq 0$. 故在 $(0,+\infty)$ 上 $h(x)>0$, 从而 $f'(x)>0$. $f(x)$ 单调递增, 且 $f(0)=0$, 故 $f(x)>0$, 无零点. 不合题意.

情形三 ($a<-1$). 此时 $h(0)=1+a<0$.

1. 区间 $(-1,0)$ 的分析. $x\to -1^+$ 时, $h(x)\to e^{-1}>0$. 结合 $h(0)<0$, 存在 $x_1\in(-1,0)$ 使得 $h(x_1)=0$. 为说明该零点唯一, 我们注意 $h''(x)=e^x-2a>0$, 故 $h'(x)$ 严格递增; 又 $h'(-1^+)=e^{-1}+2a<0$, $h'(0)=1>0$, 所以 h 先减后增. 由于 $h(0)<0$, 增段上的函数值仍小于 0, 因而 h 在 $(-1,0)$ 内只与 x 轴相交一次. 当 $x\in(-1,x_1)$ 时 $h(x)>0$, f 递增; 当 $x\in(x_1,0)$ 时 $h(x)<0$, f 递减. $f(x_1)$ 为极大值. 我们注意 $\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\infty$, 且 $f(0)=0$. 函数图像先由 $-\infty$ 升至 $f(x_1)$, 再降至 0. 于是必然有 $f(x_1)>0$, 且在 $(-1,x_1)$ 内存在唯一零点.

2. 区间 $(0,+\infty)$ 的分析. $h'(x)=e^x-2ax$. 因 $a<-1$, 故 $-2a>2$, 所以 $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增. $h(0)<0$, 且 $x\to+\infty$ 时 $h(x)\to+\infty$. 故存在唯一 $x_2\in(0,+\infty)$ 使得 $h(x_2)=0$. 当 $x\in(0,x_2)$ 时 $h(x)<0$, f 递减; 当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时 $h(x)>0$, f 递增. $f(x_2)$ 为极小值. 由于 $f(0)=0$, 函数从 0 开始下降至 $f(x_2)$, 再上升至 $+\infty$. 显然 $f(x_2)<0$, 故在 $(x_2,+\infty)$ 内存在唯一零点.

当 $a<-1$ 时, 满足题设要求.

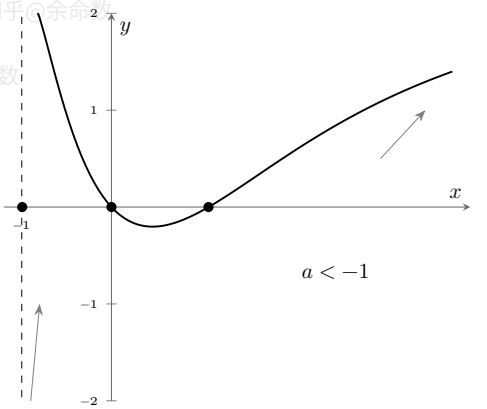


图 1.17　$a<-1$ 时函数 $f(x)$ 呈现出的双谷形态与零点分布

1.11.2 不等式恒成立问题

证明 “对于区间 I 内的任意 x, 不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立”, 即全称命题 $\forall x\in I, f(x)\geq g(x)$. 此类问题通常用最值法或参数分离法处理.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.11.2.1 最值法

最值法将不等式变形为 $h(x)=f(x)-g(x)\geq 0$. 要保证处处非负, 只需保证最低点非负, 即转化为求 $h(x)$ 在 I 上的最小值并验证 $h(x)_{\min}\geq 0$.

例题 1.66 求实数 a 的取值范围, 使得 $e^x\geq ax+1$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立.

知乎@余命数

证明 构造函数 $h(x)=e^x-ax-1$. 问题转化为求 a 使得 $h(x)_{\min}\geq 0$. 求导得 $h'(x)=e^x-a$.

情形 1 设 $a\leq 0$. 此时 $h'(x)=e^x-a>0$ 恒成立, 函数 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增. 当 $a=0$ 时, $x\to-\infty$ 有 $h(x)\to-1<0$; 当 $a<0$ 时, $x\to-\infty$ 有 $h(x)=e^x-ax-1\to-\infty$. 这说明必然存在 x 使得不等式不成立. 故 $a\leq 0$ 不合题意.

情形 2 设 $a>0$. 令 $h'(x)=0$, 解得唯一的驻点 $x_0=\ln a$.

- 当 $x<\ln a$ 时, $h'(x)<0$, h 单调递减;
- 当 $x>\ln a$ 时, $h'(x)>0$, h 单调递增.

故 $h(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得全局最小值, 即

$$h(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$$

知乎@余命数 知乎@余命数

要使恒成立, 需 $h(\ln a)\geq 0$, 即 $a(1-\ln a)-1\geq 0$. 观察辅助函数 $\varphi(a)=a-a\ln a-1$. 易知 $\varphi(1)=0$. 求导 $\varphi'(a)=-\ln a$. 当 $a=1$ 时, $\varphi(a)$ 取得最大值 0. 因此, 只有当 $a=1$ 时, 最小值 $h(\ln a)=0\geq 0$ 成立; 若 $a\neq 1$, 则最小值必然小于 0.

知乎@余命数

故符合条件的 a 只有 1. (几何上, 这对应于 $y=x+1$ 是曲线 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线, 切线始终在凸曲线下方.) □

1.11.2.2 参数分离法

参数分离法适用于能将参数 a 与变量 x 完全分离的情形, 例如变形为 $a\leq k(x)$. 此时 a 始终小于等于 $k(x)$, 等价于 a 不超过 $k(x)$ 的下确界, 或最小值, 即 $a\leq k(x)_{\min}$. 此法避免了对含参函数求导时复杂的分类讨论.

例题 1.67 若对任意 $x>1$, 不等式 $(x-1)\ln x-a(x-1)^2\geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解 由于 $x>1$, 故 $(x-1)^2>0$. 不等式可变形为分离参数的形式

知乎@余命数

$$a\leq\frac{(x-1)\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\ln x}{x-1}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $k(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ $(x>1)$. 问题转化为求 $a\le \inf_{x>1}k(x)$. 对 $k(x)$ 求导, 得

$$k'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$$

知乎@余命数

令分子为 $g(x)=x-1-x\ln x$. 则 $g'(x)=1-(1+\ln x)=-\ln x$. 当 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, 故 $g(x)$ 单调递减. 又 $g(1)=0$, 所以当 $x>1$ 时, $g(x)<0$. 进而可知 $k'(x)<0$, 函数 $k(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

再考察函数的值域边界. 利用基本极限可得

知乎@余命数

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=0$$

知乎@余命数

函数从 1 单调递减趋向于 0. 因此, 要使 $a\le k(x)$ 对一切 $x>1$ 成立, 必须有 $a\le 0$. (若取 a 为正数, 当 x 足够大时 $k(x)$ 会趋近于 0 从而小于 a, 导致不等式失效.)

例题 1.68 (2018· 浙江卷)已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

1. 若 $f(x)$ 在 $x=x_1,x_2(x_1\ne x_2)$ 处的导数相等, 证明 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$;
2. 若 $a\le 3-4\ln 2$, 证明对于任意 $k>0$, 直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

知乎@余命数

知乎@余命数

解 (1) 换元与构造

求导得 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$. 令 $t=\sqrt{x}>0$, 则 $f'(x)$ 对应 $h(t)=\frac{t-2}{2t^2}=\frac{1}{2t}-\frac{1}{t^2}$. 由 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 且 $x_1\ne x_2$, 可知 t_1,t_2 是方程 $h(t)=C$ 的两个不同根.

知乎@余命数

$$\frac{1}{2t_1}-\frac{1}{t_1^2}=\frac{1}{2t_2}-\frac{1}{t_2^2}\implies \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=\frac{1}{t_1^2}-\frac{1}{t_2^2}.$$

约去 $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}$, 得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}$. 由此可知 $\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{1}{2}\Rightarrow t_1t_2=2(t_1+t_2)$. 又 $(t_1+t_2)^2>4t_1t_2=8(t_1+t_2)\implies t_1+t_2>8$. 由此推得 $t_1t_2=2(t_1+t_2)>16$.

目标式 $S=f(x_1)+f(x_2)=(t_1-2\ln t_1)+(t_2-2\ln t_2)=(t_1+t_2)-2\ln(t_1t_2)$. 代入关系式得 $S=\frac{1}{2}t_1t_2-2\ln(t_1t_2)$. 令 $u=t_1t_2>16$, 构造 $\phi(u)=\frac{u}{2}-2\ln u$. $\phi'(u)=\frac{1}{2}-\frac{2}{u}=\frac{u-4}{2u}$. 当 $u>16$ 时, $\phi'(u)>0$, ϕ 单调递增. 故 $S>\phi(16)=8-2\ln 16=8-8\ln 2$. 证毕.

(2) 转化零点问题直线与曲线的公共点等价于方程 $g(x)=f(x)-kx-a=0$ 的根.

$$g(x)=\sqrt{x}-\ln x-kx-a,\quad x\in(0,+\infty).$$

知乎@余命数

边界分析表明, $\lim_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$ (主导项 $-\ln x$), 而 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$, 主导项为 $-kx$. 由介值定理, 至少存在一个零点. 要证唯一性, 需分析函数起伏.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

求导得 $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}-k$. 令 $t=\sqrt{x}$, 导数符号由 $q(t)=-kt^2+\frac{1}{2}t-1$ 决定 ($g'(x)=\frac{q(t)}{t^2}$). 方程 $k=\frac{1}{2t}-\frac{1}{t^2}$ 的右边设为 $\varphi(t)$. $\varphi'(t)=\frac{4-t}{2t^3}$.$\varphi(t)$ 在 $(0,4)$ 递增, 在 $(4,+\infty)$ 递减. 最大值为 $\varphi(4)=\frac{1}{16}$.

情形一 ($k\geq\frac{1}{16}$). 此时 $g'(x)\leq 0$ 恒成立(仅在 $k=\frac{1}{16}, x=16$ 处为 0).$g(x)$ 单调递减, 必有唯一零点.

情形二 ($0<k<\frac{1}{16}$). 方程 $g'(x)=0$ 有两个根, 对应 $t_1\in(2,4)$ 和 $t_2\in(4,+\infty)$. $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递减, 在 (x_1,x_2) 递增, 在 $(x_2,+\infty)$ 递减. 图像走势为从 $+\infty$ 下降到极小值, 再上升, 最后再下降到 $-\infty$. 要保证只有唯一零点, 必须确保极小值 $g(x_1)>0$(从而图像在 x_1 处不穿过 x 轴).

计算极小值 $g(x_1)$, 其中 $k=\varphi(t_1)=\frac{1}{2t_1}-\frac{1}{t_1^2}$:

$$g(x_1)=t_1-2\ln t_1-\left(\frac{1}{2t_1}-\frac{1}{t_1^2}\right)t_1^2-a=\frac{t_1}{2}-2\ln t_1+1-a.$$

令 $m(t)=\frac{t}{2}-2\ln t+1$. 需证明对于 $t_1\in(0,4)$, 恒有 $m(t_1)>a$. $m'(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{t}=\frac{t-4}{2t}$. 在 $(0,4)$ 上 $m'(t)<0$, m 单调递减. 故 $m(t)>m(4)=2-2\ln 4+1=3-4\ln 2$. 已知 $a\leq 3-4\ln 2$, 故 $g(x_1)=m(t_1)-a>m(4)-a\geq 0$.

因为极小值 $g(x_1)>0$, 函数在 $(0,x_2]$ 区间内恒正, 仅在 $(x_2,+\infty)$ 单调下降穿过 x 轴一次. 故公共点唯一.

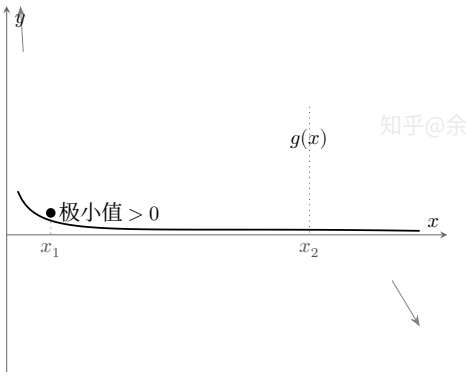


图 1.18 当 $0<k<1/16$ 时, 利用极小值大于 0 保证零点唯一

1.11.3 零点与含参问题的常用策略

处理零点问题时, 我们综合考察函数的形态与位置. 导数确定形态(单调性、凹凸性), 边界值与极值确定位置.

当 $f'(x)=0$ 为超越方程难以直接求解时, 不可强行计算, 而应分析导数表达式的结构.

1. **提取公因式**. 若 $f'(x)=A(x)\cdot h(x)$ 且 $A(x)$ 恒正, 则 $f(x)$ 的单调性完全由辅助函数 $h(x)$ 决定.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **高阶求导**. 若 $f'(x)$ 的符号不明, 可继续对 $f'(x)$ 求导. 二阶导数 $f''(x)$ 的符号能确定 $f'(x)$ 的单调性, 进而确定 $f'(x)$ 的零点, 即原函数的极值点.
3. **隐零点代换**. 若 $f'(x_0)=0$ 的解 x_0 无法用初等函数显式表达, 保留 x_0 的形式, 利用 $f'(x_0)=0$ 导出的代数关系, 如 $e^{x_0}=\frac{a}{x_0}$ 对极值 $f(x_0)$ 进行降次或化简.

而在处理含参范围问题时, 直接讨论往往分支繁杂. 有效的策略是先寻找**必要条件**.

- **端点与特殊点限制**. 若要求 $f(x)$ 有零点, 函数在区间端点或特殊点, 如 $0,1,e$ 的值往往受到限制.
- **趋势分析**. 考察 $x\to\infty$ 或定义域边界时的极限. 若两端趋向于 $+\infty$, 则函数必有下界, 零点个数取决于最小值的符号.

确定参数的必要范围后, 再在缩小的范围内证明充分性.

此外, 当精确计算困难时, 可利用不等式对函数进行夹逼或放缩.

定理 1.17 (零点存在性的比较判别) 设 I 是一个区间, $f(x)$ 在 I 上连续.

- 若存在定义在 I 上的函数 $g(x)$ 使得在 I 上恒有 $f(x)\geq g(x)$, 且 $g(x)$ 的最小值为正, 则 $f(x)$ 无零点.
- 若存在点 $x_1,x_2\in I$ 使得 $f(x_1)>0$ 且 $f(x_2)<0$, 则 $f(x)$ 必有零点. 在寻找 x_1,x_2 时, 常用切线放缩, 如 $\ln x\leq x-1$ 或泰勒展开简化函数表达式.

证明 第一条中, 设 m 为 g 在 I 上的正最小值. 对任意 $x\in I$, 有 $f(x)\geq g(x)\geq m>0$, 因而 $f(x)$ 不可能等于 0.

第二条中, 不妨设 $x_1<x_2$. 因 I 是区间, $[x_1,x_2]\subset I$. 函数 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, 且 $f(x_1)>0, f(x_2)<0$. 由介值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(\xi)=0$. □

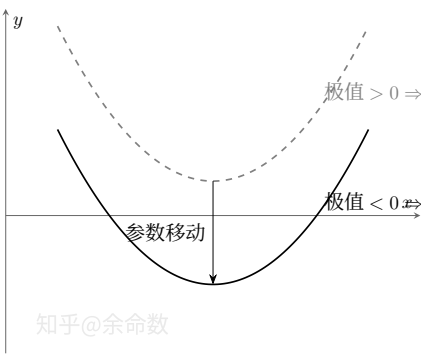


图 1.19　参数变化导致函数图像竖向平移, 极值点相对于 x 轴的位置决定零点个数

1.11.4 不等式中的存在性问题

与恒成立对应的是存在性问题, 即特称命题 $\exists x_0 \in I, f(x_0) \geq g(x_0)$.
我们有如下对应关系.

- 恒成立 $f(x) \geq 0$ 等价于 $[f(x)]_{\min} \geq 0$(最坏的情况都要达标);
- 存在性 $f(x) \geq 0$ 等价于 $[f(x)]_{\max} \geq 0$(只要最好的情况达标即可).

例题 1.69 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$. 问是否存在区间 $[0,2]$ 内的 x, 使得 $f(x) > a$? 求 a 的范围.

解 问题等价于 $a < [f(x)]_{\max}$,其中 $x \in [0,2]$. 求导得 $f'(x) = 3x^2-3 = 3(x-1)(x+1)$. 在 $[0,2]$ 上, 驻点为 $x = 1$.

- $x \in (0,1)$、$f'(x) < 0$、f 递减;
- $x \in (1,2)$、$f'(x) > 0$、f 递增.

极小值 $f(1) = 1 - 3 = -2$. 端点值 $f(0) = 0$, $f(2) = 8 - 6 = 2$. 比较可知, 最大值 $M = \max\{0, -2, 2\} = 2$. 因此, 只要 $a < 2$, 就存在这样的 x.

1.11.5 隐零点与双变量问题初步

在处理高阶导数或复杂函数时, 我们有时会遇到导函数的零点 x_0 无法通过方程 $f'(x) = 0$ 显式解出的情况, 如方程 $e^x = 2x + 3$. 此时需采用设而不求的策略.

1.11.5.1 隐零点代换(设而不求)

若 x_0 是方程 $f'(x) = 0$ 的根, 则有关系式 $f'(x_0) = 0$. 在后续求最值或证明不等式时, 将目标式中的参数, 或超越项用含有 x_0 的代数式替换, 从而把双变量问题(x 与参数)转化为关于 x_0 的单变量函数问题.

例题 1.70 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ $(a > e)$ 有两个零点 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. 证明 $x_1 + x_2 > 2$.

证明 由 $f(x) = 0$ 可知 $e^{x_1} = ax_1$ 且 $e^{x_2} = ax_2$. 即 x_1, x_2 是方程 $\frac{e^x}{x} = a$ 的两个根.

令 $g(t) = \frac{e^t}{t}$. 求导得 $g'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}$. $t = 1$ 是 $g(t)$ 的极小值点. 由于 $a > e = g(1)$, 直线 $y = a$ 与曲线 $y = g(t)$ 确有两个交点, 分布在 $t = 1$ 两侧, 即 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

我们用对称点法. 要证 $x_1+x_2 > 2$,即证 $x_2 > 2-x_1$. 由于 $x_1 < 1$,故 $2-x_1 > 1$. x_2 和 $2 - x_1$ 均落在区间 $(1, +\infty)$ 内. 在该区间上, 函数 $g(t)$ 单调递增. 因此, 证明 $x_2 > 2 - x_1$ 等价于证明 $g(x_2) > g(2 - x_1)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

已知 $g(x_2)=a=g(x_1)$, 故只需证明 $g(x_1)>g(2-x_1)$. 代入表达式, 即证

$$\frac{e^{x_1}}{x_1}>\frac{e^{2-x_1}}{2-x_1}\iff\frac{2-x_1}{x_1}>e^{2-2x_1}$$

令 $t=x_1\in(0,1)$. 不等式两边取对数, 变形为 $\ln(2-t)-\ln t>2-2t$. 设 $H(t)=\ln(2-t)-\ln t-2+2t$. 求导得

$$H'(t)=\frac{-1}{2-t}-\frac{1}{t}+2=\frac{-2+2t(2-t)}{t(2-t)}=\frac{-2(t-1)^2}{t(2-t)}$$

对于 $t\in(0,1)$, 恒有 $H'(t)<0$. 故 $H(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

$$H(t)>H(1)=\ln 1-\ln 1-2+2=0$$

证毕. □

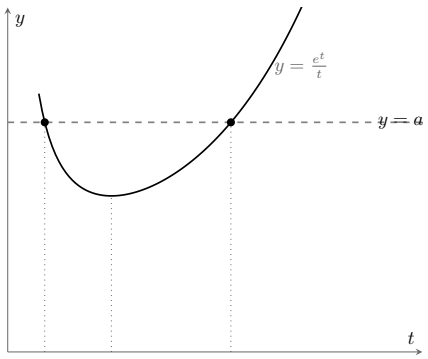


图 1.20　利用函数的单调性与对称性处理隐零点问题

1.11.6 高考真题选讲

以下四题选自历年高考真题, 覆盖零点分析、不等式恒成立与分类讨论的常见考法.

例题 1.71 (2017 年全国 □ 卷理科数学第 21 题) 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geq 0$.

1. 求 a;
2. 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0, 且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

解 (1) 求 a

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$f(x)=x(ax-a-\ln x)\,(x>0), f(x)\geq 0$ 等价于 $h(x)=ax-a-\ln x\geq 0. h'(x)=a-\dfrac{1}{x}$. 当 $a\leq 0$ 时 h 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, $h(x)<h(1)=0$ 对 $x>1$ 成立, 矛盾, 故 $a>0. h$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 处取最小值. 由 $h(1)=0$ 知 $\dfrac{1}{a}=1$, 故 $a=1$.

(2) 证明 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$

$f(x)=x^2-x-x\ln x, f'(x)=2x-2-\ln x$. 令 $t(x)=2x-2-\ln x, t'(x)=2-\dfrac{1}{x}. t$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上递减, 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上递增, $t(\frac{1}{2})=\ln 2-1<0$, $t(\frac{1}{e^2})=\frac{2}{e^2}>0$, 故 t 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上有唯一零点 x_0, 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上有唯一零点 $x_2. f'(x)>0$ 在 $(0,x_0)$ 上成立, $f'(x)<0$ 在 (x_0,x_2) 上成立, 故 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极大值点.

由 $2x_0-2-\ln x_0=0$ 得 $\ln x_0=2x_0-2$, 故

$$f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0(2x_0-2)=x_0-x_0^2$$

由 $x_0<\dfrac{1}{2}$ 得 $f(x_0)<\dfrac{1}{4}=2^{-2}$. 由 $f'(\frac{1}{e})<0$ 知 $x_0<\frac{1}{e}$, 故 $f(x_0)>f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$.

例题 1.72 (2019 年全国 □ 卷理科数学第 20 题) 已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

1. $f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;
2. $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

解 (1)$f'(x)$ 的极大值点

$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}, f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$. 令 $g(x)=f''(x)$, 则 $g'(x)=-\cos x-\dfrac{2}{(1+x)^3}<0$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 故 $f''(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减. 由 $f''(0)=1>0$ 与 $f''(\frac{\pi}{2})<0$ 及零点存在定理, $f''(x)$ 在 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 上存在唯一零点 x_0. 因此 $f'(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上递增, 在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上递减, x_0 为唯一极大值点.

(2)$f(x)$ 的零点个数

在 $(-1,0)$ 上 $f'(x)$ 递增, $f'(x)<f'(0)=0$, f 递减, $f(x)>f(0)=0$.

在 $(0,x_0)$ 上 $f'(x)>f'(0)=0$, f 递增. 在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上 f' 递减, $f'(x_0)>0$, $f'(\frac{\pi}{2})<0$, 故 f' 在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上有唯一零点 $x_1. f$ 在 (x_0,x_1) 上递增, 在 $(x_1,\frac{\pi}{2})$ 上递减. $f(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$.

在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$, f 递减. $f(\pi)=-\ln(1+\pi)<0$, 故 f 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上有唯一零点.

当 $x\geq\pi$ 时 $\sin x\leq 1<\ln(1+x)$, $f(x)<0$, 无零点.

$f(x)$ 的零点为 $x=0$ 及 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 中的唯一零点, 共 2 个.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.73 (2019 年全国 □ 卷理科数学第 20 题) 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

1. 讨论 $f(x)$ 的单调性;
2. 是否存在 a,b, 使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1? 若存在, 求出 a,b 的所有值; 若不存在, 说明理由.

解 (1) 单调性

$f'(x)=6x^2-2ax=6x\left(x-\dfrac{a}{3}\right)$.

$a=0$: $f'(x)\geq 0$, f 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

$a>0$: f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{a}{3},+\infty)$ 上单调递增, 在 $(0,\frac{a}{3})$ 上单调递减.

$a<0$: f 在 $(-\infty,\frac{a}{3})$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{a}{3},0)$ 上单调递减.

(2) 存在性讨论

$a\leq 0$: f 在 $[0,1]$ 上单调递增.$f(0)=b=-1$, $f(1)=2-a+b=1$, 解得 $a=0,b=-1$.

$a\geq 3$ ($\frac{a}{3}\geq 1$): f 在 $[0,1]$ 上单调递减.$f(0)=b=1$, $f(1)=2-a+b=-1$, 解得 $a=4,b=1$.

$0<a<3$ ($0<\frac{a}{3}<1$): f 在 $[0,\frac{a}{3}]$ 上递减, 在 $[\frac{a}{3},1]$ 上递增. 最小值 $f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}+b=-1$. 最大值为 b 或 $2-a+b$. 若 $b=1$ 则 $a=3\sqrt[3]{2}>3$, 矛盾. 若 $2-a+b=1$ 则 $a=0$ 或 $\pm 3\sqrt{3}$, 均与 $0<a<3$ 矛盾.

存在两组解: $(a,b)=(0,-1)$ 或 $(4,1)$.

例题 1.74 (2017 年全国 □ 卷理科数学第 21 题) 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

1. 讨论 $f(x)$ 的单调性;
2. 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

解 (1) 单调性

$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1$.

$a=0$: $f'(x)=-2e^x-1<0$, f 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减.

$a>0$: $f'(x)=2a\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\left(e^x-\frac{1}{a}\right)$, 零点为 $x=\ln\frac{1}{a}$.f 在 $(-\infty,\ln\frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\ln\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增.

$a<0$: $f'(x)<0$ 恒成立, f 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减.

(2) 求 a 的取值范围

$a\leq 0$: f 单调递减, 至多一个零点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$a>0$: f 在 $x=\ln\frac{1}{a}$ 处取最小值. 当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$, 故有两个零点当且仅当 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$.

$$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+1-\frac{2}{a}-\ln\frac{1}{a}=1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}$$

令 $t=\frac{1}{a}$, 需 $1-t-\ln t<0$, 即 $\ln t+t-1>0$. 令 $g(t)=\ln t+t-1$、$g'(t)=\frac{1}{t}+1>0$、$g(1)=0$, 故 $g(t)>0$ 当且仅当 $t>1$, 即 $0<a<1$.

所求 a 的取值范围是 $(0,1)$.

1.12 高阶导数与泰勒展开初步

知乎@余命数

前几章主要用一阶导数 $f'(x)$ 研究函数的单调性与极值. 一阶导数刻画瞬时变化率, 几何上对应切线斜率. 本章引入高阶导数, 特别是二阶导数 $f''(x)$, 用它分析函数图像的弯曲程度(凹凸性).

泰勒公式是用多项式逼近复杂函数的经典工具. 它把初等数学里的一次函数、二次函数推广到任意次数, 也为不等式证明提供了一种通用方法.

1.12.1 高阶导数与函数的凹凸性

1.12.1.1 高阶导数的定义

设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 仍然可导. 我们称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**, 记作 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$. 类似地, 若二阶导数仍可导, 则其导数称为 $f(x)$ 的**三阶导数**, 记作 $f'''(x)$ 或 $f^{(3)}(x)$.

若用 $s(t)$ 表示物体运动的位移, 则 $s'(t)$ 是瞬时速度, $s''(t)$ 是瞬时加速度.

从几何上看, $f''(x)$ 描述了切线斜率 $f'(x)$ 变化的快慢.

- 若 $f''(x)>0$, 说明斜率 $f'(x)$ 单调递增, 曲线向上弯曲.
- 若 $f''(x)<0$, 说明斜率 $f'(x)$ 单调递减, 曲线向下弯曲.

1.12.1.2 函数的凹凸性

二阶导数直接决定函数图像的弯曲方向, 我们把它称为凹凸性.

定义 1.22 (凹凸性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

- **下凸 (Convex)**. 若图像上任意两点连成的弦始终位于这段曲线的**上方**, 则称 f 在 I 上是**下凸**的, 图像形如 $\cup$.
- **上凸 (Concave)**. 若图像上任意两点连成的弦始终位于这段曲线的**下方**, 则称 f 在 I 上是**上凸**的, 图像形如 $\cap$.

注 1.14
国内外教材对“凹”与“凸”的中文命名常有差异. 为避免歧义, 本节主要关注图像的几何形状, 即 $\cup$ 型与 $\cap$ 型.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 1.18 (凹凸性判定法则) 设 $f(x)$ 在区间 I 上具有二阶导数.

- 若在 I 内恒有 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 的图像是**下凸**的 ($\cup$).
- 若在 I 内恒有 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 的图像是**上凸**的 ($\cap$).

证明 任取 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1<x_2$, 再取 $x \in (x_1, x_2)$. 若 $f''(x)>0$ 在 I 内恒成立, 则由函数单调性的判定法, $f'(x)$ 在 I 上严格递增. 分别在 $[x_1, x]$ 与 $[x, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理, 可得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\eta_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\eta_2),$$

其中 $\eta_1 \in (x_1, x), \eta_2 \in (x, x_2)$. 因 $\eta_1<\eta_2$, 故 $f'(\eta_1)<f'(\eta_2)$, 从而

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

整理得

$$f(x)<\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

即曲线在任意弦的下方, 图像为下凸. 若 $f''(x)<0$, 则 f' 严格递减, 上述不等式方向全部反向, 曲线在任意弦的上方, 图像为上凸. □

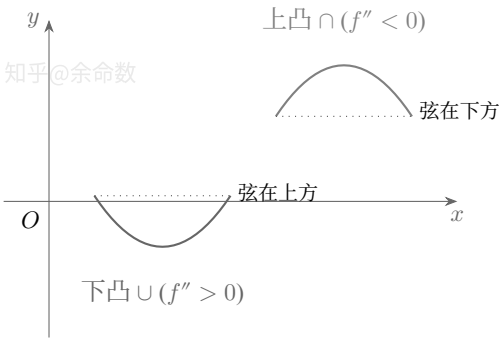


图 1.21　函数凹凸性与弦的位置关系

1.12.1.3 拐点

定义 1.23 (拐点) 连续曲线 $y=f(x)$ 上凹凸性发生改变的点, 称为**拐点**.

若 $f''(x)$ 存在, 则 $f''(x_0)=0$ 是点 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点的**必要条件**. 判定拐点时, 我们检查 $f''(x)$ 在 x_0 两侧是否**变号**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.12.1.4 极值的第二充分条件

利用二阶导数, 我们可以在不列出单调性表格的情况下判断一个驻点是极大值点还是极小值点.

定理 1.19 (极值的第二充分条件) 设函数 f 在 x_0 的某邻域内一阶可导, $f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)$ 存在.

- 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 是**极小值**(图像 $\cup$ 且切线水平).
- 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 是**极大值**(图像 $\cap$ 且切线水平).
- 若 $f''(x_0)=0$, 该判定法失效, 需回到单调性分析.

知乎@余命数

知乎@余命数

证明 我们用二阶导数的定义. 若 $f''(x_0)>0$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0)>0.$$

因此存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|h|<\delta$ 时,

$$\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}>0.$$

又 $f'(x_0)=0$, 所以当 $0<h<\delta$ 时 $f'(x_0+h)>0$, 当 $-\delta<h<0$ 时 $f'(x_0+h)<0$. 于是 f 在 x_0 左侧单调递减, 在 x_0 右侧单调递增, 故 $f(x_0)$ 为极小值.

若 $f''(x_0)<0$, 同理可得 $f'(x_0+h)>0$ 对 $h<0$ 成立, $f'(x_0+h)<0$ 对 $h>0$ 成立, 因而 $f(x_0)$ 为极大值. 当 $f''(x_0)=0$ 时, 上述符号推断失效; 例如 x^4 在 0 处有极小值, 而 x^3 在 0 处无极值. 因此需改用单调性分析. □

1.12.2 泰勒展开

一次函数与二次函数形式简单、易于计算. 对于 e^x、$\sin x$、$\ln x$ 等超越函数, 基本想法是用多项式去逼近, 让多项式在某一点处的函数值以及各阶导数值都与原函数相等. 次数越高, 近似程度越好.

1.12.2.1 逼近的逻辑

设我们要用一个多项式在 $x=0$ 附近逼近函数 $f(x)$.

知乎@余命数

- **零阶近似**.$P_0(x)=f(0)$, 只保证高度相同.
- **一阶近似**(切线).$P_1(x)=f(0)+f'(0)x$, 保证高度与斜率相同.
- **二阶近似**(抛物线).$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$, 保证高度、斜率、弯曲程度相同.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

沿着这个逻辑,若要求多项式 $P_n(x)$ 在 $x=0$ 处的 0 到 n 阶导数都与 $f(x)$ 相同,就得到泰勒公式.

1.12.2.2 带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

知乎@余命数

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有 n 阶导数. 那么

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n) \tag{1-17}$$

其中 $o(x^n)$ 称为**佩亚诺余项**,表示当 $x\to 0$ 时,误差是比 x^n 更高阶的无穷小.

知乎@余命数

1.12.2.3 常用函数的展开式

以下几个展开式在 $x\to 0$ 时成立.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \tag{1-18}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m-1}) \tag{1-19}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m}) \tag{1-20}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \tag{1-21}$$

知乎@余命数

1.12.3 泰勒近似在不等式证明中的应用

泰勒公式把超越函数写成多项式,我们还可以控制余项的符号,从而得到不等式.

知乎@余命数

1.12.3.1 切线放缩的再审视

我们已在 第一卷定理 5.14 中证明过 $e^x\geq 1+x$. 这其实是 e^x 的一阶泰勒展开.

- 因为 $(e^x)''=e^x>0$,函数下凸,图像位于切线 $y=1+x$ 上方,故 $e^x\geq 1+x$.
- 推广到一般情形,若 $f''(x)>0$,则 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

1.12.3.2 高阶展开的应用实例

用更高阶的展开,可以得到更精确的不等式.

例题 1.75 证明当 $x>0$ 时,$\sin x>x-\frac{x^3}{6}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 我们比较 $\sin x$ 与它的三阶泰勒多项式. 构造函数 $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$. 要证当 $x>0$ 时 $f(x)>0$. 对 $f(x)$ 逐次求导, 得

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x+x$$

$$f'''(x)=-\cos x+1$$

先分析 $f'''(x)$. 对于任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $\cos x\le 1$, 故 $f'''(x)=1-\cos x\ge 0$. 所以 $f''(x)$ 在 $x\ge 0$ 上单调递增. 又 $f''(0)=-\sin 0+0=0$, 因此当 $x>0$ 时, $f''(x)>0$.

同理, 由 $f''(x)>0$ 可知 $f'(x)$ 单调递增. 又 $f'(0)=\cos 0-1+0=0$, 所以当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$.

再由 $f'(x)>0$ 可知 $f(x)$ 单调递增. 又 $f(0)=\sin 0-0=0$, 所以当 $x>0$ 时, $f(x)>0$. 即 $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$ 成立. □

注 1.15
这个例子说明, 反复求导可以把关于 $\sin x$ 的问题化为常数与 0 的比较, 再反向推回. 这正是泰勒公式处理不等式时的常用路径.

1.13 泰勒公式与泰勒级数

多项式仅涉及有限次加法与乘法运算, 易于计算、求导与积分. 对于复杂的非多项式函数, 如 $e^x,\sin x,\ln x$, 可以找一个多项式在局部替代它.

我们的思路是, 若多项式 $P(x)$ 在某点 x_0 处与原函数 $f(x)$ 数值相等, 且一阶导数、二阶导数……直到 n 阶导数都相等, 则 $P(x)$ 在 x_0 附近与 $f(x)$ 高度一致.

1.13.1 多项式逼近的构造

考虑在点 $x_0=0$ 附近逼近函数 $f(x)$, 假设 $f(x)$ 在该点具有任意阶导数. 构造 n 次多项式

$$P_n(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

使得 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 0 到 n 阶导数相等.

$$P_n^{(k)}(0)=f^{(k)}(0),\quad k=0,1,\dots,n$$

对 $P_n(x)$ 逐次求导并令 $x=0$, 得

$$P_n(0)=c_0$$

$$P_n'(0)=c_1$$

$$P_n''(0)=2\cdot 1\cdot c_2$$

$$P_n'''(0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3$$

$$\vdots$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$P_n^{(k)}(0) = k! \cdot c_k$$

令 $P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, 解得系数 c_k:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

由此得到逼近多项式的显式表达. 把它推广到任意展开点 x_0, 即得到泰勒多项式.

定义 1.24 (泰勒多项式) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶导数. 称多项式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n **次泰勒多项式**. 当 $x_0 = 0$ 时, 称为 **麦克劳林多项式**.

知乎@余命数

1.13.2 泰勒公式与余项

多项式 $T_n(x)$ 与 $f(x)$ 之间的差为误差项(余项)$R_n(x)$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

该等式构成**泰勒公式**. 余项的大小决定逼近的精度.

定理 1.20 (泰勒中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 与 x 的闭区间上具有连续的 n 阶导数, 并在其内部具有 $n+1$ 阶导数, 则存在介于 x 与 x_0 之间的某个 ξ, 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

其中最后一项称为**拉格朗日余项**.

证明 当 $x = x_0$ 时结论显然成立. 以下设 $x \neq x_0$, 并不妨先考虑 $x > x_0$; 若 $x < x_0$, 只需把区间端点对调.

记

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k, \qquad R = f(x) - P_n(x).$$

构造辅助函数

$$\Phi(t) = f(t) - P_n(t) - R\left(\frac{t - x_0}{x - x_0}\right)^{n+1}.$$

知乎@余命数

由构造可知 $\Phi(x_0)=\Phi(x)=0$. 进一步地, 由泰勒多项式的系数选取可知

$$\Phi(x_0)=\Phi'(x_0)=\cdots=\Phi^{(n)}(x_0)=0.$$

对 Φ 在区间 $[x_0,x]$ 上反复应用罗尔定理. 第一次得到 Φ' 在 (x_0,x) 内有零点; 结合 $\Phi'(x_0)=0$ 再应用一次, 得到 Φ'' 在 (x_0,x) 内有零点; 如此重复 $n+1$ 次, 可得存在 $\xi\in(x_0,x)$ 使得

$$\Phi^{(n+1)}(\xi)=0.$$

而

$$\Phi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-R\frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

代入 $t=\xi$ 得

$$R=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

将 $R=f(x)-P_n(x)$ 代回, 即得所需公式. □

该定理是微分中值定理的推广 ($n=0$ 时即为拉格朗日中值定理). 余项表明, 若 $f^{(n+1)}(x)$ 有界, 且 $(x-x_0)$ 较小或 n 较大, 误差会迅速衰减.

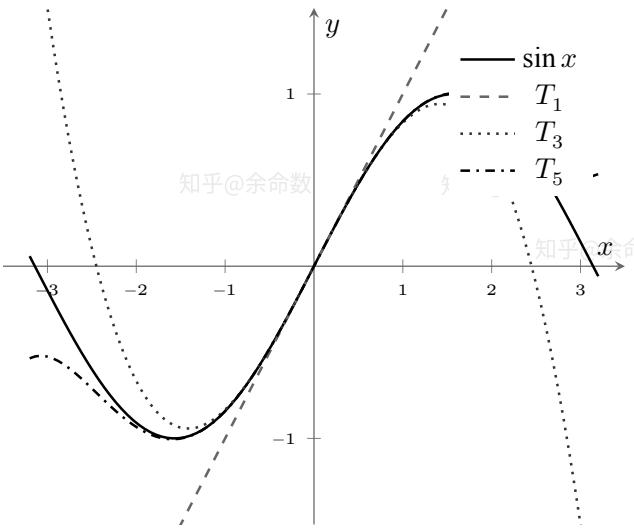


图 1.22 $\sin x$ 及其麦克劳林多项式 T_1,T_3,T_5 的图像. 随阶数 n 增加, 多项式与原函数的重合范围逐渐扩大.

1.13.3 泰勒级数

当 n 趋于无穷大时, 如果余项 $R_n(x)$ 的极限为 0, 则泰勒公式转化为一个无穷级数, 此时函数被级数**精确表示**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 1.25 (泰勒级数) 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有任意阶导数. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**.

泰勒级数的收敛域可能仅限于 x_0 附近的一个区间 (收敛区间). 在该区间外, 级数发散, 或虽收敛但不等于原函数.

1.13.4 常见函数的麦克劳林展开

以下展开式是分析学中的常用结论, 展开点均为 $x_0=0$.

1.13.4.1 指数函数

设 $f(x)=e^x$. 由 $f^{(n)}(x)=e^x$, 故 $f^{(n)}(0)=1$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

此级数对所有实数收敛, 且收敛速度快.

1.13.4.2 正弦与余弦函数

对于 $f(x)=\sin x$, 各阶导数循环为 $\cos x$、$-\sin x$、$-\cos x$、$\sin x$, ……; 在 $x=0$ 处依次取值 0、1、0、-1. 偶数项系数为 0, 奇数项符号交替.

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

同理可得余弦函数的展开(仅含偶次项).

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

这也解释了 $\sin x$ 为何是奇函数而 $\cos x$ 为何是偶函数, 前者仅含奇次幂, 后者仅含偶次幂.

知乎@余命数　知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.13.4.3 二项式级数

考虑 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, 其中 α 为任意实数. 其系数满足 $c_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, 记为广义组合数 $\binom{\alpha}{n}$.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (|x|<1)$$

当 α 为正整数时, 级数截断为有限项, 即牛顿二项式定理; 当 α 为负数或分数时, 得到无穷级数.

例题 1.76 利用泰勒展开计算 $\sqrt{1+x}$ 的近似多项式(保留至二次项).

解 取 $\alpha=1/2$.

- $n=0$: $c_0=1$.
- $n=1$: $c_1=\alpha=1/2$.
- $n=2$: $c_2=\frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}=\frac{-1/4}{2}=-1/8$.

因此

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

当 x 较小时, 该多项式是平方根函数的一个良好近似.

1.13.5 欧拉公式的导出

观察 $e^x,\sin x,\cos x$ 的级数形式. 若把虚数单位 $i(i^2=-1)$ 代入 e^x 的级数,得到.

$$\begin{aligned}
e^{ix}&=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\ldots\\
&=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\\
&=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\\
&=\cos x+i\sin x
\end{aligned}$$

这就是**欧拉公式**, $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. 它通过泰勒级数把指数函数与三角函数统一在复数域中.

知乎@余命数

1.14 洛必达法则与极限计算的系统策略

我们在 第1.3节 中已学过极限的多种计算方法. 但面对 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 这类不定式极限, 除少数特殊形式外, 我们还没有普适的处理工具.定理 1.15 给出的柯西中值定理是处理这类问题的理论基础.

本节从该定理导出**洛必达法则** (L'Hôpital's Rule), 用它把不定式极限的计算化为求导问题, 并给出按复杂度分层的极限求解策略.

1.14.1 洛必达法则

我们先从该法则的几何与代数背景出发, 说明导数的比值为什么能取代原函数的比值来求极限.

设 $x \to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同时趋向 0(或 ∞). 此时比值的极限取决于两者趋向目标的相对快慢, 而度量变化快慢的工具是**导数**.

当 $f(a) = g(a) = 0$ 时, 直接比较两个函数值, 即计算 $0/0$ 没有意义, 但我们可以比较两者趋近 0 的速度. 若 $f(x)$ 趋向 0 的速度是 $g(x)$ 的两倍, 则在 a 附近 $f(x)$ 的值大约也是 $g(x)$ 的两倍, 极限为 2. 而 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的变化速度就是 $f'(a)$. 于是我们提出猜想.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

我们用导数的定义对这一猜想作初步验证. 设 $f(a) = g(a) = 0$, f, g 在 $x = a$ 处可导, 且 $g'(a) \neq 0$. 由导数的定义, 当 x 充分接近 a 时, 有近似关系 $f(x) \approx f'(a)(x-a)$ 与 $g(x) \approx g'(a)(x-a)$. 两式相除, 公因子 $(x-a)$ 被消去, 得

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

于是洛必达法则的直观图像是, 用函数在 a 点附近的**切线(线性近似)**替代原函数来计算.

然而在实际问题中, $f'(a)$ 或 $g'(a)$ 可能不存在, 比值本身也可能仍是不定式. 这时我们需要更坚实的理论基础, 即**柯西中值定理**. 根据柯西中值定理, 对区间 $[a, x]$, 必存在一点 ξ 介于 a 与 x 之间, 使得

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用条件 $f(a)=g(a)=0$, 等式左边即简化为 $\frac{f(x)}{g(x)}$. 现在对等式两边取 $x\to a$ 的极限. 关键在于变量的传递.ξ 被 a 与 x 夹在中间 $(a<\xi<x)$, 当 x 逼近 a 时, ξ 也随之逼近 a. 因此 $\lim_{x\to a}$ 对 ξ 的作用等价于 $\lim_{\xi\to a}$. 于是得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

于是原函数的极限问题转化为导函数的极限问题, 其依据是柯西中值定理建立的函数增量比与导数比值之间的恒等关系.

我们把洛必达法则严格叙述如下. 在特定条件下, 两个函数之比的极限等于它们导数之比的极限, 我们借助导数(切线斜率)的信息推断函数值的趋近行为.

知乎@余命数

定理 1.21 (洛必达法则 (有限导数比版本)) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在有限点 a 的某去心邻域内可导, 且在该邻域内 $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$. 若满足以下两类条件之一:

1. $\frac{0}{0}$ **型**: $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 且 $\lim_{x\to a}g(x)=0$;
2. $\frac{\infty}{\infty}$ **型**: $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ 且 $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$;

并且极限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 存在且为有限实数, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1-22}$$

对单侧极限同样成立; $x\to\infty$ 的情形可通过变量代换 $t=1/x$ 化为有限点的单侧极限.

证明 我们用柯西中值定理来证明. 只证右极限 $x\to a^+$ 的情形, 左极限的证明完全类似, 双侧极限由左右极限一致即得.

对于 $\frac{0}{0}$ 型, 补充定义 $f(a)=g(a)=0$. 当 $x>a$ 且充分靠近 a 时, f,g 在 $[a,x]$ 上连续、在 (a,x) 内可导. 由柯西中值定理, 存在 $\xi\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

知乎@余命数

当 $x\to a^+$ 时有 $\xi\to a^+$, 因而上式右端趋于 A.

对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 任取 $\varepsilon>0$. 由 $\frac{f'}{g'}\to A$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $a<u<a+\delta$ 时,

$$\left|\frac{f'(u)}{g'(u)}-A\right|<\varepsilon.$$

固定一点 $c \in (a, a+\delta)$. 当 $x \in (a, c)$ 时，在 $[x, c]$ 上应用柯西中值定理，存在 $\xi \in (x, c) \subset (a, a+\delta)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

因而该增量比与 A 的距离小于 ε. 又

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{g(x)-g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

当 $x \to a^+$ 时, 由 $g(x) \to \infty$ 得 $\frac{g(x)-g(c)}{g(x)} \to 1$ 且 $\frac{f(c)}{g(x)} \to 0$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le{}& \left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - A\right|\left|\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}\right| \\ &+ |A|\left|\frac{g(x)-g(c)}{g(x)} - 1\right| + \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right|.\end{aligned}$$

令 $x \to a^+$ 后右端上极限不超过 ε. 由于 ε 任意, 得 $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$.

若讨论 $x \to \infty$, 令 $t = 1/x$, 则 $x \to \infty$ 化为 $t \to 0^+$, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(1/t) \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(1/t) = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}.$$

因此无穷远处的有限导数比情形也归结为上述结论. □

1.14.1.1 基本应用实例

例题 1.77 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 我们用它演示洛必达法则的操作. 要注意这里有循环论证之嫌, 三角函数的求导公式本身已依赖这个重要极限.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

例题 1.78 计算 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

这表明, 对数函数的增长速度远慢于幂函数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.79 计算 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$（$n$ 为正整数）.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 我们连续使用 n 次洛必达法则, 直至分子变为常数.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

这表明, 指数函数的增长速度远快于任何多项式函数.

1.14.2 法则的滥用与陷阱

洛必达法则的适用范围有限, 盲目使用会导致错误或死循环.

1.14.2.1 非不定式误用

法则只适用于 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 若把它用于非不定式, 就会给出错误结果.

- **错误示例**: 计算 $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{x+2}$.
- **误解**: $\lim\frac{(x+1)'}{(x+2)'}=\lim\frac{1}{1}=1$.
- **正解**: 直接代入得 $\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$.

1.14.2.2 导数极限不存在

若 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在（振荡）, 原极限仍可能存在. 此时洛必达法则失效, 我们改用夹逼定理或定义法.

例题 1.80 计算 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

解 原极限存在且等于 1, 由 $|\sin x|\le1$ 与夹逼定理即得. 但若改用洛必达法则, 则得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

由于 $\cos x$ 在 ∞ 处振荡, 该极限不存在. 此时法则失效.

1.14.2.3 循环与繁琐

对某些函数, 如 $\sqrt{x^2+1}$, 求导后形式可能更复杂, 甚至循环出现, 算不出结果. 而对因式分解就能解决的问题, 如 $\frac{x^2-1}{x-1}$, 用洛必达法则反而笨拙.

1.14.3 其他类型的不定式

对于 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0 等非标准型不定式, 必须先通过代数变形将其转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.14.3.1 $0\cdot\infty$ 型

此型的处理办法是将乘积 $f\cdot g$ 变形为商 $\frac{f}{1/g}$ 或 $\frac{g}{1/f}$. 通常选择求导较简单的函数放在分子, 较复杂的倒数放在分母.

例题 1.81 计算 $\lim_{x\to0^+} x\ln x$.

解 这是 $0\cdot(-\infty)$ 型. 将 x 下放:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\quad(\text{型为}\frac{\infty}{\infty})$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

1.14.3.2 $\infty-\infty$ 型

此型的处理办法是通分、提取公因式或有理化, 合并为一个分式.

例题 1.82 计算 $\lim_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\quad(\text{型为}\frac{0}{0})$$

连续使用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

1.14.3.3 幂指函数型 ($1^\infty, 0^0, \infty^0$)

此型的处理办法是**取对数**, 利用恒等式 $y=e^{\ln y}$. 设 $y=f(x)^{g(x)}$, 则 $\ln y=g(x)\ln f(x)$, 转化为 $0\cdot\infty$ 型.

例题 1.83 计算 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

解 令 $y=(1+\frac{1}{x})^x$, 取对数:

$$\ln y=x\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}$$

令 $t=1/x$, 当 $x\to\infty$ 时 $t\to0$:

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\overset{L'H}{=}\lim_{t\to0}\frac{1/(1+t)}{1}=1$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故 $\lim \ln y = 1$, 原极限 $\lim y = e^1 = e$.

1.14.4 极限求解的策略总览

知乎@余命数

不同类型的极限问题适用不同的解法. 按方法的复杂度与适用场景, 常用的求解策略可分为三个层次.

1.14.4.1 方法分层

1. 整体观察层

   - **直接代入**: 先检查是否为不定式. 若分母不为零, 连续性保证极限值等于函数值.
   - **初等变形**: 包括因式分解、分子/分母有理化、提取最高次幂等, 适用于有理分式或简单根式.
   - **重要极限**: 利用标准结果, 如 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 或 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

2. 精度替换层

   - **等价无穷小替换**: $x \to 0$ 时利用 $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x$ 等替换. 计算简便, 但通常仅适用于**乘除因子**, 加减法中使用需谨慎, 以防精度丢失.
   - **夹逼定理**: 处理含振荡项, 如 $\sin \frac{1}{x}$ 或无法直接计算的极限, 通过放缩确立上下界.

3. 系统求解层

   - **洛必达法则**: 适用于满足条件的 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 求导后形式简化时最为有效.
   - **泰勒展开**: 适用于 $x \to 0$ 且涉及加减消项的复杂组合. 相比等价无穷小, 能精确控制误差阶数.

1.14.4.2 实例对比

例题 1.84 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.

解 法一采用洛必达法则. 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 满足法则条件.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

此过程需要连续使用三次洛必达法则.

法二采用泰勒展开. 利用 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 代入分子:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

通过保留三阶项, 直接观察到分子的阶数特征.

1.14.4.3 方法的选择建议

- 对于**乘除形式**的因子, 优先考虑**等价无穷小替换**, 以简化表达式.
- 对于**加减形式**的不定式, 若求导后各项变得简单, 可使用**洛必达法则**.
- 对于**高阶无穷小相抵消**, 如 $x-\sin x$ 或涉及复合函数的复杂极限, **泰勒展开**通常是最稳健和系统的方法.

1.15 必要性探路与端点分析法 *

在运用导数处理不等式恒成立问题时, 例如求参数范围使得 $f(x)\geq k$ 在区间 I 上恒成立, 经典做法是求出 $f(x)$ 在区间 I 上的全局最小值 $f_{\min}$, 并要求 $f_{\min}\geq k$. 这种做法属于**充分性**构造, 直接验证最不利情形下的不等式成立.

许多问题中函数的导函数繁琐, 驻点不易求解, 或最值点落在端点. 此时全局最小值的求取变得困难或不可行, 需要换一种角度. **必要性分析**是这样的途径.

必要性分析反向提问, 若不等式恒成立, 它在哪些特殊点必须满足何种条件. 这种从结论反推初始条件的思路, 关注函数在边界点处的初值与变化趋势. 当临界情形发生在区间端点时, 该思路尤为有效, 称为**端点分析法**.

1.15.1 端点分析法则

考察如下模型. 已知函数 $g(x)$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上满足 $g(m)=0$, 要求证或求参使得 $g(x)\geq 0$ 在此区间上恒成立.

此时函数图像从点 $(m,0)$ 出发. 要使后续函数值不小于零, 函数在出发点不能有向下的趋势, 即初始变化率必须为非负. 进一步地, 若函数的二阶导数恒正, 即变化率本身单调递增, 则这个初始趋势就足以决定函数的全程行为.

定理 1.22 (端点分析法则) 设函数 $g(x)$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上连续, 在 $(m,+\infty)$ 上可导, 右导数 $g'_+(m)$ 存在, 且 $g'(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递增并满足 $g'(x)\geq g'_+(m)$. 若 $g(m)=0$, 则不等式 $g(x)\geq 0$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上恒成立的充分必要条件是 $g'_+(m)\geq 0$.

证明 导函数 $g'(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递增且不低于端点右导数的条件, 可以通过 $g''(x)\geq 0$ 在 $(m,+\infty)$ 上恒成立并结合 $g'_+(m)$ 存在来保证.

充分性证明（证明 $g'_+(m)\geq 0 \implies g(x)\geq 0$）. 已知 $g'(x)\geq g'_+(m)$, 且 $g'_+(m)\geq 0$. 对于任意 $x>m$, 可得 $g'(x)\geq 0$. 即函数 $g(x)$ 在整个区间 $[m,+\infty)$ 上单调不减. 因此, 对于任意 $x\in[m,+\infty)$, 恒有 $g(x)\geq g(m)$. 结合已知条件 $g(m)=0$, 得 $g(x)\geq 0$ 在 $[m,+\infty)$ 上恒成立.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

必要性证明(证明 $g(x)\geq 0 \implies g'_+(m)\geq 0$). 回归右导数的定义. 函数 $g(x)$ 在端点 m 处的右导数定义为

$$g'_+(m)=\lim_{x\to m^+}\frac{g(x)-g(m)}{x-m}$$

根据题设, 对于所有 $x>m$, 恒有 $g(x)\geq 0$ 且 $g(m)=0$. 因此差商的分子 $g(x)-g(m)=g(x)\geq 0$, 分母 $x-m>0$. 故整个差商表达式 $\frac{g(x)-g(m)}{x-m}\geq 0$. 若该差商的极限为负数 $-\alpha$ ($\alpha>0$), 则按极限定义, 当 x 充分靠近 m 且 $x>m$ 时差商应小于 $-\alpha/2$, 这与差商恒非负矛盾. 因此 $g'_+(m)=\lim\limits_{x\to m^+}\frac{g(x)-g(m)}{x-m}\geq 0$.

充分性与必要性均得以证明. □

知乎@余命数

注 1.16 (物理学释义)
用物理学语言说, 一个从原点出发的质点, 若其初始速度非负, 且其加速度始终为正, 即速度单调递增, 则该质点将永远不会运动到坐标轴的负半轴. 此定理把涉及整个区间的恒成立问题, 转化为只需检验端点处导数值的问题, 简化了分析.

知乎@余命数

1.15.2 应用与思辨

例题 1.85 (2024 年全国新高考 I 卷) 已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

1. 若 $b=0$, $f'(x)\geq 0$, 求 a 的取值范围.
2. 证明 $f(x)$ 的图像是中心对称图形. 若不等式 $f(x)>-2$ 成立的充分必要条件是 $1<x<2$, 求 b 的取值范围.

知乎@余命数

解 函数的定义域由 $\frac{x}{2-x}>0$ 确定, 解得 $x\in(0,2)$.

当 $b=0$ 时, $f(x)=\ln x-\ln(2-x)+ax$. 其导函数为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+a$. 要使 $f'(x)\geq 0$ 在 $(0,2)$ 上恒成立, 等价于 $a\geq -(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x})$ 恒成立. 令 $h(x)=-(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x})$. 需求 a 大于等于 $h(x)$ 的最大值. 对 $h(x)$ 求导得 $h'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(2-x)^2}$. 令 $h'(x)=0$, 得 $x=1$. 易知 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值, $h_{\max}=h(1)=-2$. 故 a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$.

为证明 $f(x)$ 的图像是中心对称图形, 考察 $f(x)+f(2-x)$.

$$\begin{aligned}f(x)+f(2-x)&=\left(\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3\right)\\&\quad+\left(\ln\frac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3\right)\\&=0+(ax+2a-ax)+(b(x-1)^3-b(x-1)^3)\\&=2a\end{aligned}$$

知乎@余命数

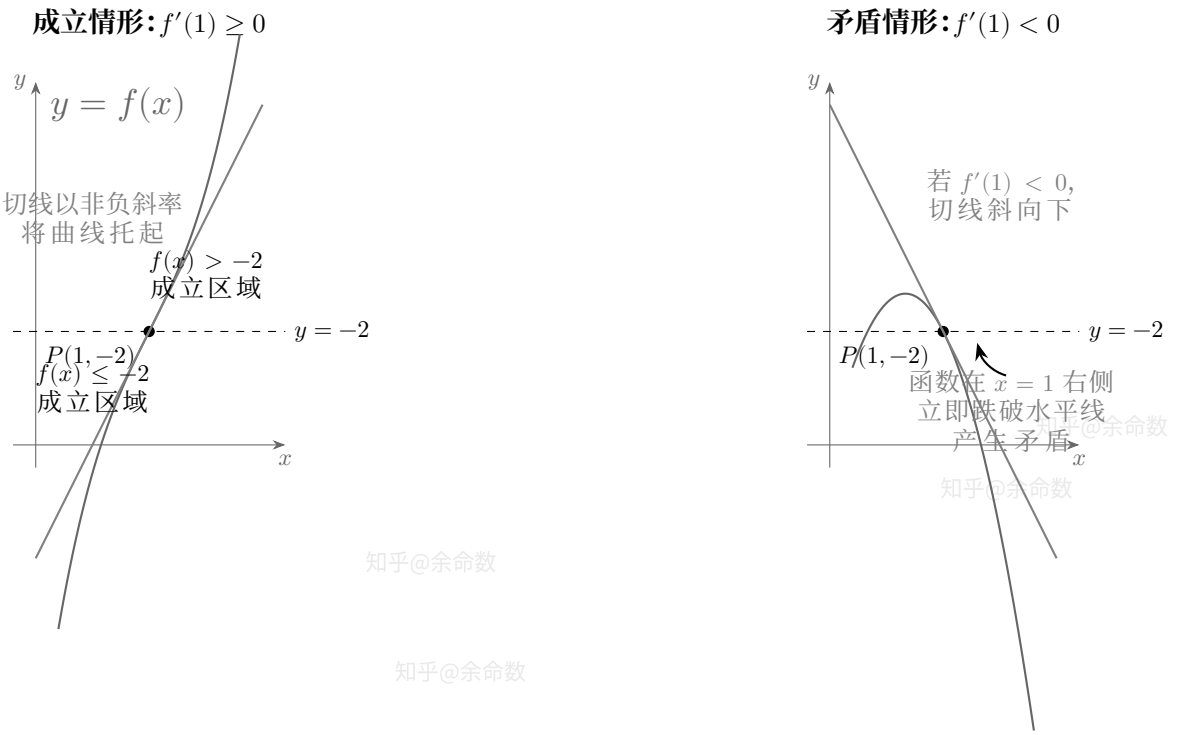


图 1.23　在临界点 $P(1,-2)$, 函数的初始趋势 $f'(1)$ 决定了其能否满足题设条件

因此, $f(x)$ 的图像关于点 $(1,a)$ 中心对称.

接着分析不等式条件. 题设“$f(x) > -2$ 成立的充要条件是 $x \in (1,2)$”蕴含了三个信息. (1) 对所有 $x \in (1,2)$, $f(x) > -2$ 成立. (2) 对所有 $x \in (0,1]$, $f(x) \leq -2$ 成立. (3) 在临界点 $x = 1$ 处, 由连续性可知必有 $f(1) = -2$.

由 $f(1) = -2$ 可确定参数 a 的值. $f(1) = \ln \frac{1}{1} + a(1) + b(1-1)^3 = a$. 故 $a = -2$.

此时条件明确. 当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处函数值为 -2, 在 $(1,2)$ 上函数值大于 -2, 在 $(0,1]$ 上函数值不大于 -2. 故函数 $f(x)$ 必须在其定义域 $(0,2)$ 内是严格单调递增的.

因此, 问题转化为求解参数 b 的范围, 使得当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上严格单调递增. 这等价于其导函数 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0,2)$ 上恒成立, 且等号仅在孤立点处取得.

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + a + 3b(x-1)^2$. 代入 $a = -2$ 得, $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - 2\right) + 3b(x-1)^2 \geq 0$.

化简括号内的表达式. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - 2 = \frac{2-x+x-2x(2-x)}{x(2-x)} = \frac{2(1-2x+x^2)}{x(2-x)} = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}$.

于是, 不等式变为 $\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} + 3b(x-1)^2 \geq 0$. 当 $x \in (0,2)$ 且 $x \neq 1$ 时, 可约去正因子 $(x-1)^2$, 得到 $\frac{2}{x(2-x)} + 3b \geq 0 \implies 3b \geq -\frac{2}{x(2-x)}$.

此不等式需对所有 $x \in (0,1) \cup (1,2)$ 恒成立. 因此, $3b$ 必须大于或等于函数 $k(x) = -\frac{2}{x(2-x)}$ 在该定义域上的最大值(上确界).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $p(x)=x(2-x)$, 其在 $x=1$ 处取得最大值 $p(1)=1$. 故 $p(x)$ 在 $(0,2)$ 内的值域为 $(0,1]$. 因此, 函数 $k(x)=-2/p(x)$ 的值域为 $(-\infty,-2]$. 其上确界为 -2.

故须有 $3b\geq -2$, 即 $b\geq -\frac{2}{3}$.

最后检验, 当 $b\geq -2/3$ 时, $f'(x)=(x-1)^2\left(\frac{2}{x(2-x)}+3b\right)$. 由于 $\frac{2}{x(2-x)}\geq 2$, 故括号内表达式 $\geq 2+3(-\frac{2}{3})=0$. 等号仅在 $x=1$ 且 $b=-2/3$ 时成立. 因此 $f'(x)\geq 0$ 恒成立, 且仅在 $x=1$ 取零, 满足严格单调递增的条件.

b 的取值范围是 $[-\frac{2}{3},+\infty)$.

例题 1.86 (2023 年全国高考甲卷) 已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

1. 若 $a=8$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
2. 若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

知乎@余命数

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\frac{\pi}{2})$. 注意到 $\frac{\sin x}{\cos^3 x}=\tan x\sec^2 x$, 其导数为 $\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)'=\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$, 故

$$f'(x)=a-\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

知乎@余命数 知乎@余命数

当 $a=8$ 时, $f'(x)=8-\dfrac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$. 令 $g(x)=\dfrac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$, 并作代换 $t=\sin x\in(0,1)$, 得 $h(t)=\dfrac{1+2t^2}{(1-t^2)^2}$. 求导得 $h'(t)=\frac{4t(2+t^2)}{(1-t^2)^3}>0$ 于 $(0,1)$, 故 h 严格递增, 从而 g 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上严格递增.

令 $f'(x)=0$, 即 $g(x)=8$, 得

$$\frac{1+2\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)^2}=8\implies 8\sin^4 x-18\sin^2 x+7=0.$$

知乎@余命数

解得 $\sin^2 x=\frac{1}{2}$(另一根 $\sin^2 x=7/4$ 舍去), 在定义域内唯一解为 $x=\frac{\pi}{4}$. 由 g 单调递增可知, 当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时 $g(x)<8$, $f'(x)>0$; 当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时 $g(x)>8$, $f'(x)<0$. 故 f 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上递增, 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上递减.

不等式 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立, 即 $ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}<2\sin x\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立. 构造 $G(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}-2\sin x\cos x$, 问题化为 $G(x)<0$ 恒成立. $\lim_{x\to 0^+}G(x)=0$; 虽 0 不在定义域内, 可将 G 连续延拓为 $G(0)=0$. 要求右侧函数值恒为负, 这给出右导数极限非正的必要条件.

$$G'(x)=a-\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}-2\cos(2x),\qquad \lim_{x\to 0^+}G'(x)=a-3.$$

因而必须 $a-3\leq 0$, 即 $a\leq 3$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再证 $a \le 3$ 充分. 只需验证 $a = 3$ 时 $G(x) < 0$ 恒成立(若 $a < 3$ 则 G 更小). 当 $a = 3$ 时, $G'(x) = 3 - \frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x} - 2\cos(2x)$. 令 $t = \cos^2 x \in (0,1)$, 则

$$k(t) = 5 - \frac{3-2t}{t^2} - 4t = 5 - \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t} - 4t.$$

$k'(t) = \frac{6}{t^3} - \frac{2}{t^2} - 4 = \frac{p(t)}{t^3}$, 其中 $p(t) = -4t^3 - 2t + 6$. 因 $p'(t) = -12t^2 - 2 < 0$ 且 $p(1) = 0$, 故对 $t \in (0,1)$ 有 $p(t) > 0$, 从而 $k'(t) > 0$, k 严格递增. 于是 $k(t) < \lim_{t\to 1^-} k(t) = 0$, 即 $G'(x) = k(\cos^2 x) < 0$. 故 G 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格递减;结合 $\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0$, 得 $G(x) < 0$.

因此 a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

1.15.3 极限的局部保号性 *

时常需要由函数在某点的极限性质, 推断其在极限点附近的性态. 一个基本事实是, 若函数无限趋近于一个非零常数, 则在充分靠近极限点的邻域内, 函数值的符号与极限值的符号一致. 这一结论把极限与函数的局部行为联系起来, 现给出严格证明.

想象一个变量 $f(x)$ 的值正在无限地逼近一个正数 $L = 5$. 即 $f(x)$ 与 5 之间的距离 $|f(x)-5|$ 可以变得任意小. 如果我们要求这个距离小于 1, 即 $|f(x)-5| < 1$, 那么 $f(x)$ 的值就必须被限制在区间 $(4,6)$ 之内. 这个区间内的所有数显然都是正数.

该原理表明, 只要函数收敛于一个非零极限, 总能取一个足够小的误差范围, 将函数值限制在一个不包含零的区间内. 将此直观形式化即得极限的局部保号性定理.

知乎@余命数

定理 1.23 (极限的局部保号性) 设函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限存在且等于 L.

- 若 $L > 0$, 则必然存在点 x_0 的一个去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$, 使得对于任意属于此邻域的 x, 恒有 $f(x) > 0$.
- 若 $L < 0$, 则必然存在点 x_0 的一个去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$, 使得对于任意属于此邻域的 x, 恒有 $f(x) < 0$.

证明 以 $L > 0$ 的情形为例证明, $L < 0$ 的情况完全类似.

目标是证明存在一个正数 δ, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$.

证明的要点在于恰当地选取 $\varepsilon - \delta$ 定义中的 ε. 取一个足够小的 ε, 使由不等式 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 确定的区间 $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ 完全位于 x 轴的上方, 即 $L - \varepsilon > 0$.

一个简洁有效的选择是令 $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$. 由于 $L > 0$, ε 是一个合法的正数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义, 对于选定的 $\varepsilon=L/2$, **必然存在**一个正数 δ, 使得当自变量 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 不等式

$$|f(x)-L|<\frac{L}{2}$$

恒成立.

将此绝对值不等式展开并在三边同加 L、化简, 得

$$\begin{aligned}-\frac{L}{2}<f(x)-L<\frac{L}{2} &\iff L-\frac{L}{2}<f(x)<L+\frac{L}{2} \quad (\text{两边加 } L)\\ &\iff \frac{L}{2}<f(x)<\frac{3L}{2}.\end{aligned}$$

由其左半部分及 $L>0$ 知 $\frac{L}{2}>0$, 故 $f(x)>\frac{L}{2}>0$, 直接证明了 $f(x)>0$.

若 $L<0$, 取 $\varepsilon=-\dfrac{L}{2}>0$. 同理可得在某个去心邻域内

$$\frac{3L}{2}<f(x)<\frac{L}{2}.$$

由于 $\frac{L}{2}<0$, 故 $f(x)<0$.

至此, 两个符号情形均已证明. 证毕. □

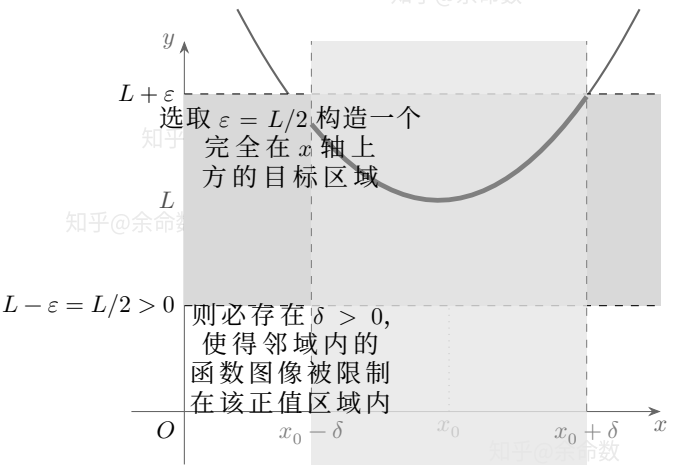


图 1.24 极限局部保号性的几何诠释

极限的局部保号性定理有一个重要推论, 处理的是极限与不等号的关系.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

推论 1.1 (极限的保不等式性) 设函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限存在. 如果在点 x_0 的某个去心邻域内, 恒有 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$$

同理, 若恒有 $f(x) \leq 0$, 那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq 0$.

证明 采用反证法. 假设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L < 0$. 根据刚刚证明的局部保号性定理, 若极限 L 为负, 则必然存在 x_0 的一个去心邻域, 使得对于此邻域内的所有 x, 都有 $f(x) < 0$.

将这个邻域与题设中使 $f(x) \geq 0$ 成立的去心邻域取交, 仍可得到一个非空的去心邻域. 在该交邻域内同一个 x 应同时满足 $f(x) < 0$ 与 $f(x) \geq 0$, 矛盾. 因此初始假设"$L < 0$"必定是错误的. 故必有 $L \geq 0$. 对 $f(x) \leq 0$ 的情形, 对 $-f(x)$ 应用刚证结论即可. □

注 1.17 (严格不等号的退化)
一个必须注意的细节是, 即使在邻域内恒有严格不等式 $f(x) > 0$, 其极限也只能保证是**非负的**, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$, 而不能保证是严格大于零的.
例如, 考虑函数 $f(x) = x^2$ 在 $x \to 0$ 时的极限. 对于任意去心邻域 $U^\circ(0, \delta)$, 恒有 $f(x) = x^2 > 0$. 然而其极限为 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

1.15.3.1 应用与思辨

极限的保不等式性虽然简单, 在许多证明中却是基石. 前文端点分析法则的论证, 也可用此推论重新表述其必要性部分.

在证明端点分析法则的必要性时, 曾用到下述事实, 若 $g(x) \geq 0$ 在 $[m, +\infty)$ 上恒成立且 $g(m) = 0$, 则右导数 $g'_+(m) \geq 0$. 证明过程如下.

$$g'_+(m) = \lim_{x \to m^+} \frac{g(x) - g(m)}{x - m}$$

我们论证了对于所有 $x > m$, 差商 $\frac{g(x)-g(m)}{x-m}$ 是一个非负的量. 接着, 由极限的保不等式性可得, 一个非负函数在 $x \to m^+$ 时的极限, 也必然是一个非负数.

$$\lim_{x \to m^+} \underbrace{\frac{g(x) - g(m)}{x - m}}_{\geq 0} \geq 0$$

这就是 $g'_+(m) \geq 0$ 的严格数学依据.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.15.4 方法的局限性与全局分析的回归

已认识到, 端点分析法的有效性严格依赖于函数一阶导数的单调性. 当此前提条件不被满足时, 该方法将由充分必要条件退化为仅具有必要性, 从而可能导出错误的结论.

端点分析法失效的根本原因在于函数的一阶导数 $g'(x)$ 在所考察的区间上不具备单调性. 考虑在区间 $[m,+\infty)$ 上, 函数 $g(x)$ 满足 $g(m)=0$ 的情形. 即使在端点处满足必要条件 $g'_+(m)\geq 0$, 若 $g'(x)$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内出现下降, 则可能存在以下过程:

- $g'(x)$ 的值在初始为正或零之后, 随 x 的增大而减小.
- 在区间的某个内部点, $g'(x)$ 的值可能由正转负, 即原函数 $g(x)$ 的单调性由增转减, 形成一个局部极大值.
- 若此后 $g'(x)$ 持续为负, 函数 $g(x)$ 将进入单调递减阶段. 如果此单调递减的趋势足够明显, 函数 $g(x)$ 的值完全可能下降至小于其初始值 $g(m)=0$.

最终, 函数可能在区间的内部某点 x_0 取得一个极小值 $g(x_0)<0$. 这个极小值在端点分析中是不可见的, 我们称之为**隐蔽极小值**.

定理 1.24 (端点分析法适用性判别法则) 设函数 $g(x)$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上连续, 在 $(m,+\infty)$ 上二阶可导, 右导数 $g'_+(m)$ 存在, 且满足 $g(m)=0$.

1. 若 $g''(x)$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内恒有 $g''(x)\geq 0$, 则 $g'(x)$ 在该区间上单调递增. 此时, 不等式 $g(x)\geq 0$ 在 $[m,+\infty)$ 上恒成立的充分必要条件是 $g'_+(m)\geq 0$.
2. 若不能保证 $g'(x)$ 在该区间上单调递增, 则端点分析法一般失效, 条件 $g'_+(m)\geq 0$ 仍为不等式 $g(x)\geq 0$ 恒成立的**必要条件**, 但不再能直接作为充分条件. 问题的解决必须转为对 $g(x)$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上的全局最小值分析.

证明 **证明第 1 条(适用情形)**: 只证明 $g''(x)\geq 0$ 的情况. **充分性**: 假设 $g'_+(m)\geq 0$. 由于 $g''(x)\geq 0$, 故 $g'(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递增. 对任意 $x>m$, 取 $h\in(0,x-m)$. 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_h\in(m,m+h)$ 使得

$$\frac{g(m+h)-g(m)}{h}=g'(\xi_h)\leq g'(x).$$

令 $h\to 0^+$, 得 $g'_+(m)\leq g'(x)$. 因而 $g'(x)\geq 0$ 对所有 $x>m$ 成立, g 在 $[m,+\infty)$ 上单调不减. 所以对于任意 $x\geq m$, 都有 $g(x)\geq g(m)=0$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

必要性：假设 $g(x)\geq 0$ 在 $[m,+\infty)$ 上恒成立. 对所有 $x>m$，有

$$\frac{g(x)-g(m)}{x-m}\geq 0.$$

令 $x\to m^+$，由右导数存在可知 $g'_+(m)\geq 0$.

证明第 2 条（失效情形）：必要性不依赖于 g' 的单调性，上段差商论证已经说明只要 $g(x)\geq 0$ 恒成立，就必有 $g'_+(m)\geq 0$. 但充分性会失效. 例如在 $[0,+\infty)$ 上取 $g(x)=x-x^2$. 则 $g(0)=0$，$g'_+(0)=1>0$，但 $g(2)=-2<0$. 因此，在缺少 g' 单调递增保障时，端点导数非负不能保证全区间非负. □

知乎@余命数

例题 1.87　已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$. 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq \frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围.

解　原不等式等价于 $e^x+ax^2-x-\frac{1}{2}x^3-1\geq 0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立. 构造辅助函数 $g(x)=e^x+ax^2-x-\frac{1}{2}x^3-1$. 问题转化为求解参数 a 的范围，使得 $g(x)\geq 0$ 对所有 $x\in[0,+\infty)$ 成立.

计算函数在端点 $x=0$ 的值，$g(0)=e^0-1=0$. 此点对任意 a 均满足不等式，因此需要分析 $x>0$ 的情形.

当 $x>0$ 时，原不等式可等价变形为

$$a\geq A(x):=\frac{1+x+\frac{1}{2}x^3-e^x}{x^2}.$$

因此，所求条件就是 a 不小于 $A(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

对 $A(x)$ 求导，得

$$A'(x)=\frac{N(x)}{x^3},\qquad N(x)=(2-x)e^x+\frac{1}{2}x^3-x-2.$$

由于 $x^3>0$，$A'(x)$ 的符号由 $N(x)$ 决定. 继续求导得

$$N'(x)=(1-x)e^x+\frac{3}{2}x^2-1,\qquad N''(x)=x(3-e^x).$$

因此 $N''(x)>0$ 在 $(0,\ln 3)$ 上成立，$N''(x)<0$ 在 $(\ln 3,+\infty)$ 上成立，所以 $N'(x)$ 先增后减. 又 $N'(0)=0$、$N'(1)=\frac{1}{2}>0$、$N'(2)=5-e^2<0$，故 $N'(x)$ 在 $(\ln 3,2)$ 内有唯一零点. 于是 $N(x)$ 先增后减. 结合 $N(0)=0$ 与 $N(2)=0$，可得 $N(x)>0$ 在 $(0,2)$ 上成立，$N(x)<0$ 在 $(2,+\infty)$ 上成立.

所以 $A(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减，最大值为

$$A(2)=\frac{1+2+\frac{1}{2}\cdot 8-e^2}{4}=\frac{7-e^2}{4}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此原不等式恒成立的充分必要条件为

$$a \geq \frac{7-e^2}{4}.$$

知乎@余命数

所求 a 的取值范围是 $[\frac{7-e^2}{4}, +\infty)$.

1.15.5 何时有效, 何时失效

已看到, 端点分析法的有效性依赖于一阶导数的单调性. 应用之前检验适用性, 是判断结论正确的前提.

回顾端点分析法所处理的模型, 即证明 $g(x) \geq 0$ 在 $[m, +\infty)$ 上恒成立, 其中已知 $g(m) = 0$. 其要点在于, 若函数在出发点 $(m, 0)$ 的初始速度 $g'(m)$ 非负, 且其加速度始终使该速度不为负, 则函数值永远不会跌破零.

这里的加速度由二阶导数 $g''(x)$ 刻画, 它决定了一阶导数 $g'(x)$ 的单调性.

注 1.18 (端点分析法适用性判别三步法)
对于端点值为零的不等式恒成立问题, 判断端点分析法是否适用的可操作步骤如下.

1. **构造函数与求导.** 构造满足 $g(m) = 0$ 的辅助函数 $g(x)$, 并计算其一阶导数 $g'(x)$ 和二阶导数 $g''(x)$.
2. **检验二阶导数符号.** 分析 $g''(x)$ 在区间 $(m, +\infty)$ 上的符号.
   - **若 $g''(x)$ 恒为非负.** 故 $g'(x)$ 在该区间上单调递增. 此时, **端点分析法完全适用**. 不等式 $g(x) \geq 0$ 恒成立的**充分必要条件**就是 $g'(m) \geq 0$.
   - **若 $g''(x)$ 不能保证 $g'(x)$ 单调递增.** 例如 $g''(x)$ 符号不定时, **端点分析法失效**. 条件 $g'(m) \geq 0$ 仅仅是一个**必要条件**, 不再是充分条件.
3. **确定做法.** 若适用, 则检验 $g'(m)$ 的符号直接得出结论; 若失效, 则必须放弃端点分析, 回归到求解 $g'(x)$ 的零点, 分析 $g(x)$ 的单调性以寻找其在 $[m, +\infty)$ 上的**全局最小值**.

用一个具体例子说明. 当 $g'(x)$ 不单调时, 端点分析法会给出错误结论.

例题 1.88 已知函数 $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$. 若不等式 $f(x) \geq ax^4$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解 原不等式等价于 $\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - ax^4 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 构造辅助函数 $g(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - ax^4$, 则 $g(0) = 0$, 这是端点值为零的恒成立问题.

为使 g 从 $g(0) = 0$ 出发后始终非负, 可先在端点处逐阶考察导数, 以获取参数的必要条件.

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - 4ax^3, \qquad g'(0) = 0,$$

$$g''(x) = -\sin x + x - 12ax^2, \qquad g''(0) = 0,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$g'''(x)=-\cos x+1-24ax, \qquad g'''(0)=0,$$
$$g''''(x)=\sin x-24a, \qquad g''''(0)=-24a.$$

知乎@余命数

g 在 $x=0$ 附近的局部性态由第一个非零高阶导数决定;要使 $x=0$ 成为局部极小值点,需 $g''''(0)\geq 0$,即 $a\leq 0$.

上述结论仅来自端点的局部信息. 当 $a>0$ 时 $g''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上符号不定,端点分析法所依赖的导函数单调性并不成立,因而 $a\leq 0$ 只是必要条件,是否充分尚须全局论证. 下按 a 的符号分两种情形.

若 $a\leq 0$,则对一切 $x\geq 0$ 有 $-ax^4\geq 0$,从而

$$g(x)=\left(\sin x-x+\frac{1}{6}x^3\right)-ax^4\geq \sin x-x+\frac{1}{6}x^3.$$

知乎@余命数

记 $\phi(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$. 逐阶求导.

$$\phi(0)=0,$$
$$\phi'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2, \qquad \phi'(0)=0,$$
$$\phi''(x)=-\sin x+x, \qquad \phi''(0)=0,$$
$$\phi'''(x)=1-\cos x.$$

知乎@余命数

对 $x\geq 0$ 有 $\cos x\leq 1$,故 $\phi'''(x)\geq 0$,从而 ϕ'' 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,$\phi''(x)\geq \phi''(0)=0$;同理 $\phi'(x)\geq 0$,$\phi(x)\geq 0$. 于是 $a\leq 0$ 时 $g(x)\geq \phi(x)\geq 0$,不等式恒成立.

知乎@余命数

若 $a>0$,需说明必有某处 g 取负值. 将 g 写成

$$g(x)=x^4\left(\frac{\sin x}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{6x}-a\right).$$

由 $-1\leq \sin x\leq 1$ 与夹逼定理,$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^4}=0$;又 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6x}=0$,故括号内表达式的极限为 $-a<0$. 由极限的保号性,存在 $M>0$,使得当 $x>M$ 时括号内为负;此时 $x^4>0$,因而 $g(x)<0$. 故 $a>0$ 时不等式不恒成立.

综合两种情形,所求 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

例题 1.89　求实数 a 的取值范围,使得对于任意 $x\geq 0$,恒有不等式 $x^3-3x^2+ax\geq 0$ 成立.

解　先构造辅助函数并作初步分析. 构造辅助函数 $g(x)=x^3-3x^2+ax$. 考察函数在端点 $x=0$ 的值.

$$g(0)=0^3-3(0)^2+a(0)=0$$

知乎@余命数

这是一个端点值为零的恒成立问题.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再检验方法的适用性. 计算一阶与二阶导数, 得

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + a$$

$$g''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

二阶导数 $g''(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的符号是不定的. 当 $x \in (0,1)$ 时, $g''(x) < 0$, 导函数 $g'(x)$ 单调递减. 当 $x \in (1,+\infty)$ 时, $g''(x) > 0$, 导函数 $g'(x)$ 单调递增.

由于 $g'(x)$ 在考察的区间上不具备单调性, 故**端点分析法在此问题中失效**.

最后剖析失效原因并回到正确方法. 从"$g(x) \geq 0$ 恒成立"只能推出必要条件 $g'(0) \geq 0$.

知乎@余命数

$$g'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + a = a \geq 0$$

若误将此必要条件当作充分条件, 会得到错误答案 $a \geq 0$.

验证此答案不成立. 取 $a = 2$ (满足 $a \geq 0$), 则 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$. 当 $x \in (1,2)$ 时, $g(x) < 0$, 与题设 $g(x) \geq 0$ 恒成立相矛盾.

这个矛盾的根源在于, 初始速度 $g'(0) = a \geq 0$ 虽然保证函数在 $x = 0$ 附近是增加的, 但由于 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减, 速度 $g'(x)$ 持续减小, 甚至可能在某点变为负值, 从而使函数 $g(x)$ 转为递减. 后续的递减可能使函数值跌至 x 轴之下, 形成一个端点处不可见的隐蔽极小值.

因此, 须放弃端点分析, 回归到对函数全局最小值的分析. 原不等式即 $x(x^2 - 3x + a) \geq 0$. 由于 $x \geq 0$, 问题等价于 $h(x) = x^2 - 3x + a \geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立.

函数 $h(x)$ 是一个开口向上的二次函数, 其对称轴为 $x = \frac{3}{2}$. 由于对称轴位于区间 $[0,+\infty)$ 内部, 所以函数 $h(x)$ 在此区间上的最小值在顶点处取得.

$$h_{\min} = h\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + a = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + a = a - \frac{9}{4}$$

为使 $h(x) \geq 0$ 恒成立, 须有其最小值非负,

$$a - \frac{9}{4} \geq 0 \implies a \geq \frac{9}{4}$$

所求实数 a 的取值范围是 $[\frac{9}{4},+\infty)$.

注 1.19 (结论与警示)
此例说明机械套用端点分析法的危险性. 在处理端点值为零的恒成立问题时, 分析二阶导数 $g''(x)$ 的符号是判断方法是否适用的判据. 若 $g''(x)$ 符号恒定, 则端点分析可通往正确答案; 若 $g''(x)$ 符号不定, 则须警惕隐蔽极小值的存在, 并回归到全局最值分析.

知乎@余命数



知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

1.15.6 本节习题

1.45. 求实数 a 的取值范围, 使得对于任意 $x \geq 0$, 恒有不等式 $e^x \geq ax+1$ 成立.

1.46. 求实数 a 的取值范围, 使得对于任意 $x \geq 1$, 恒有不等式 $a(x-1) \geq \ln x$ 成立.

1.47. 求实数 a 的取值范围, 使得对于任意 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 恒有不等式 $ax \geq \sin x$ 成立.

1.48. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1$. 若 $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

1.49. 求实数 a 的取值范围, 使得对于任意 $x \geq 0$, 恒有不等式 $x^3 - 3x^2 + ax \geq 0$ 成立. 请首先检验端点分析法在此问题中能用与否, 然后再求解.

1.50. 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$. 若当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围. 请首先检验端点分析法在此问题中能用与否, 然后再求解.

1.15.7 高考真题选讲

以下三题选自历年高考真题, 涉及端点效应与切线放缩两类方法.

例题 1.90 (2010 年海南宁夏卷理科数学第 21 题) 设 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

1. 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
2. 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

解 (1)$a = 0$ 时的单调区间

$f(x) = e^x - 1 - x$, $f'(x) = e^x - 1$. 当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 求 a 的取值范围

$f(0) = 0$、$f'(x) = e^x - 1 - 2ax$、$f'(0) = 0$. 由 $e^x \geq 1 + x$ 得

$$f'(x) \geq (1+x) - 1 - 2ax = (1-2a)x$$

当 $a \leq \dfrac{1}{2}$ 时, $(1-2a)x \geq 0$ 对 $x \geq 0$ 成立, 故 $f'(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, $f(x) \geq f(0) = 0$.

当 $a > \dfrac{1}{2}$ 时, $f''(0) = 1 - 2a < 0$, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 附近递减. 由 $f'(0) = 0$ 知存在 $\delta > 0$ 使 $f'(x) < 0$ 在 $(0, \delta)$ 上成立, 从而 $f(x) < f(0) = 0$, 矛盾.

所求 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.91 (2018 年全国 □ 卷文科数学第 21 题) 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

1. 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a 并求 $f(x)$ 的单调区间;
2. 证明: 当 $a\geq\dfrac{1}{e}$ 时, $f(x)\geq 0$.

解 (1) 求 a 与单调区间

$f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}$. 由 $f'(2)=0$ 得 $a=\dfrac{1}{2e^2}$, 此时 $f'(x)=\dfrac{e^{x-2}}{2}-\dfrac{1}{x}$. 当 $0<x<2$ 时 $f'(x)<0$, 当 $x>2$ 时 $f'(x)>0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减, 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明 $f(x)\geq 0$

知乎@余命数

当 $a\geq\dfrac{1}{e}$ 时, $ae^x\geq e^{x-1}$, 故

$$f(x)\geq e^{x-1}-\ln x-1$$

由 $e^{x-1}\geq x$ 与 $\ln x\leq x-1$ 得

$$e^{x-1}-\ln x-1\geq x-(x-1)-1=0$$

故 $f(x)\geq 0$.

例题 1.92 (2020 年山东卷数学第 21 题) 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

1. 当 $a=e$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;
2. 若 $f(x)\geq 1$, 求 a 的取值范围.

解 (1) 切线与面积

$a=e$ 时 $f(x)=e^x-\ln x+1$、$f(1)=e+1$、$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$、$f'(1)=e-1$. 切线方程为

$$y-(e+1)=(e-1)(x-1)$$

令 $x=0$ 得 $y=2$, 令 $y=0$ 得 $x=-\dfrac{2}{e-1}$, 三角形面积为 $\dfrac{2}{e-1}$.

(2) 求 a 的取值范围

必要性: $f(1)=a+\ln a\geq 1$. 令 $g(a)=a+\ln a-1$、$g'(a)=1+\dfrac{1}{a}>0$、$g(1)=0$, 故 $a\geq 1$.

充分性: 当 $a\geq 1$ 时, $ae^{x-1}\geq e^{x-1}$ 且 $\ln a\geq 0$, 故

$$f(x)\geq e^{x-1}-\ln x$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 $e^{x-1} \geq x$ 与 $\ln x \leq x-1$ 得

$$e^{x-1} - \ln x \geq x - (x-1) = 1$$

故 $f(x) \geq 1$.

所求 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

1.16 极值点偏移问题

处理双零点或双极值点问题时, 常遇到一类偏离对称性的难题.

例如, 已知函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2, 题目要求证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$, 其中 x_0 为极值点. 若函数关于 $x = x_0$ 对称, 如二次函数, 有 $x_1 + x_2 = 2x_0$. 多数超越函数不具备这种对称性, 中点 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 因此偏离极值点 x_0. 这一现象称为极值点偏移.

现给出三种方法, 从通用的构造法到变量代换.

1.16.1 问题的引入与识别

1.16.1.1 典型情景

极值点偏移问题通常以以下两种形式出现.

1. **零点偏移**. 函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2, 证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$ 或 $x_1 x_2 > x_0^2$.
2. **极值偏移**. 函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2, 即导函数的零点, 证明 $f(x_1) + f(x_2) > C$.

1.16.1.2 特征与典例

此类问题源于函数的伪对称性, 极值点两侧的图像相似, 增长或下降的速度却并不一致. 常见的模型函数如 xe^x、$x\ln x$、$\frac{e^x}{x}$ 等, 其导数包含指数或对数项, 由此产生非对称性.

例题 1.93 已知函数 $f(x) = xe^x$. 若 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 求证 $x_1 + x_2 < -2$.

解 求导得 $f'(x) = (x+1)e^x$. 函数在 $x = -1$ 处取得极小值. 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$, 所以若 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则必有 $x_1 < -1 < x_2 < 0$. 若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = -1$ 对称, 则 $x_1 + x_2 = 2(-1) = -2$. 结论 < -2 暗示两根的中点偏向极值点的左侧. 在 $x = -1$ 左侧 $(x \to -\infty)$ 函数趋于 0, 较为平缓; 右侧则增长极快. 为达到相同高度, 左侧的点 x_1 须比右侧的点 x_2 走得更远.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

函数本身不对称时, 可人为构造一个对称结构作比较. 设 $x_1 < x_0 < x_2$, 其中 x_0 是极值点, 比较 x_2 与 x_1 关于 x_0 的对称点 $2x_0 - x_1$ 的大小, 并构造辅助函数 $F(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$, 借助单调性推导 $f(x_1)$ 与 $f(2x_0 - x_1)$ 的关系.

以典例 $f(x) = xe^x$ 为例, 证明 $x_1 + x_2 < -2$. 极值点 $x_0 = -1$.

1. **设而不求**. 由上面的单调性分析,不妨设 $x_1 < -1 < x_2 < 0$. 要证 $x_1+x_2 < -2$, 即证 $x_1 < -2 - x_2$. 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 上述不等式等价于 $f(x_1) > f(-2 - x_2)$. 又因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 问题转化为证明, 对 $x_2 \in (-1, 0)$, 有 $f(x_2) > f(-2 - x_2)$.
2. **构造辅助函数**. 令 $g(x) = f(x)-f(-2-x)$,其中 $x > -1$. 目标是证明 $g(x) > 0$.
3. **分析单调性**. 求导, 得

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

$$g'(x) = f'(x) - f'(-2 - x) \cdot (-1) = f'(x) + f'(-2 - x)$$

代入 $f'(x) = (x + 1)e^x$, 得

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x + 1)e^x + (-2 - x + 1)e^{-2-x} \\ &= (x + 1)e^x - (x + 1)e^{-2-x} \\ &= (x + 1)(e^x - e^{-2-x}) \end{aligned}$$

知乎@余命数

因为 $x > -1$, 所以 $x + 1 > 0$. 同时 $x > -2 - x \iff 2x > -2 \iff x > -1$, 由 e^x 单调递增可知 $e^x > e^{-2-x}$. 因此对 $x > -1$, 恒有 $g'(x) > 0$.

4. **完成论证**. 函数 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

$$g(x) > g(-1) = f(-1) - f(-2 - (-1)) = f(-1) - f(-1) = 0$$

即 $f(x) > f(-2 - x)$. 令 $x = x_2$, 则 $f(x_2) > f(-2 - x_2)$. 代回 $f(x_1) = f(x_2)$, 得 $f(x_1) > f(-2 - x_2)$. 因为 x_1 和 $-2 - x_2$ 都在单调递减区间 $(-\infty, -1)$ 内, 所以 $x_1 < -2 - x_2$, 即 $x_1 + x_2 < -2$. 证毕.

1.16.2 对数均值不等式与变换主元法

知乎@余命数

对于指数或对数型函数, 常可通过代数变形, 把双变量问题转化为单变量不等式.

知乎@余命数

1.16.2.1 变换主元的思路

利用 $f(x_1) = f(x_2)$,把 x_1, x_2 用一个新变量 t(通常设 $t = x_1/x_2$ 或 $t = x_1 - x_2$)表示, 从而将待证不等式转化为关于 t 的函数不等式.

1.16.2.2 操作步骤

仍以 $f(x) = xe^x$ 为例.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1. **代数变形**. 由 $x_1e^{x_1} = x_2e^{x_2}$, 两边取对数, 注意 x_1, x_2 均为负数, 取对数需取绝对值, 或移项变形. 变形为 $\frac{x_1}{x_2} = e^{x_2-x_1}$. 或更直接地: $x_1 + \ln(-x_1) = x_2 + \ln(-x_2)$(设 $x_1, x_2 < 0$). 整理得 $x_2 - x_1 = \ln(-x_1) - \ln(-x_2) = \ln(\frac{x_1}{x_2})$.
2. **变换主元**. 令 $t = \frac{x_1}{x_2}$. 因为 $x_1 < -1 < x_2 < 0$, 所以 $t > 1$. 将 $x_2 - x_1 = \ln t$ 与 $\frac{x_1}{x_2} = t$ 联立求解.

$$x_2 = \frac{\ln t}{1-t}, \quad x_1 = \frac{t\ln t}{1-t}$$

3. **构造新函数**, 得要证 $x_1 + x_2 < -2$, 即证

$$\frac{(t+1)\ln t}{1-t} < -2.$$

由于 $1-t<0$, 两边同乘 $1-t$ 后不等号反向, 得到

$$(t+1)\ln t > 2(t-1).$$

设 $h(t) = (t+1)\ln t - 2(t-1)$ $(t>1)$. 则

$$h'(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1, \quad h''(t) = \frac{t-1}{t^2} > 0.$$

又 $h'(1) = 0$, 故 $h'(t) > 0$ $(t>1)$, 从而 $h(t) > h(1) = 0$. 因此 $(t+1)\ln t > 2(t-1)$, 即 $x_1 + x_2 < -2$.

1.16.3 泰勒展开与高阶导数分析法

极值点偏移源于函数在极值点两侧弯曲程度不同, 而弯曲程度由高阶导数控制. 以下从这一角度给出一种分析方法.

1.16.3.1 泰勒展开的思路

把函数 $f(x)$ 在极值点 x_0 处展开. 设 $x_1 = x_0 - \delta_1, x_2 = x_0 + \delta_2$ $(\delta_1, \delta_2 > 0)$. 由泰勒公式.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

代入 x_1, x_2 并利用 $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\frac{f''(x_0)}{2}\delta_1^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}\delta_1^3 \approx \frac{f''(x_0)}{2}\delta_2^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\delta_2^3$$

这暗示 δ_1 与 δ_2 的大小关系取决于三阶导数 $f'''(x_0)$ 的符号.

1.16.3.2 判定准则

- 若 $f'''(x_0) = 0$, 函数在极值点附近局部对称性强, 偏移极小.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 若 $f'''(x_0)>0$, 通常意味着极值点右侧更陡峭, 为达到相同高度, 右侧所需的距离 δ_2 更小, 即 $\delta_2<\delta_1$. 此时 $x_1+x_2=2x_0-\delta_1+\delta_2<2x_0$.
- 若 $f'''(x_0)<0$, 同理可得 $x_1+x_2>2x_0$.

注 1.20
此方法不能直接作为解答步骤, 但能迅速指明不等式的方向, 可用来检验猜想并指导构造辅助函数. 例如在典例中, $f'''(-1)$ 易算得为正, 故可判断 $x_1+x_2<-2$.

知乎@余命数

1.16.4 方法选择

- **构造对称函数法**. 逻辑严密, 适用范围广, 是解答题的标准写法.
- **变换主元法**. 技巧性强, 对 $x, e^x, \ln x$ 组合的问题往往有效, 可作为备选.
- **泰勒与高阶导数分析**. 用于预判结论方向与洞察偏移成因.

1.16.5 高考真题选讲

例题 1.94 (2016 年全国 □ 卷理科数学第 21 题) 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

1. 求 a 的取值范围;
2. 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明 $x_1+x_2<2$.

解 (1) 求 a 的取值范围

$x=1$ 不是 $f(x)$ 的零点. 当 $x\neq 1$ 时, $f(x)=0$ 等价于

$$-a=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

设 $g(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$, 求导得

$$g'(x)=\frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$$

其中 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上的值域为 $(-\infty,0)$, 在 $(1,+\infty)$ 上的值域为 $(-\infty,+\infty)$. 方程 $g(x)=-a$ 有两个实根当且仅当 $-a<0$, 即 $a>0$.

(2) 证明 $x_1+x_2<2$

由 (1) 不妨设 $x_1<1<x_2$, 需证 $x_2<2-x_1$. 因 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 只需证 $g(x_2)<g(2-x_1)$, 即 $g(x_1)<g(2-x_1)$.

构造 $h(x)=(x-1)^2(g(x)-g(2-x))$, 即 $h(x)=e^x(x-2)+e^{2-x}x$, 其中 $x<1$. 求导得

$$h'(x)=(x-1)\left(e^x-e^{2-x}\right)$$

知乎@余命数 当 $x<1$ 时, $x<2-x$, 故 $e^x<e^{2-x}$, 从而 $h'(x)>0$, $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增. 因此 $h(x)<h(1)=0$, 即 $g(x)<g(2-x)$ 对一切 $x<1$ 成立.

取 $x=x_1$ 即得 $g(x_1)<g(2-x_1)$, 故 $x_1+x_2<2$.

1.17 牛顿迭代法

知乎@余命数

求方程 $f(x)=0$ 的根贯穿代数与数值分析. 五次及以上的多项式方程不存在一般的求根公式, 超越方程如 $e^x+x=0$ 更无法用初等运算求解. 牛顿迭代法借助导数与切线, 把求根问题转化为一个可以反复执行的迭代公式, 在根附近以极快的速度收敛.

第二卷第 7.11 节已经从不动点的角度提及了牛顿法, 并指出巴比伦算法是其特例. 本节从切线逼近的几何直观出发, 推导迭代公式, 分析收敛速度, 并讨论其失效情形.

1.17.1 从切线到迭代

1.17.1.1 迭代公式的推导

知乎@余命数

设 $f(x)$ 在根 r 附近可导, 且 $f'(r)\neq 0$. 我们已知一个近似值 x_n, 希望找到一个更好的近似值 x_{n+1}.

在 第1.5节 中, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线斜率为 $f'(x_n)$, 切线方程为

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n) \tag{1-23}$$

切线在点 $(x_n,f(x_n))$ 附近是曲线的最佳线性近似. 当 x_n 接近根 r 时, 切线与 x 轴的交点应当比 x_n 更接近 r.

令 (1-23) 中 $y=0$, 解出切线与 x 轴的交点, 作为下一次的近似值 x_{n+1}:

$$-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

整理得牛顿迭代公式.

知乎@余命数

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1-24}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 1.21 (迭代函数的不动点)
牛顿迭代 (1-24) 是一个形如 $x_{n+1}=g(x_n)$ 的迭代, 其中迭代函数为 $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 若 r 是 $f(x)=0$ 的根且 $f'(r)\neq 0$, 则 $g(r)=r-\frac{0}{f'(r)}=r$, 故根 r 是 g 的不动点. 这与 第二卷第 7.11 节中不动点迭代的框架一致.

1.17.1.2 几何直观

牛顿法的每一步, 都是用切线的根代替曲线的根. 当初始值足够接近真实根, 且函数在该处性质良好时, 切线的根会迅速逼近曲线的根.

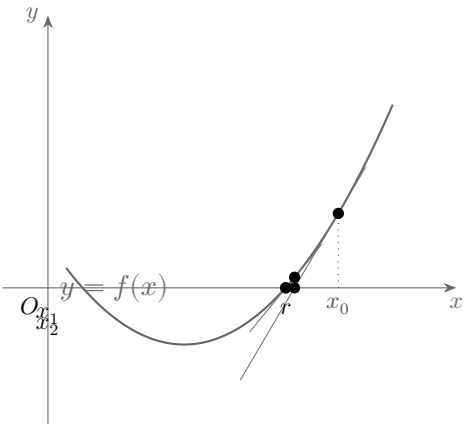


图 1.25　牛顿迭代法的几何过程, 在 x_0 处作切线, 其与 x 轴的交点 x_1 更接近根 r; 重复此过程, x_2 进一步逼近 r.

知乎@余命数

1.17.2 计算平方根的实例

1.17.2.1 迭代公式的导出

求 $\sqrt{2}$ 等价于解方程 $f(x)=x^2-2=0$. 由 $f'(x)=2x$, 代入 (1-24) 得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right) \tag{1-25}$$

这是 第二卷第 7.11 节中提到的巴比伦算法. 第1.1节 已证明 $\sqrt{2}$ 是无理数, 无法写成有限小数或分数, 而迭代 (1-25) 给出了一条逼近它的具体路径.

1.17.2.2 迭代数据

取初始值 $x_0=1$, 逐次代入 (1-25).

知乎@余命数

步数 n	近似值 x_n	误差 $\lvert x_n-\sqrt{2}\rvert$	正确位数
0	1	4.14×10^{-1}	0
1	$\dfrac{3}{2}=1.5$	8.58×10^{-2}	1
2	$\dfrac{17}{12}\approx1.41667$	2.45×10^{-3}	2
3	$\dfrac{577}{408}\approx1.414216$	2.12×10^{-6}	5
4	$\dfrac{665857}{470832}\approx1.414213562$	1.59×10^{-12}	11

$\sqrt{2}\approx1.41421356237$. 仅迭代四步，误差已小于 10^{-11}. 正确位数从 0 增长到 $1,2,5,11$, 每步大约翻倍. 这种误差按平方缩小的收敛速度称为**二阶收敛**.

1.17.3 收敛速度

1.17.3.1 误差递推的推导

设 r 是 $f(x)=0$ 的单根, 即 $f(r)=0$ 且 $f'(r)\neq0$. 记误差 $e_n=x_n-r$. 将 $f(x_n)$ 在 r 处作泰勒展开, 见 第1.12节:

$$f(x_n)=f(r)+f'(r)\,e_n+\frac{f''(r)}{2}\,e_n^2+O(e_n^3) \tag{1-26}$$

因 $f(r)=0$, 上式化为

$$f(x_n)=f'(r)\,e_n+\frac{f''(r)}{2}\,e_n^2+O(e_n^3)$$

对 $f'(x_n)$ 同样在 r 处展开:

$$f'(x_n)=f'(r)+f''(r)\,e_n+O(e_n^2)$$

代入牛顿迭代公式 (1-24), $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 即 $e_{n+1}=e_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$:

$$\begin{aligned}e_{n+1}&=e_n-\frac{f'(r)\,e_n+\frac{f''(r)}{2}\,e_n^2+O(e_n^3)}{f'(r)+f''(r)\,e_n+O(e_n^2)}\\&=e_n-\frac{e_n\left(f'(r)+\frac{f''(r)}{2}\,e_n+O(e_n^2)\right)}{f'(r)\left(1+\frac{f''(r)}{f'(r)}\,e_n+O(e_n^2)\right)}\end{aligned}$$

利用 $\frac{1}{1+u}=1-u+O(u^2)$, 分母的倒数展开为

$$\frac{1}{f'(r)}\left(1-\frac{f''(r)}{f'(r)}\,e_n+O(e_n^2)\right)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代回并整理, e_n 的一阶项相互抵消:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - e_n\left(1+\frac{f''(r)}{2f'(r)}\,e_n\right)\left(1-\frac{f''(r)}{f'(r)}\,e_n+O(e_n^2)\right)\\ &= e_n - e_n\left(1-\frac{f''(r)}{2f'(r)}\,e_n+O(e_n^2)\right)\\ &= \frac{f''(r)}{2f'(r)}\,e_n^2+O(e_n^3) \end{aligned}$$

当 e_n 足够小, 高阶项 $O(e_n^3)$ 可忽略, 得到误差递推的主项.

定理 1.25 (牛顿法的二阶收敛) 设 r 是 $f(x)=0$ 的单根 ($f'(r)\neq 0$), $f''(r)$ 存在. 当初始值 x_0 足够接近 r 时, 牛顿迭代 (1-24) 的误差满足

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(r)}{2f'(r)}\,e_n^2 \tag{1-27}$$

即误差按平方缩小, 称为**二阶收敛** (quadratic convergence).

(1-27) 中的常数 $C=\frac{f''(r)}{2f'(r)}$ 由函数在根处的曲率与斜率决定. 若 C 不太大, 每步迭代将误差从 e_n 压缩到 $C\,e_n^2$. 当 $e_n<1$ 时, e_n^2 远小于 e_n, 误差迅速趋于零.

1.17.3.2 正确位数翻倍

二阶收敛的一个直接推论, 每步迭代后, 近似值的有效位数大约翻倍. 若 x_n 有 d 位正确数字 ($e_n\sim 10^{-d}$), 则 $e_{n+1}\sim C\cdot 10^{-2d}$, 即 x_{n+1} 约有 $2d$ 位正确数字, 当 C 接近 1 时.

计算 $\sqrt{2}$ 的数据印证了这一点, 正确位数从 $0\to 1\to 2\to 5\to 11$, 基本呈翻倍增长.

1.17.3.3 与不动点迭代的对比

第二卷第 7.11 节讨论了一般的不动点迭代 $x_{n+1}=g(x_n)$. 当 g 在不动点 r 处可导且 $g'(r)\neq 0$ 时, 误差满足

$$e_{n+1}\approx g'(r)\,e_n$$

误差按固定比例线性缩小, 称为**一阶收敛** (linear convergence). 每步将误差乘以常数 $|g'(r)|<1$, 正确位数按固定增量增长.

牛顿法的迭代函数 $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 在单根 r 处满足 $g'(r)=0$ (因 $g'(x)=1-\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, 代入 $f(r)=0$ 得 $g'(r)=1-1=0$). 由于 $g'(r)=0$, 误差递推中一阶项消失, 收敛速度从线性提升到二阶.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

	一阶收敛(不动点迭代)	二阶收敛(牛顿法)
误差递推	$e_{n+1} \approx g'(r)\, e_n$	$e_{n+1} \approx C\, e_n^2$
正确位数增长	每步固定增量	每步约翻倍
收敛条件	$\lvert g'(r)\rvert < 1$	$f'(r) \neq 0$, x_0 足够接近 r

1.17.4 失效情形

牛顿法并非万能. 以下三种情形会导致迭代失败或收敛变慢.

1.17.4.1 切线水平导致的迭代中断

当迭代到某点 x_n 恰好使 $f'(x_n) = 0$ 时, 切线水平, 与 x 轴平行, 没有交点. 公式 (1-24) 中分母为零, 迭代无法进行.

例如, 对 $f(x) = x^3 - x$ 用牛顿法求根 $r = 0$. 若初始值取 $x_0 = 0$, 则 $f'(0) = 3(0)^2 - 1 = -1 \neq 0$, 迭代正常. 但若取 $x_0 = 1/\sqrt{3}$, 则 $f'(x_0) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$, 切线水平, 迭代中断.

1.17.4.2 初始值远离根时不收敛或收敛到错误的根

牛顿法只保证在根附近收敛. 当初始值 x_0 离真实根太远时, 切线可能将下一步引向远离根的方向, 甚至发散.

此外, 当 $f(x) = 0$ 有多个根时, 牛顿法收敛到哪一个根取决于初始值的位置. 从 $x_0 = 10$ 出发求 $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ 的根, 迭代会收敛到某个根, 但未必是所求的那个.

1.17.4.3 重根处的收敛退化为线性

当 r 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根 ($m \geq 2$), 即 $f(r) = f'(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0$ 但 $f^{(m)}(r) \neq 0$ 时, 牛顿法的二阶收敛条件 $f'(r) \neq 0$ 不再满足.

以 $f(x) = x^2$ 为例, $r = 0$ 是二重根, $f'(0) = 0$. 牛顿迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$$

误差 $e_{n+1} = \frac{e_n}{2}$, 退化为线性收敛, 每步误差减半. 达到 10^{-12} 精度需要约 40 步, 远多于单根情形的 4 步.

对重根情形, 可采用修正牛顿法 $x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 其中 m 为根的重数, 恢复二阶收敛. 但这要求事先知道根的重数, 实际应用中往往难以满足.

注 1.22 (实践中的策略)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

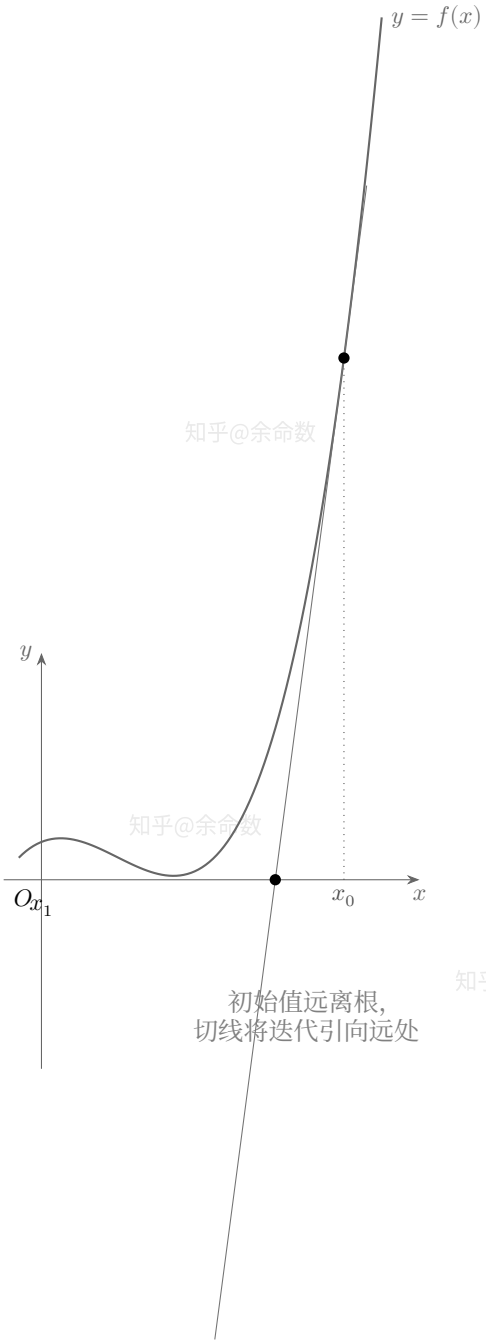


图 1.26　初始值远离根时，切线的交点可能比 x_0 更远离根，迭代发散.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

牛顿法要求计算 $f'(x)$，当导数难以解析求出时，可用差商 $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ 代替，得到**割线法**. 割线法的收敛阶约为 1.618（黄金比例），介于一阶与二阶之间. 当导数计算成本高时，割线法是牛顿法的常用替代.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 2 章

简单的积分



基础语言

「数学的本质在于其自由。」

——康托尔

第二章 简单的积分

在微分学里我们做过这样的事, 已知一辆车的位移 $s(t)$, 对它求导, 就得到瞬时速度 $v(t)=s'(t)$, 从位置在哪儿算出跑得多快.

现在把这个问题掉过头来, 只看一张速度记录 $v(t)$, 要反推出位移 $s(t)$.

试一个最简单的例子. 一辆车以 $v(t)=2t$ 的速度匀加速行驶, 凭对求导公式的熟悉, 立刻能猜到位移是 $s(t)=t^2$, 因为 $(t^2)'=2t$. 同理 t^2+1, t^2-3 也都说得通, 给 t^2 加上任意常数, 求导后常数消去, 得到的还是 $2t$.

知乎@余命数

但如果速度是 $v(t)=\sin t$ 或者 $v(t)=e^{-t^2}$ 这种钟形速度曲线, 情形就不同了. 前者还好猜, $-\cos t$ 就是一个答案; 后者则不然, 我们手中所有熟悉的函数都不足以描述它的位移.

这种从变化率反推总量的运算, 是求导的逆运算, 叫做**积分**. 与求导几乎总能套公式不同, 积分更像一门手艺, 它有一本基本的辞典, 有若干分类技巧, 也有相当一批做不出来的情形. 后一点会反复提醒我们, 积分远比微分来得丰富.

2.1 原函数与不定积分

2.1.1 原函数

从章首的例子继续. 已知速度 $v(t)=2t$, 想反推位移 $s(t)$, 就是找一个函数, 它的导数恰好是 $2t$. 我们立刻想到 t^2, 因为 $(t^2)'=2t$. 但也不止 t^2 一个: t^2+1、t^2-3、t^2+100 都对, 给 t^2 加上任意常数后再求导, 常数都会消掉, 结果仍然是 $2t$. 既然找导数等于已知函数的函数这件事如此自然, 我们给它一个名字.

知乎@余命数

定义 2.1 (原函数) 如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对于任意 $x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x)$$

那么, 我们称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**.

举几个简单例子. 我们熟悉 $(-\cos x)'=\sin x$, 所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数. 同理 e^x 是 e^x 自己的原函数, 因为指数函数求导不变; $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 是 x^n 的原函数 ($n\neq -1$), 因为幂函数求导一次指数降一次, 系数 $n+1$ 恰好被消去. 这些都是从求导公式倒着读得到的.

回看章首那个速度例子, $v(t)=2t$ 的原函数不止一个, t^2、t^2+1、t^2-3、... 都是. 背后是一条普遍规律, 一个函数的原函数若存在, 就一定有无穷多个, 而且彼

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此之间只差一个常数. 所有原函数是否都具有这种形式, 下面这条定理给出肯定的回答.

定理 2.1 (原函数的结构) 若函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在一个**区间** I 上的一个原函数, 则 $f(x)$ 在该区间上的任意其他原函数 $G(x)$ 必定具有形式 $G(x)=F(x)+C$, 其中 C 为某个常数.

知乎@余命数

证明 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两个原函数, 由定义有 $F'(x)=f(x)$ 与 $G'(x)=f(x)$. 考虑辅助函数 $\Phi(x)=G(x)-F(x)$, 对其求导得

$$\Phi'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,\quad x\in I.$$

知乎@余命数

在导数章节中已证(作为拉格朗日中值定理的推论), 在连通区间上导数恒为零的函数必为常数, 故存在常数 C 使对所有 $x\in I$ 有 $\Phi(x)=C$, 即 $G(x)-F(x)=C$, 亦即 $G(x)=F(x)+C$. □

定理强调区间二字, 因为它依赖的事实是导数恒为零的函数必为常数, 而后者只在连成一片的定义域上才成立. 若定义域断成不相交的几段, 那每一段上原函数的差都可以是不同的常数, 拼起来就不再是单常数差异了. 例如 $f(x)=\frac{1}{x^2}$, 它的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 就是这样断开的两段. 一个原函数是 $F(x)=-\frac{1}{x}$. 那么 $G(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}+2 & x>0\\ -\frac{1}{x}-5 & x<0\end{cases}$ 也是 $f(x)$ 的原函数, 但两段上的常数差异不同, $G-F$ 已经不是一个统一的常数 C 了.

知乎@余命数

2.1.2 不定积分

既然一个函数的原函数构成一整族 $F(x)+C$, 我们就用一个专门的符号把它们打包写在一起.

定义 2.2 (不定积分) 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数所构成的集合, 称为 $f(x)$ 在 I 上的**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\,dx$$

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 那么我们写出

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \tag{2-1}$$

这里的 C 被称为**积分常数**, 它代表了函数族中所有可能的常数项.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

积分与微分是一对互逆运算, 但互逆的方式在两个方向上不对称.

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=\frac{d}{dx}(F(x)+C)=f(x)$$

先积分再微分, 常数 C 在求导时被消掉, 完全还原为 $f(x)$;

$$\int\left(\frac{d}{dx}F(x)\right)dx=\int F'(x)\,dx=F(x)+C$$

但反过来, 先微分再积分, 由于求导那一头本来就会丢掉常数信息, 末端就多出一个待定的 C. 这种一头干净、一头多出常数的不对称, 正是微分与积分作为逆运算的具体表现.

几何上, 不定积分 $y=F(x)+C$ 既是一族曲线, 又能这样看, 在平面上每一点 (x_0,y_0) 画一个斜率恰好为 $f(x_0)$ 的小箭头, 全部箭头组成一片**方向场**, 又称斜率场. 而 $y=F(x)+C$ 这一族积分曲线, 正是顺着这片方向场走出来的曲线, 曲线在每一点的切线方向, 都与该点箭头的方向吻合. 图 2.1 中 $y'=2x$ 的方向场与积分曲线族 $y=x^2+C$ 显示了这一点, 把其中任意一条曲线沿 y 方向平移, 都还是这个方向场的解.

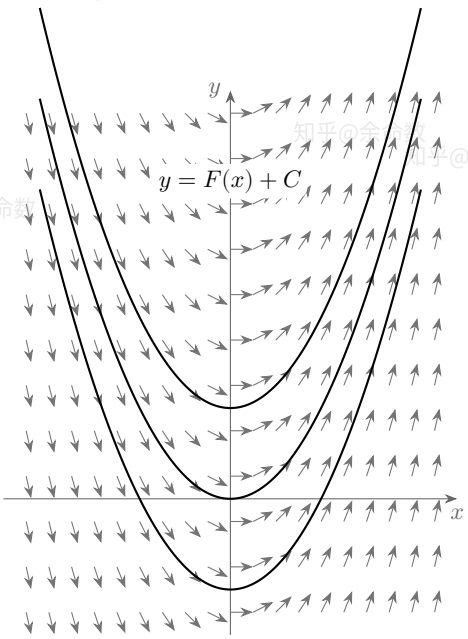


图 2.1 方向场 $y'=2x$ 与积分曲线族 $y=x^2+C$

2.1.3 达布定理与原函数不存在判据

已定义原函数的概念, 但尚未讨论其存在的条件, 何种函数必定拥有原函数、何种函数绝无原函数, 由导函数的一条基本性质给出判据.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

达布定理揭示了导函数的一个基本性质, 即便导函数不连续, 它也必须具备介值性质. 这条性质提供了一个原函数不存在的判据.

定理 2.2 (达布定理 (导数介值定理)) 若函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导, 则其导函数 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性质. 对于任意 $y_1, y_2 \in [a,b]$ 且 $y_1 < y_2$, 以及任意介于 $F'(y_1)$ 与 $F'(y_2)$ 之间的实数值 k, 必存在 $\xi \in (y_1, y_2)$, 使得

$$F'(\xi) = k.$$

证明 不妨设 $F'(y_1) < k < F'(y_2)$. 引入辅助函数 $G(x) = F(x) - kx$. 则 G 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$G'(y_1) = F'(y_1) - k < 0, \quad G'(y_2) = F'(y_2) - k > 0.$$

由导数符号的局部行为, 存在 y_1 右侧附近的点 x_1 使 $G(x_1) < G(y_1)$, 存在 y_2 左侧附近的点 x_2 使 $G(x_2) < G(y_2)$. 因此 G 在 $[a,b]$ 上的最小值不在端点 y_1 或 y_2 处取得, 而必落在内部某点 $\xi \in (y_1, y_2)$ 处. 由费马引理, 在该内部极值点处 $G'(\xi) = 0$, 即 $F'(\xi) = k$. □

注 2.1
达布定理的等价表述是. 导函数的像集 $F'([a,b])$ 必为一个区间; 因此导函数即便不连续, 也不能跳跃取值, 必须填满其值之间的所有空隙. 这一性质比连续性弱, 却比任意取值更强.

推论 2.1 (含第一类间断点的函数无原函数) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在第一类(可去或跳跃)间断点 c, 则 $f(x)$ 在 I 上**不存在原函数**, 即不存在任何在 I 上处处可导的 F 使得 $F'(x) = f(x)$ 在 I 上处处成立.

证明 反设存在这样的 F 满足 $F'(x) = f(x)$ 在 I 上处处成立. 由达布定理, F' 在 I 的任何子闭区间上必具有介值性质. 但 f 在 c 处有跳跃或可去间断点, 意味着 f 在 c 左右两侧的极限值, 或极限与函数值之间存在间隙, 无法填满该处的所有介值, 与 F' 必具介值性相矛盾, 故假设不成立. □

此推论给出了何种函数无原函数的负向判据. 配合 第2.1.4小节 的正向存在定理, 我们便对原函数何时存在有了较为完整的认识. 连续性保证原函数存在, 含第一类间断点则排除原函数的存在. 需补充说明, 含第二类间断点的函数可能存在原函数, 例如 $f(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, 在 $x = 0$ 处有第二类间断, 却仍存在原函数 $F(x) = x^2\sin(1/x)(F(0) = 0)$.

知乎@余命数

2.1.4 原函数的存在性

已定义原函数, 并获得了达布定理给出的非存在判据. 存在性的**充分条件**仍待确立. 并非每个函数都拥有原函数, 但微积分的一个基石性结论(微积分基本定理的第一部分)保证了以下事实.

> **定理 2.3 (原函数存在定理)** 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上**连续**, 则 $f(x)$ 在该区间上必存在原函数.

证明 取定区间 I 中一点 a. 对任意 $x \in I$, 定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

其中当 $x < a$ 时按约定 $\int_a^x = -\int_x^a$. 由于 f 在区间 I 上连续, 微积分基本定理第一部分保证由上述变上限定积分定义的函数 F 在 I 上可导, 且

$$F'(x) = f(x).$$

因而 F 就是 f 在 I 上的一个原函数. 这说明连续性足以保证原函数存在. □

这个定理将函数的分析性质(连续性)与积分运算的可能性直接联系起来, 确保对一切遇到的连续函数谈论其不定积分都有意义.

2.2 不定积分

上一节写下了不定积分的记号 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, 也就是 $f(x)$ 的全体原函数. 有了记号, 还需要弄清它的来历, 并建立一份由求导公式反推而来的基本积分表.

2.2.1 记号的来历与基本积分表

莱布尼茨引入的积分符号 $\int f(x)\,dx$ 具有内在含义. 积分号 $\int$ 是字母 S 的拉长, 代表求和 (Summa), 这预示了不定积分与定积分(黎曼和的极限)之间的内在联系. 被积表达式 $f(x)dx$ 则暗示变量的微分 dx 在运算中的重要地位, 这一地位在换元积分法中将充分显现.

正如求导对加法、数乘可以分配, 即 $(kF)' = kF'$, $(F+G)' = F' + G'$, 积分也享有这两条性质, 称为**线性性**.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.4 (不定积分的线性性质) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在同一区间上的原函数都存在, $F'(x)=f(x)$、$G'(x)=g(x)$、k 为任意常数, 则

1. **齐次性**: $\int kf(x)\,dx = kF(x)+C$
2. **可加性**: $\int [f(x)+g(x)]\,dx = F(x)+G(x)+C$

等价地, 在不定积分记号中, $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ 与 $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$ 均按积分常数可重新合并的意义理解.

知乎@余命数

知乎@余命数

证明 证明依赖求导的线性性 $(kF)'=kF'$ 与 $(F+G)'=F'+G'$. 对 $kF(x)+C$ 求导得 $\frac{d}{dx}(kF(x)+C)=kF'(x)=kf(x)$, 故 $kF(x)+C$ 是 $kf(x)$ 的原函数; 由原函数结构定理, $kf(x)$ 的任意两个原函数只差常数, 此即全体原函数($k=0$ 时给出 $\int 0\,dx=C$), 齐次性得证. 同理, 对 $F(x)+G(x)+C$ 求导得 $\frac{d}{dx}(F(x)+G(x)+C)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$, 故 $F(x)+G(x)+C$ 是 $f(x)+g(x)$ 的原函数, 再由原函数结构定理给出全体原函数, 可加性得证. □

这个定理表明, 在把相差常数的原函数视为同一类的意义下, 不定积分具有**线性结构**. 这允许将复杂函数的积分问题分解为若干个简单函数积分的线性组合, 是进行积分计算的根本法则.

知乎@余命数

2.2.2 基本积分表

既然积分是微分的逆运算, 那么已掌握的每一个求导公式, 反向审视, 都对应着一条积分公式. 这些基本公式是求解更复杂积分问题的基础.

知乎@余命数

知乎@余命数

2.2.2.1 幂函数与对数函数

幂函数求导法则 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ 是我们最熟悉的法则之一. 为将其逆转以求 $\int x^n dx$, 需寻找一个函数, 其导数恰为 x^n. 注意到 $\left(x^{n+1}\right)'=(n+1)x^n$. 为抵消系数 $n+1$, 我们构造 $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 其导数为 $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$. 此推导要求分母 $n+1\neq 0$, 即 $n\neq -1$.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\in\mathbb{R}, n\neq -1)$$

幂函数积分公式中 $n=-1$ 的情况构成了一个独特的缺口.$\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx$ 的答案由一个全新的超越函数, 即自然对数函数, 来填补. 我们已知当 $x>0$ 时, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. 当 $x<0$ 时, $-x>0$, 函数 $\ln(-x)$ 有定义. 根据链式法则, $(\ln(-x))'=$

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$. 故, 无论 x 在哪个半轴, $\frac{1}{x}$ 的原函数都与对数相关. 为统一表达, 我们引入绝对值.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

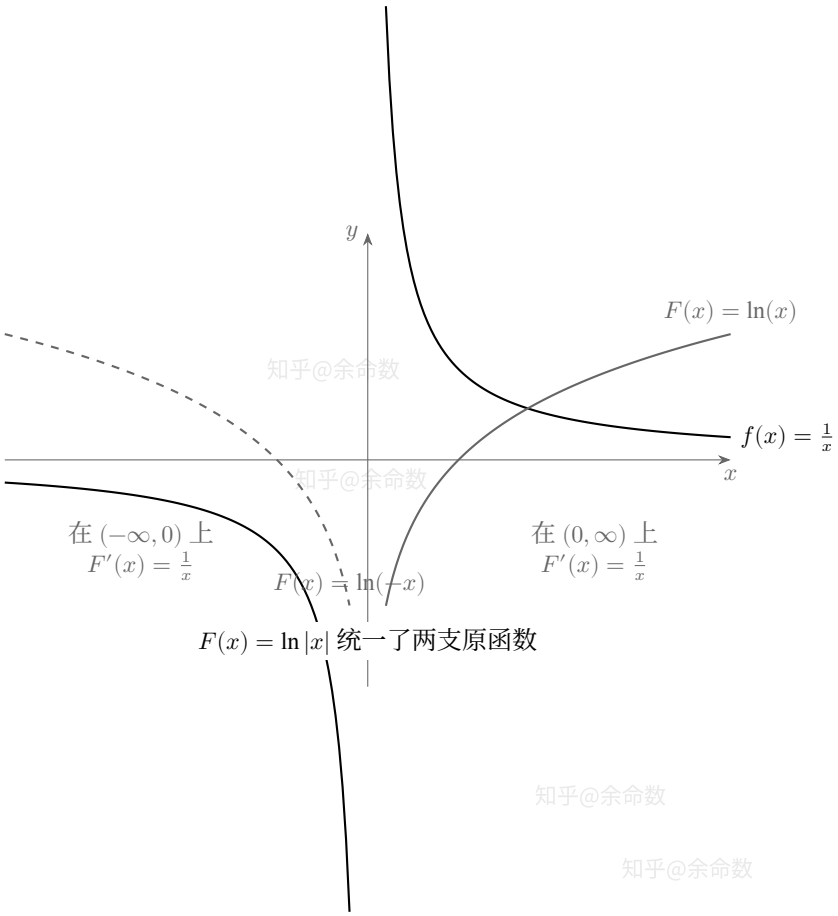


图 2.2 函数 $\ln|x|$ 作为 $\frac{1}{x}$ 在其整个定义域上的原函数

2.2.2.2 指数与三角函数

指数函数 e^x 在微积分中因其导数的不变性而地位特殊, 这一性质原样延续到积分中. 对于一般底数的指数函数 a^x, 求导时产生的 $\ln a$ 因子, 在积分时需要被抵消. 三角函数的积分公式同样是其导数关系的直接逆转, 需特别注意符号的变化.

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0, a\neq 1)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

注 2.2 (基本不定积分表)

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$
11. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
12. $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$
13. $\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$
14. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
15. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
16. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

上述四组新公式分别由以下求导关系逆转得到: $(\tan x)' = \sec^2 x$ 与 $(\cot x)' = -\csc^2 x$ 配套出现; $(\sec x)' = \sec x\tan x$ 与 $(\csc x)' = -\csc x\cot x$ 配套出现; $(\ln|\cos x|)' = -\tan x$ 给出 $\int \tan x$, $(\ln|\sin x|)' = \cot x$ 给出 $\int \cot x$; 最后两行反三角公式由 $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ 与 $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ 直接逆转. 双曲公式由 $(\sinh x)' = \cosh x$ 与 $(\cosh x)' = \sinh x$ 逆转.

知乎@余命数

2.2.3 积分技巧

在实际问题中, 很少有被积函数能直接与基本积分表中的某一项完全对应. 求解积分的真正挑战, 在于通过代数或三角恒等变换, 将被积函数**化归**为基本形式的线性组合.

例题 2.1 求不定积分 $\int (4x^3 - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 2e^x)\,dx$.

知乎@余命数

解 将根式与负指数统一改写为幂函数, 被积函数即 $4x^3 - 3x^{-1/2} + 2e^x$, 于是可由线性性质逐项套用基本积分表.

$$\begin{aligned}\int \left(4x^3 - 3x^{-1/2} + 2e^x\right) dx &= 4\int x^3\,dx - 3\int x^{-1/2}\,dx + 2\int e^x\,dx \\ &= 4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + 2e^x + C \quad \text{（幂函数与指数函数积分公式）} \\ &= x^4 - 6\sqrt{x} + 2e^x + C\end{aligned}$$

各项原函数中的常数已合并入总的积分常数 C.

例题 2.2 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

解 分母 $x\sqrt{x} = x^{3/2}$, 将分子展开后按幂函数整理, 被积函数即化为可逐项积分的形式.

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{x\sqrt{x}} &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^{3/2}} \\ &= \frac{x^2}{x^{3/2}} - \frac{2x}{x^{3/2}} + \frac{1}{x^{3/2}} \\ &= x^{1/2} - 2x^{-1/2} + x^{-3/2}\end{aligned}$$

展开后各项均为幂函数, 逐项积分得

$$\begin{aligned}\int (x^{1/2} - 2x^{-1/2} + x^{-3/2})\,dx &= \frac{x^{3/2}}{3/2} - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} - 2x^{-1/2} + C \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

例题 2.3 求不定积分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$.

解 $\tan^2 x$ 不在基本积分表中, 但勾股恒等式 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 将其与表中已有的 $\sec^2 x$ 联系起来, 即 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. 代入后两项均可直接积分,

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \sec^2 x\,dx - \int 1\,dx \\ &= \tan x - x + C \quad \left(\int \sec^2 x = \tan x \text{ 与 } \int 1 = x\right)\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.2.3.1 直接积分法

所谓**直接积分法**, 是指仅依靠代数或三角恒等变形, 配合线性性质与基本积分表, 直接求出积分的方法. 这是最基础的积分技巧, 但在被积函数形式复杂时, 难点在于看穿被积函数的代数结构.

例题 2.4 (多项式除法) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$.

解 被积函数分子次数高于分母, 属假分式. 多项式除法给出 $x^4 = (x^2+1)(x^2-1)+1$, 故

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1},$$

三项分别对应基本积分公式. 由线性性质,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx &= \int x^2\,dx - \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C \quad \left(\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x\right).\end{aligned}$$

当被积函数是分子次数不低于分母次数的有理函数时, 先做多项式除法, 再分别处理多项式部分与余下的真分式.

例题 2.5 (分子加项减项) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx$.

解 被积函数 $\frac{x}{x+1}$ 形式简单, 但分子比分母少一项, 而少的恰是分母本身, 故可用**加项减项**把分子改写为与分母相关的形式.

$$\frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

原积分由此拆为两项可直接积分的形式,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1}\,dx &= \int 1\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= x - \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

将分子表达为分母的导数倍再加减适当项, 是处理许多有理积分的开端.

例题 2.6 (和差化积) 求不定积分 $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 被积函数是两个不同频率三角函数的乘积, 不直接匹配基本积分表. 由**积化和差**公式 $\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$ 得 $\sin 3x\cos 2x=\frac{1}{2}[\sin 5x+\sin x]$, 各项均为基本形式, 故

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx+\frac{1}{2}\int \sin x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)+\frac{1}{2}(-\cos x)+C \quad \left(\int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}\right)\\ &= -\frac{\cos 5x}{10}-\frac{\cos x}{2}+C.\end{aligned}$$

2.2.4 初等函数积分的局限性

已在 第2.1节 中引入了达布定理及其推论, 给出了何种函数无原函数的负向判据. 然而, 存在性与能否用所熟悉的函数形式表达是两个截然不同的问题, 一个原函数可能存在, 却不属于任何**初等函数**族.

所熟悉的函数, 如多项式、有理函数、指数、对数、三角函数及其反函数, 以及由它们经过有限次四则运算与复合得到的函数, 统称为**初等函数**. 然而, 一个初等函数的原函数未必也是初等函数, 大量看似简单的初等函数, 其原函数无法用初等函数表示. 这反映了积分运算与微分运算的一个根本性不对称, 即**初等函数的导数必为初等函数, 反之不然**.

一个简短的历史注记. 法国数学家刘维尔 (Liouville, 1835) 证明了一个一般性结论, 若一个初等函数 f 的原函数能用初等函数写出, 则该原函数必然具有*有理函数加几个对数项的常数倍*这一特定形式 (用符号写为 $F=R+\sum_i c_i\ln R_i$, 其中 R, R_i 都是初等构件的有理函数) . 这一定理的证明属于微分代数 (differential algebra) 范畴, 此处只介绍结论. 反过来, 只要能确认 f 的原函数不属于上述有理加对数的形式, 即可断言它不是初等函数.

刘维尔定理最常用的推论是, 若 f 的原函数不能用上述有理加对数形式表达, 则 $\int f\,dx$ 不是初等函数. 这里举几个著名的原函数不是初等函数的例子, 它们的原函数分别定义了重要的特殊函数:

- $\int e^{-x^2}\,dx$: 高斯积分的被积函数, 其原函数与误差函数 $\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ 相关, 在概率论与统计学中频繁出现.
- $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$: 正弦积分 $\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, 在信号处理与傅里叶分析中频繁出现.
- $\int \frac{1}{\ln x}\,dx$: 对数积分 $\operatorname{Li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ (约定绕过奇点), 在素数分布研究中与素数定理紧密相关.
- $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$: 第二类完全/不完全椭圆积分 $\mathrm{E}(k)$, 在最速降线、单摆周期等问题中扮演关键角色.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

基本积分公式加上换元、分部等技巧所能解出的初等积分，仅仅是全部初等函数中的沧海一粟. 这一事实说明数值积分方法与特殊函数理论同样属于积分学的组成部分.

2.3 换元积分法

我们现有的工具，即基本积分公式和线性运算法则，使我们能够对基本函数的和与差进行积分. 然而这套工具在面对复合函数时则显得无能为力. 例如，我们能够求解 $\int \cos x \, dx$，但面对 $\int \cos(2x) \, dx$ 却束手无策；可求解 $\int \sqrt{x} \, dx$，但对于 $\int 2x\sqrt{x^2+1} \, dx$ 却感到棘手.

这些更复杂的被积函数源于链式法则，往往具有一个共同的结构特征，它们看起来像是一个复合函数经过链式法则求导后的产物. 这提示我们，处理复合函数的积分，关键在微分学的链式法则之中.

再看链式法则.

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

如果对这个等式的两边同时进行不定积分，根据微分与积分的互逆关系，我们会得到.

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

这个恒等式是换元技巧的依据. 它说明了一个基本的模式，如果一个被积函数可以被识别为一个外层函数的导数 F' 作用于一个内层函数 $g(x)$，再乘以这个内层函数自身的导数 $g'(x)$ 的形式，那么它的积分结果就是那个外层函数的原函数 F 作用于内层函数 $g(x)$.

为了系统地利用这一模式，我们引入一种形式上的变量替换，即令 $u = g(x)$. 这种变量替换的技巧，就是所谓的**换元积分法**，它在积分运算中的地位，完全等同于链式法则在微分运算中的地位. 它分为两种方向，第一类换元法通过 $u = g(x)$ 将复杂结构收缩为简单形式；第二类换元法通过 $x = \phi(t)$ 将变量展开为一个函数，以期简化被积函数的内在结构.

2.3.1 第一类换元法（凑微分法）

第一类换元法的策略是由内向外识别结构. 需在被积函数中辨认出 $f(g(x))g'(x)$ 的形式，然后通过替换 $u = g(x)$ 将其转化为更易处理的 $\int f(u)du$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.5 (第一类换元积分法则) 设函数 $f(u)$ 在区间 J 上具有原函数 $F(u)$, 即 $F'(u)=f(u)$. 如果 $u=g(x)$ 是区间 I 上的可导函数, 且 $g(I)\subset J$, 那么有

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F(g(x))+C \tag{2-2}$$

知乎@余命数

证明 依不定积分的定义, 只需验证 $F(g(x))+C$ 是被积函数 $f(g(x))g'(x)$ 的原函数, 即证

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))+C]=f(g(x))g'(x).$$

$F(g(x))$ 由外层 $F(u)$ 与内层 $u=g(x)$ 复合而成, 由链式法则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x))&=\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=F'(u)\cdot g'(x)=f(u)\cdot g'(x)\quad\left(\text{由 }F'(u)=f(u)\text{ 与 }\frac{du}{dx}=g'(x)\right).\end{aligned}$$

回代 $u=g(x)$, 上式即 $f(g(x))g'(x)$; 常数 C 求导为零, 故

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))+C]=f(g(x))g'(x),$$

这表明 $F(g(x))$ 是 $f(g(x))g'(x)$ 的一个原函数. 再由假设 $\int f(u)\,du=F(u)+C$ 代入 $u=g(x)$, 定理得证. □

在实际操作中, 将莱布尼茨的微分符号 $du=g'(x)dx$ 作为一个形式上的整体来进行替换. 这种将微分 dx 视为可分离、可组合的代数实体的做法, 在严格的分析基础上需要更深的理论支撑(微分形式), 但在计算层面是一种极为有效且直观的启发式工具.

注 2.3 (第一类换元法战略思想)

1. **识别结构**. 审视被积函数, 尝试寻找一个复合函数的内层 $u=g(x)$, 其导数 $g'(x)$(或其常数倍)也在被积表达式中作为因子出现.
2. **换元**.
   - 声明替换 $u=g(x)$, 并计算其微分 $du=g'(x)dx$.
   - 将被积表达式中所有与 x 相关的部分完全替换为关于 u 和 du 的表达式. 积分 $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ 此时应转化为更简洁的 $\int f(u)\,du$. 这个过程也常被称为凑微分.
3. **求解新积分**. 对关于 u 的新积分求解. 这一步通常可以直接套用基本积分公式.
4. **回代**. 将积分结果中的变量 u 替换回原来的表达式 $g(x)$, 确保最终答案是关于 x 的函数.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.7　求不定积分 $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

解　被积函数含有复合结构 $\sqrt{x^2+1}$, 取内层 $u=x^2+1$, 其微分 $du=2x\,dx$ 恰好是根号外剩余的因子, 故为一可凑微分的换元结构. 令 $u=x^2+1$, 则 $du=2x\,dx$, 原积分化为关于 u 的幂函数积分,

$$\int \sqrt{x^2+1}\,(2x\,dx)=\int u^{1/2}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}+C.$$

回代 $u=x^2+1$, 得

$$\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C.$$

例题 2.8　求不定积分 $\int \tan x\,dx$.

解　$\tan x$ 不在基本积分公式表中, 但改写为分式 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 后, 其分母 $\cos x$ 可取作内层 $u=\cos x$, 微分 $du=(\cos x)'\,dx=-\sin x\,dx$, 与分子 $\sin x\,dx$ 仅差常数因子 -1. 凑微分得 $\sin x\,dx=-du$, 于是

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int \frac{-du}{u}=-\int \frac{du}{u}=-\ln|u|+C.$$

回代 $u=\cos x$,得 $-\ln|\cos x|+C$;由对数性质亦可写成 $\ln|\cos x|^{-1}+C=\ln|\sec x|+C$.

2.3.2 第二类换元法

第一类换元法的策略是令 $u=g(x)$, 将被积函数向标准形式收缩. 而第二类换元法则反其道而行之, 它通过令 $x=\phi(t)$, 将被积函数进行扩张和变形. 这种方法的目标是, 选择一个巧妙的函数 $\phi(t)$, 使得原先棘手的被积函数(尤其是含有根式的), 在新的变量 t 下, 能够利用代数或三角恒等式得到根本性的简化, 从而达到有理化或消除复杂结构的目的.

这种方法最典型的应用场景是处理含有二次根式的积分, 特别是形如 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ 和 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的被积函数. 这些根式结构与勾股定理以及三角函数的基本恒等式在结构上一一对应.

- $\sqrt{a^2-x^2}\longleftrightarrow$ 直角边 $\sqrt{c^2-b^2}\longleftrightarrow \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$
- $\sqrt{a^2+x^2}\longleftrightarrow$ 斜边 $\sqrt{b^2+c^2}\longleftrightarrow \sec t=\sqrt{1+\tan^2 t}$
- $\sqrt{x^2-a^2}\longleftrightarrow$ 直角边 $\sqrt{c^2-b^2}\longleftrightarrow \tan t=\sqrt{\sec^2 t-1}$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用这些联想, 引入三角函数充当新变量即可彻底消除根号, 把复杂的无理函数积分转化为相对简单的有理三角函数积分. 这就是三**角换元法**的做法.

在进入操作细节之前, 我们先把第二类换元法的理论依据陈述清楚, 它的证明正是链式法则的一次直接应用.

定理 2.6 (第二类换元积分法则) 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $x=\psi(t)$ 在区间 J 上单调可导, $\psi'(t)\neq 0$ 在 J 上恒成立, 且 $\psi(J)\subset I$. 若 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 在 J 上有原函数 $\Phi(t)$, 则 $f(x)$ 在 $\psi(J)$ 上有不定积分, 且

$$\int f(x)\,dx=\Phi(\psi^{-1}(x))+C.$$

证明 由 ψ 在 J 上单调可导且 $\psi'(t)\neq 0$, 反函数 $t=\psi^{-1}(x)$ 在 $\psi(J)$ 上可导, 且

$$\frac{d}{dx}\psi^{-1}(x)=\left.\frac{1}{\psi'(t)}\right|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

考虑复合函数 $F(x)=\Phi(\psi^{-1}(x))$, 由链式法则对其关于 x 求导,

$$F'(x)=\Phi'(t)\cdot\frac{d}{dx}\psi^{-1}(x)=\Phi'(\psi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))}.$$

将假设 $\Phi'(t)=f(\psi(t))\psi'(t)$ 代入, 即 $\Phi'(\psi^{-1}(x))=f(x)\,\psi'(\psi^{-1}(x))$, $\psi'(\psi^{-1}(x))$ 与其倒数相乘抵消, 得

$$F'(x)=f(x).$$

因此 $F(x)=\Phi(\psi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 在 $\psi(J)$ 上的一个原函数. 由不定积分定义,

$$\int f(x)\,dx=\Phi(\psi^{-1}(x))+C.$$

□

2.3.2.1 三角换元的操作策略

根据被积函数中根式的不同形式, 我们采用三种标准化的替换策略.

注 2.4 (三角换元法则)

1. **若含 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$:** 令 $x=a\sin t$, 其中 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 此时 $dx=a\cos t\,dt$. 根式化为 $\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a|\cos t|$. 由于 t 的取值范围保证了 $\cos t\geq 0$, 故 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$.

2. **若含 $\sqrt{a^2+x^2}$ $(a>0)$：**令 $x=a\tan t$，其中 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. 此时 $dx=a\sec^2 t\,dt$. 根式化为 $\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=a\sqrt{\sec^2 t}=a|\sec t|$. 由于 t 的取值范围保证了 $\sec t>0$，故 $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$.
3. **若含 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$：**令 $x=a\sec t$，其中 $t\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$. 此时 $dx=a\sec t\tan t\,dt$. 根式化为 $\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\sqrt{\tan^2 t}=a|\tan t|$. 在所选的 t 定义域内，通过选取合适的象限可保证 $\tan t$ 的符号，从而去掉绝对值.

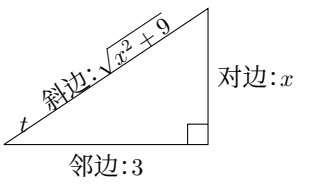
三条法则的要点相同，选取适当的变量代换，利用三角恒等式 $1-\sin^2 t=\cos^2 t$，$1+\tan^2 t=\sec^2 t$ 或 $\sec^2 t-1=\tan^2 t$ 完成开方运算，使被积函数有理化.

例题 2.9　求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

解　被积函数含有 $(x^2+9)^{3/2}=(\sqrt{x^2+9})^3$，取 $a=3$ 即呈 $\sqrt{x^2+a^2}$ 的形式，适用第二类三角换元. 令 $x=3\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $dx=3\sec^2 t\,dt$，$\sqrt{x^2+9}=\sqrt{9\tan^2 t+9}=3\sec t$，故 $(x^2+9)^{3/2}=27\sec^3 t$. 代入原积分，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{27\sec^3 t}\cdot(3\sec^2 t\,dt)&=\frac{3}{27}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}\,dt\\&=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\sec t}\,dt=\frac{1}{9}\int\cos t\,dt=\frac{1}{9}\sin t+C.\end{aligned}$$

最后需将结果从 t 域转换回 x 域. 由换元关系 $x=3\tan t$，即 $\tan t=\frac{x}{3}$，构造辅助直角三角形几何化此关系. 由勾股定理，斜边长为 $\sqrt{x^2+3^2}=\sqrt{x^2+9}$，由此读出



$\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$. 代回积分结果得

$$\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+C.$$

2.3.2.2　根式整体代换与降幂倒代换

三角换元是处理一类二次根式的常见代换手段，适用于 $\sqrt{a^2\pm x^2}$ 与 $\sqrt{x^2-a^2}$ 等根式形式. 但当根式结构与 x 的幂次交错出现，例如根号外含 x 的高次因子时，直接令 $x=1/t$ 作**降幂倒代换**，往往能把根号下 x 的高次项一次性化为低次. 此技巧常与根式**整体代换**配合，目标同为消去根号.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.10 求不定积分 $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}(a>0, 0<x<a, \text{故 } x>0)$.

解 令 $x=1/t$(降幂倒代换), 则 $dx=-dt/t^2$. 由 $x>0$ 知 $t>0$, 故

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{a^2t^2-1}}{t}.$$

被积表达式变为

$$\frac{1}{(1/t)\cdot\sqrt{a^2t^2-1}/t}\cdot\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\frac{dt}{\sqrt{a^2t^2-1}}.$$

令 $u=at$, 则 $du=a\,dt$,

$$-\int\frac{dt}{\sqrt{a^2t^2-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=-\frac{1}{a}\operatorname{arcosh}|u|+C,$$

其中用到反双曲余弦公式 $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\operatorname{arcosh}|u|+C=\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|+C$, 该公式在 $|u|>1$ 时成立. 由 $0<x<a$ 得 $u=a/x>1$, 定义域自动满足. 回代 $u=at=a/x$,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{x}\right)+C=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)+C.$$

2.3.2.3 双曲代换

双曲函数由恒等式 $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ 紧密联结, 这一等式与三角恒等式 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ 在结构上对偶. 差一个符号正是它能消去 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 类根号的关键: 处理 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时令 $x=a\sinh t$, 此时 $dx=a\cosh t\,dt$, $\sqrt{a^2+x^2}=a\cosh t$; 处理 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时令 $x=a\cosh t\,(t>0)$, 此时 $dx=a\sinh t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$. 两种代换都能将无理根式直接化为双曲函数, 之后的积分只需结合 $\cosh^2 t=(\cosh 2t+1)/2$ 等恒等式即可完成.

例题 2.11 求不定积分 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx\,(a>0)$.

解 令 $x=a\sinh t$, 则 $dx=a\cosh t\,dt$, $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\sinh^2 t+a^2}=a\cosh t$. 原积分化为

$$\int(a\cosh t)(a\cosh t)\,dt=a^2\int\cosh^2 t\,dt.$$

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用恒等式 $\cosh^2 t = \dfrac{\cosh 2t + 1}{2}$，

$$a^2 \int \cosh^2 t \, dt = a^2 \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} \, dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sinh 2t}{4} \right) + C.$$

将 $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$ 代入，并回代 $t = \operatorname{arsinh}(x/a)$、$\sinh t = x/a$、$\cosh t = \sqrt{x^2 + a^2}/a$，

$$a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sinh t \, \cosh t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + C.$$

再以 $\operatorname{arsinh}(x/a) = \ln(x/a + \sqrt{x^2/a^2 + 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a$ 整理，其中 $-\dfrac{a^2}{2} \ln a$ 并入常数 C，

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

知乎@余命数

2.3.2.4 万能代换与欧拉代换

知乎@余命数

2.3.2.5 万能代换（Weierstrass 代换）

知乎@余命数

对于仅由 $\sin x, \cos x$ 经四则运算复合而成的**有理三角积分** $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$，万能代换 $t = \tan(x/2)$ 将其统一化为有理代数积分. 关键三角恒等式为

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}.$$

这一代换的几何实质是将单位圆上的点 $(\cos x, \sin x)$ 以斜率参数 t 重新参数化，据此任何 $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ 都可转化为关于 t 的有理函数积分 $\int \widetilde{R}(t) \, dt$.

例题 2.12　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \sin x}$.

解　令 $t = \tan(x/2)$，则 $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$，$dx = \dfrac{2 \, dt}{1 + t^2}$. 代入原积分，

$$\int \frac{1}{2 + \dfrac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2 \, dt}{1 + t^2} = \int \frac{2 \, dt}{2(1 + t^2) + 2t} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}.$$

将分母完成平方，$t^2 + t + 1 = \left(t + \dfrac{1}{2} \right)^2 + \dfrac{3}{4}$，故

$$\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\left(t + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

知乎@余命数

回代 $t=\tan(x/2)$,

$$\int \frac{dx}{2+\sin x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

2.3.2.6 欧拉代换

对于含 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分, 欧拉 (Euler) 给出三种代换以彻底消去根号, 将其化为有理函数积分. 根号下二次式的判别式情况不同, 选用不同的代换:

- 第一种 ($a>0$): 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x$. 两边平方后 x^2 项系数正负相消, x 可被 t 的有理式表示. 适用于 ax^2+bx+c 无实根的情形.
- 第二种 ($c>0$): 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$. 两边平方后常数项正负相消, x 可被 t 的有理式表示. 适用于 $c>0$(常与无实根情形配合).
- 第三种 (ax^2+bx+c 有实根 α,β, 即 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$): 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$. 两边平方后 $(x-\alpha)$ 因子直接约去, 化 x 为 t 的有理式. 适用于判别式 $b^2-4ac>0$ 时必用.

例题 2.13 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$(设 $x>0$, 此时 $\sqrt{x^2+x+1}$ 有意义).

解 此处 $c=1>0$, 适用第二种欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+x+1}=xt+1$(取正号, 配合 $x>0$). 平方两边,

$$x^2+x+1=x^2t^2+2xt+1\implies x^2(1-t^2)+x(1-2t)=0.$$

由 $x>0$ 约去 x, 得 $x(1-t^2)=2t-1$, 即

$$x=\frac{2t-1}{1-t^2}.$$

对 x 关于 t 求导,

$$dx=\frac{d}{dt}\left(\frac{2t-1}{1-t^2}\right)dt=\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

同时由 $\sqrt{x^2+x+1}=xt+1$ 得

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{(2t-1)t}{1-t^2}+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2},$$

因此

$$x\sqrt{x^2+x+1}=\frac{(2t-1)(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将被积表达式在 t 变量下整理,

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{2(t^2-t+1)\,dt/(1-t^2)^2}{(2t-1)(t^2-t+1)/(1-t^2)^2}=\frac{2\,dt}{2t-1}.$$

故

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2\,dt}{2t-1}=\ln|2t-1|+C.$$

由 $\sqrt{x^2+x+1}=xt+1$ 解出 $t=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$, 回代,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right|+C.$$

2.4 分部积分法

已掌握了不定积分的线性性质, 它允许我们处理函数和与差的积分. 然而, 在面对两个函数乘积的积分时, 线性法则便无能为力. 微分学中的乘法法则 $(uv)'=u'v+uv'$ 在积分学中存在一个对应的结构, 它是一种基本的转化策略, 这就是**分部积分法**.

其思想的根源,正在于对乘法法则的逆向应用. 我们从两个可导函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 的乘积的导数法则出发.

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

这是一个关于函数及其导数的恒等式. 根据微积分基本定理的推论, 等式两边函数的原函数族必然只相差一个常数. 于是对该恒等式两边同时取不定积分.

$$\int\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]\,dx=\int u'(x)v(x)\,dx+\int u(x)v'(x)\,dx$$

等式左边, 积分与微分互为逆运算, 因此结果就是原函数本身.

$$u(x)v(x)=\int u'(x)v(x)\,dx+\int u(x)v'(x)\,dx$$

通过简单的移项, 便能用一个积分来表达另一个积分, 说明一种转化关系.

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,dx$$

为计算上的便利与形式上的统一, 我们采用莱布尼茨的微分记号, 令 $du=u'(x)dx$ 以及 $dv=v'(x)dx$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.7 (分部积分法) 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均可导，且不定积分 $\int v(x)u'(x)\,dx$ 存在，则 $\int u(x)v'(x)\,dx$ 也存在，并且

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2-3}$$

证明 由乘积求导法则，

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

移项得 $uv' = (uv)' - u'v$. 对两边取不定积分，并把积分常数并入最终的常数项，得

$$\int u(x)v'(x)\,dx = uv - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

用微分记号 $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$ 书写，即

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

□

分部积分法是一种**积分的变换**. 它将计算 $\int u\,dv$ 的问题，转化为计算 $\int v\,du$ 的问题. 这种变换的价值在于，它把作用在 v 上的微分算子转移到了 u 上. 如果这个转移过程能使新的被积函数 $v\,du$ 比原来的 $u\,dv$ 更易于积分，那么策略就成功了.

注 2.5 (分部积分法的取舍原则)
将被积表达式 $f(x)dx$ 分解为 u 和 dv 两部分时，需要进行权衡. 一个成功的分解遵循以下原则.

1. **简化原则**. 所选取的 u 在微分后得到的 du 应当是形式上更简单的函数. 多项式函数是这一原则的典型受益者，其次数每经过一次微分便降低一阶.
2. **可积原则**. 所选取的 dv 必须是能够被直接积分以求得 v 的. 若 v 本身无法求出，则该方法无法继续.

例题 2.14 求不定积分 $\int xe^x\,dx$.

解 被积函数是多项式 x 与指数函数 e^x 的乘积. 为利用分部积分法简化积分，取多项式 $u = x$(经微分降幂)，$dv = e^x\,dx$，则 $du = dx$ 且 $v = \int e^x\,dx = e^x$. 由分部积分公式 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$，

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= xe^x - e^x + C.$$

原积分由此化为可直接求解的基本积分.

例题 2.15　求不定积分 $\int \ln x\,dx$.

解　被积函数虽只有一个因子，但可视为 $\ln x \cdot 1$ 的乘积，从而套用分部积分. 取 $u = \ln x$, 其导数 $\frac{1}{x}$ 为代数函数, 形式上更简单; 取 $dv = 1 \cdot dx$, 则 $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = x$. 由分部积分公式,

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= (\ln x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

反向取 $u = 1, dv = \ln x\,dx$ 将使 $v = \int \ln x\,dx$ 退回原问题, 故此处须令对数部分作 u.

例题 2.16　求不定积分 $\int e^x \sin x\,dx$.

解　指数函数与三角函数的导数和积分都保持其函数类型不变，一次分部积分不会直接简化被积函数，但连续两次应用会产生一个含原积分本身的代数方程，由此可解出 I. 记 $I = \int e^x \sin x\,dx$. 取 $u = e^x, dv = \sin x\,dx$, 则 $du = e^x\,dx, v = -\cos x$, 第一次分部积分给出

$$\begin{aligned}I &= e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx.\end{aligned}$$

对新出现的 $\int e^x \cos x\,dx$ 再次分部，保持选择一致（仍取 e^x 作 u），即 $u = e^x$、$dv = \cos x\,dx$、$du = e^x\,dx$、$v = \sin x$,

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,dx &= e^x\sin x - \int (\sin x)e^x\,dx \\ &= e^x\sin x - I.\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

把后一式代回前一式，得关于 I 的方程 $I = -e^x\cos x + (e^x\sin x - I)$，即 $2I = e^x(\sin x - \cos x)$. 解出并补上积分常数，

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

知乎@余命数

注 2.6 (反对幂三指)
分部积分中选 u 时，通行的优先次序是反对幂三指，即按以下顺序优先取 u：

- **反**：反三角函数，如 $\arcsin x$, $\arctan x$.
- **对**：对数函数，如 $\ln x$, $\log_a x$.
- **幂**：幂函数与代数函数，含多项式，如 x^n, $\sqrt{x}$.
- **三**：三角函数，如 $\sin x$, $\cos x$.
- **指**：指数函数，如 e^x, a^x.

这样排序的理由是，排在前面的函数微分后结构会简化（反三角微分变为代数型、对数变有理式、幂函数降次），排在后面的函数微分或积分后类型不变，故前者取 u、后者取 dv.

知乎@余命数

2.4.1 广义分部积分法与循环技巧

当被积函数 $u(x)v(x)$ 中的 u 在反复微分后降阶迅速，而 v 在反复积分后保持函数类不变，如 $e^x, \sin x, \cos x$ 时，一次分部积分不足以解决问题，但反复分部会得到一长串的加减相间项. 此时有一种系统化的列表法，称为 **DI 表**（微分-积分表），可以条理清楚地组织这种反复操作.

知乎@余命数

注 2.7 (DI 表方法)
将 u 与 dv 写在表头两列，微分列 D 由 u 开始向下逐次求导，积分列 I 由 dv 开始向下逐次积分，然后沿斜对角配对相乘并交替符号：

微分列 (D)	u	$-u'$	u''	$-u'''$
积分列 (I)	$v_1 = \int dv$	$v_2 = \int v_1$	$v_3 = \int v_2$	$v_4 = \int v_3$

沿斜对角线将 D 行某一项与下一行 I 列对应项相乘，符号取 D 行的符号：

$$\int u\,dv = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - u'''v_4 + \dots$$

当 D 列出现 0 时，即 $u^{(n)} = 0$，例如 u 为多项式，求和自然终止. 这是多项式-指数/三角类积分的高效工具.

知乎@余命数

定理 2.8 (广义分部积分公式) 设 u 在区间 I 上 n 阶可导, $v_1, v_2, \dots, v_n$ 满足 $v'_{k+1} = v_k$, 即可逐次求其原函数. 记 $u^{(0)} = u$. 则

$$\int u\,dv = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k)} v_{k+1} + (-1)^n \int u^{(n)} v_n\,dt.$$

知乎@余命数

证明 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时即普通分部积分公式

$$\int u\,dv = uv_1 - \int u' v_1\,dt.$$

知乎@余命数

设 $n = m$ 时结论已成立. 当 $n = m+1$ 时, 对余项 $(-1)^m \int u^{(m)} v_m\,dt$ 再次应用普通分部积分公式(取 $u^{(m)}$ 作新 u, $v_m\,dt$ 作新 dv). 余项化为

$$(-1)^m\big[u^{(m)} v_{m+1} - \int u^{(m+1)} v_{m+1}\,dt\big] = (-1)^m u^{(m)} v_{m+1} + (-1)^{m+1} \int u^{(m+1)} v_{m+1}\,dt.$$

合入主和即得 $n = m+1$ 公式. □

例题 2.17 求不定积分 $\int x^3 e^x\,dx$.

知乎@余命数

解 这是一个典型适用 DI 表的问题. 取 $u = x^3$, 经 4 次微分归零; 取 $dv = e^x\,dx$, 经反复积分仍为 e^x. 列表:

D	x^3	$3x^2$	$6x$	6	0
signs	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
I	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x

按斜对角线读出(符号取 D 列的符号, 乘下一行 I 列同位项):

$$\int x^3 e^x\,dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\,e^x - 6e^x + C = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,e^x + C.$$

验证: 对右侧求导得 $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' e^x + (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x = (3x^2 - 6x + 6 + x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x = x^3 e^x$, 与被积函数一致.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.4.2 积分递推公式

许多含参量 n 的积分 I_n 可以通过分部积分建立与低阶 I_{n-2}(或 I_{n-1})之间的关系, 最终问题降阶为某起点 I_0, I_1 的直接计算. 这就是所谓**积分递推公式**. 现给出四类经典递推.

定理 2.9 ($\sin^n x$ 与 $\cos^n x$ 的降阶递推) 设 $n \geq 2$. 记 $I_n = \int \sin^n x\,dx$ (或 $I_n = \int \cos^n x\,dx$), 则

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\sin \text{ 版}),$$

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\cos \text{ 版}).$$

证明 仅证 sin 版. 拆 $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$, 取 $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x\,dx$, 则 $du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx$, $v = -\cos x$. 由分部积分,

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx.$$

代入 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

移项得 $nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}$, 整理即得 sin 版递推.cos 版推导对偶(取 $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x\,dx$). □

注 2.8 (技巧点)
把 $\sin^n x$ 拆为 $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$, 选 $u = \sin^{n-1} x$, 微分降一次, $dv = \sin x\,dx$, 积分变 $-\cos x$. 则 $du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx$, $v = -\cos x$. 由 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, 得 $I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$. 把 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 拆回, 得 $nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}$, 整理即得递推公式.cos 版的推导对偶.

例题 2.18 求不定积分 $\int \sin^4 x\,dx$.

解 使用 sin 版递推 ($n = 4$, $I_0 = \int 1\,dx = x + C$):

$$I_4 = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4} I_2.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对 I_2 再用一次 ($n=2$):

知乎@余命数

$$I_2 = -\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{2}I_0 = -\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}.$$

整理

$$I_4 = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} - \frac{3\sin 2x}{16} + \frac{3x}{8} + C.$$

作为对照, 直接用半角公式 $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ 展开: $\sin^4 x = (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)/4 = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}$, 积分得 $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$. 二者经恒等化简一致.

定理 2.10 ($\sec^n x$ 的递推) 设 $n \geq 3$. 记 $J_n = \int \sec^n x\,dx$, 则

$$J_n = \frac{\sec^{n-2} x\,\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\,J_{n-2}.$$

证明 拆 $\sec^n x = \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x$, 取 $u = \sec^{n-2} x$, $dv = \sec^2 x\,dx$, 则 $du = (n-2)\sec^{n-2} x\tan x\,dx$, $v = \tan x$. 由分部积分,

知乎@余命数

$$J_n = \sec^{n-2} x\tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x\tan^2 x\,dx.$$

代入 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,

知乎@余命数

$$J_n = \sec^{n-2} x\tan x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx = \sec^{n-2} x\tan x - (n-2)J_n + (n-2)J_{n-2}.$$

移项得 $(n-1)J_n = \sec^{n-2} x\tan x + (n-2)J_{n-2}$, 整理即得递推公式. □

注 2.9 (技巧点)
拆 $\sec^n x = \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x$. 取 $u = \sec^{n-2} x$, 微分得 $(n-2)\sec^{n-2} x\tan x$, $dv = \sec^2 x\,dx$, 积分得 $\tan x$. 用 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ 拆回, 得到同时含 J_n 与 J_{n-2} 的方程, 可按相似方式解出 J_n. 起点 $J_1 = \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$, $J_2 = \tan x + C$.

定理 2.11 ($\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 的递推) 设 $a > 0, n \geq 2$. 记 $K_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 则

$$K_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\,K_{n-1}\right).$$

证明 对恒等式 $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]=\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\dfrac{2(n-1)x^2}{(x^2+a^2)^n}$ 两端积分, 得

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}=K_{n-1}-2(n-1)\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

拆 $x^2=(x^2+a^2)-a^2$, 则 $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=K_{n-1}-a^2K_n$. 代回,

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}=K_{n-1}-2(n-1)(K_{n-1}-a^2K_n)=(3-2n)K_{n-1}+2(n-1)a^2K_n.$$

解出 K_n,

$$K_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)K_{n-1}\right).$$

□

注 2.10 (技巧点)
起点 $K_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$. 推导思路是对 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 用分部 $\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$, 取 $u=1/(x^2+a^2)^{n-1}$, $dv=dx/(x^2+a^2)$. 利用 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$ 的代数关系整理后即可解出 K_n 与 K_{n-1} 的线性关系. 也可借助三角代换 $x=a\tan\theta$ 化简后再分部.

例题 2.19 求不定积分 $K_2=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

解 直接令 $x=\tan\theta,\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$, 则 $dx=\sec^2\theta\,d\theta$、$x^2+1=\sec^2\theta$、$(x^2+1)^2=\sec^4\theta$. 故

$$K_2=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}+C.$$

回代: $\theta=\arctan x$, $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{2x}{1+x^2}$. 故

$$K_2=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

作为验证, 用递推公式重算:

$$\begin{aligned}K_2&=\frac{1}{2\cdot1\cdot1}\left(\frac{x}{x^2+1}+1\cdot K_1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right)+C.\end{aligned}$$

知乎@余命数

与上述结果完全一致.

2.4.3 分部积分与分部求和的对偶

分部积分法的思想并不局限于连续的积分领域, 它在离散的求和世界中也有对应, 即**分部求和法**, 或称**阿贝尔求和公式**. 从一个更高的视角看, 两种方法都是把一个算子 (微分或差分) 从一个因子转移到另一个因子上, 只是一个用微分, 一个用差分.

先引入离散微积分中的**前向差分算子** Δ. 对于一个数列 $\{a_k\}$,其定义为 $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$. 这个算子是微分算子 $\frac{d}{dx}$ 的离散模拟. 其逆运算是求和算子 $\sum$, 这构成了**离散微积分基本定理**.

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k = \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m$$

这与 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ 的结构完全一致.

接着, 我们推导离散世界中的乘法法则. 考虑两个数列乘积 $a_k B_k$ 的差分.

$$\begin{aligned}
\Delta(a_k B_k) &= a_{k+1}B_{k+1} - a_k B_k \\
&= a_{k+1}B_{k+1} - a_{k+1}B_k + a_{k+1}B_k - a_k B_k \\
&= a_{k+1}(B_{k+1} - B_k) + (a_{k+1} - a_k)B_k \\
&= a_{k+1}(\Delta B_k) + (\Delta a_k)B_k
\end{aligned}$$

移项整理, 得 $\sum$ 算子下分部法则的雏形.

$$a_{k+1}(\Delta B_k) = \Delta(a_k B_k) - (\Delta a_k)B_k$$

对此恒等式两边从 $k = 1$ 到 $n - 1$ 求和.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}(\Delta B_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(a_k B_k) - \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta a_k)B_k$$

右边的第一项是裂项和, 等于 $a_n B_n - a_1 B_1$. 经过指标变换并定义 $b_k = \Delta B_{k-1}$, 即得其最常用的形式.

定理 2.12 (分部求和法) 给定两个数列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$. 令 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ 为 $\{b_k\}$ 的部分和, 且约定 $B_0 = 0$. 则对于任意正整数 $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) \tag{2-4}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 由 $B_k - B_{k-1} = b_k$ 可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

第二个和式中 $B_0 = 0$, 故

$$\sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} = \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} B_j.$$

因而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n\right) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).\end{aligned}$$

这是所需公式. □

2.4.3.1 连续与离散的对偶性

阿贝尔求和公式与分部积分公式之间存在一一对应关系, 揭示了连续数学与离散数学之间基本的结构同构性.

分部积分(连续)		分部求和(离散)
$\int u\,dv$	$\longleftrightarrow$	$\sum a_k b_k$
u	$\longleftrightarrow$	a_k
$dv = v'(x)dx$	$\longleftrightarrow$	b_k
$v = \int dv$(积分)	$\longleftrightarrow$	$B_k = \sum b_i$(求和)
$du = u'(x)dx$(微分)	$\longleftrightarrow$	$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$(差分)
$uv\Big\vert_a^b$(边界项)	$\longleftrightarrow$	$a_n B_n$(边界项)
$\int v\,du$(转化后的积分)	$\longleftrightarrow$	$\sum B_k \Delta a_k$(转化后的求和)

例题 2.20 利用分部求和法, 计算等差比数列之和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k \quad (q \neq 1)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解　与分部积分中对多项式求导以降幂的做法对偶，此处取等差数列作差分. 令 $a_k=k, b_k=q^k$, 则 $\Delta a_k=(k+1)-k=1$, 而 b_k 的部分和为几何级数

$$B_k=\sum_{i=1}^{k} q^i=\frac{q(1-q^k)}{1-q}.$$

由阿贝尔求和公式 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=a_n B_n-\sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1}-a_k)$, 得

$$\begin{aligned} S_n &= n\cdot B_n-\sum_{k=1}^{n-1} B_k\cdot 1 \\ &= n\frac{q(1-q^n)}{1-q}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{q(1-q^k)}{1-q}. \end{aligned}$$

将常数因子 $\frac{q}{1-q}$ 提出, 剩余和式为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(1-q^k) &= \sum_{k=1}^{n-1}1-\sum_{k=1}^{n-1}q^k \\ &= (n-1)-\frac{q(1-q^{n-1})}{1-q}. \end{aligned}$$

代回原式整理,

$$\begin{aligned} S_n &= n\frac{q(1-q^n)}{1-q}-\frac{q}{1-q}\left[(n-1)-\frac{q(1-q^{n-1})}{1-q}\right] \\ &= \frac{nq-nq^{n+1}}{1-q}-\frac{q(n-1)}{1-q}+\frac{q^2(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} \\ &= \frac{nq-nq^{n+1}-nq+q}{1-q}+\frac{q^2-q^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q-nq^{n+1}}{1-q}+\frac{q^2-q^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{(q-nq^{n+1})(1-q)+q^2-q^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q-q^2-nq^{n+1}+nq^{n+2}+q^2-q^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

此结果与错位相减法所得一致, 而分部求和公式给出了一个更高观点的推导.

知乎@余命数　知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.5 定积分与微积分基本定理

前面的讨论把不定积分定义为微分的逆运算. 它提供一个函数族, 回答了何种函数的导数是 $f(x)$ 这一纯粹的分析问题. 然而, 积分学的历史根源和其在物理、几何等领域的广泛应用, 都指向一个更具体的问题, 即**积累问题**.

无论是计算曲线下的面积、变速直线运动在某段时间内的位移, 还是变力在某个过程中所作的功, 它们都是对一个连续变化的量在指定区间上进行无限求和, 以得到总积累量. 这一思想, 经过黎曼的严格化, 形成了定积分的现代理论.

2.5.1 定积分

设想我们要计算一个连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上与 x 轴所围成的曲边梯形的面积. 阿基米德的穷竭法启发我们, 可以用一系列规则图形, 如矩形的面积来逼近这个不规则图形的面积.

1. **分割**. 将区间 $[a, b]$ 任意地分割成 n 个小区间. 这个分割记为 $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 第 i 个小区间的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
2. **近似**. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内, 任意选取一个**样本点** ξ_i. 接着, 用一个高为 $f(\xi_i)$、宽为 Δx_i 的矩形面积来近似该小区间上曲边梯形的面积.
3. **求和**. 将所有这些小矩形的面积加总, 得到总面积的一个近似值. 这个和式被称为**黎曼和**.

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这个黎曼和的值, 依赖于我们如何分割区间 $\mathcal{P}$ 以及如何在每个小区间内选取样本点 ξ_i.

直观上, 当我们让分割无限地细密, 所有小区间都变得无限窄时, 黎曼和就应该逼近一个确定的值, 即曲边梯形的精确面积. 用分割的**模** $\|\mathcal{P}\| = \max_i\{\Delta x_i\}$ 来度量分割的精细程度.

定义 2.3 (定积分) 若当分割的模 $\|\mathcal{P}\| \to 0$ 时, 黎曼和 $S_{\mathcal{P}}$ 的极限存在, 且此极限值与样本点 ξ_i 的选取方式无关, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是**可积的**. 将这个唯一的极限值定义为 $f(x)$ 从 a 到 b 的**定积分**, 记作

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2-5}$$

这里的积分号 $\int$ 是 Summa(求和)首字母 S 的拉长形式, 它与求和号 $\sum$ 在实质上遥相呼应.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

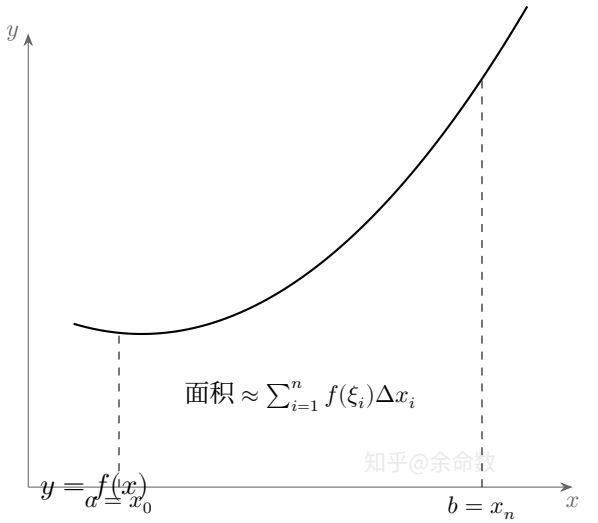


图 2.3　对非均匀分割的黎曼和

什么函数可积, 是可积性理论首先要回答的问题. 连续性足以保证可积性, 这是微积分学的一个基石性结论.

定理 2.13 (连续函数的可积性) 设 $a<b$. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上必定可积.

证明 回到可积性的严格判据: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当对任意 $\epsilon>0$, 存在分割 $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ 使上和与下和之差

$$U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\epsilon,$$

其中 $M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f$, $m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}f$. 故须用 f 的连续性控制 M_i-m_i.

闭区间上的连续函数必一致连续（海涅-康托尔定理, 实数完备性的推论）. 取 $\epsilon'=\frac{\epsilon}{b-a}$, 则存在 $\delta>0$, 使对 $[a,b]$ 中任意 x',x'', 只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon'$, 且 δ 只依赖 ϵ' 而与点的位置无关.

取正整数 n 使 $\frac{b-a}{n}<\delta$, 对 $[a,b]$ 作 n 等分, 每个小区间宽度 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}<\delta$. 由极值定理, f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上取到最大值 $M_i=f(x_i'')$ 与最小值 $m_i=f(x_i')$, 而 $|x_i''-x_i'|\le\Delta x_i<\delta$, 故由一致连续性

$$M_i-m_i=|f(x_i'')-f(x_i')|<\epsilon'=\frac{\epsilon}{b-a},\quad i=1,2,\dots,n.$$

于是

$$U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$< \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon.$$

对任意 $\epsilon > 0$ 均可造出这样的分割, 由黎曼可积的充要条件, f 在 $[a,b]$ 上可积. □

2.5.2 可积的必要条件与充分条件

至此已看到连续函数是可积的, 但这只是一个**充分条件**. 什么样的函数*必定*可积, 什么样的函数*必定不可积*, 下列条件在判别一个陌生的被积函数时极为有用.

知乎@余命数

定理 2.14 (可积的必要条件) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上(Riemann 意义下)可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上必有界.

证明 反证. 设 f 在 $[a,b]$ 上无界. 对任意给定的实数 $M > 0$ 与任意分割 $\mathcal{P}$, 至少存在某个小区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 使 f 在其上无界. 在该区间内选取样本点 ξ_j 使 $|f(\xi_j)|$ 充分大(具体地, $|f(\xi_j)| > \left(M + \sum_{i\neq j}|f(\xi_i)|\,\Delta x_i\right)/\Delta x_j$); 其它小区间任意取样本点. 此时

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \geq |f(\xi_j)|\Delta x_j - \sum_{i\neq j}|f(\xi_i)|\Delta x_i > M.$$

因 M 任意大, 黎曼和 $S_{\mathcal{P}}$ 不可能收敛到任何确定的极限, 与 f 可积相矛盾. 故 f 必有界. □

知乎@余命数

注 2.11
此必要条件反过来并不成立. 狄利克雷函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界 ($|D| \leq 1$), 但在前文已证其黎曼不可积. 故有界严格弱于可积.

定理 2.15 (有限间断点函数的可积性) 若 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有**有限个**第一类间断点(跳跃或可去), 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

知乎@余命数

证明 还将在 第2.5.3小节 中给出此结论的严格论述. 关键在于有限个坏点可用总长度任意小的区间隔离, 在此区间外 f 连续从而可积, 而在隔离区间内 f 有界故其上下和之差的贡献可任意小. 因此整体 $U - L$ 可任意小, f 黎曼可积. □

定理 2.16 (单调函数的可积性) 若 f 在 $[a,b]$ 上单调, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 不妨设 f 单调递增. 对任意分割 $\mathcal{P}$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上由单调性 $M_i - m_i \le f(x_i) - f(x_{i-1})$, 故

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le (f(b) - f(a))\,\|\mathcal{P}\|.$$

若 f 为常数则平凡. 否则 $f(b) - f(a) > 0$, 对任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$, 则 $\|\mathcal{P}\| < \delta$ 时 $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$, 故 f 可积. 单调递减情形对偶. □

注 2.12 (技巧点)
单调函数不一定连续, 甚至可以有可数无穷多个间断点, 例如阶梯型函数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在 $[0, n]$ 上有 n 个间断点. 但单调性便于控制振荡, 对任意分割 $\mathcal{P}$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上由单调性必有 $M_i = \max f$ 与 $m_i = \min f$ 取在端点附近, 故 $M_i - m_i \le |f(x_i) - f(x_{i-1})|$. 于是

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \cdot \Delta x_i \le |f(b) - f(a)| \cdot \|\mathcal{P}\|.$$

只要 $\|\mathcal{P}\| \to 0$, 右端 $\to 0$, 即 $U - L$ 可任意小, 故 f 可积. 完整的 ε-δ 推导即取 $\delta = \varepsilon/|f(b) - f(a)|$ 当 f 非常数, 即得 $U - L < \varepsilon$.

2.5.3 当函数不连续时

连续性是可积的一个**充分条件**, 同时存在不连续的可积函数. 当一个函数不再连续时, 其可积性取决于不连续点的数量与分布.

2.5.3.1 有限个间断点

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 例如跳跃间断点, 则函数**仍然是可积的**. 其直观思想是, 这些有限个坏点的影响, 可以通过将其隔离在一些总长度任意小的区间内而被控制住. 例如, 对于函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $[-1, 1]$ 上的积分. 它仅在 $x = 0$ 处有一个间断点. 可将积分拆分为 $\int_{-1}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{1}(1)dx = -1 + 1 = 0$. 严格的证明是, 可用一个极窄的区间 $(-\delta, \delta)$ 将 $x = 0$ 包围起来. 在这个区间内, 函数的振荡 $M - m = 1 - (-1) = 2$ 是固定的, 但这个区间对 $U - L$ 的贡献是 $2 \cdot (2\delta)$, 可以随 $\delta \to 0$ 而任意小. 在区间 $[-1, -\delta]$ 和 $[\delta, 1]$ 上, 函数是连续的, 因此可积, 其 $U - L$ 之差也可以做得任意小. 两部分合起来, 总的 $U - L$ 仍然可以小于任意给定的 ϵ.

2.5.3.2 无穷个间断点

当间断点的数量达到无穷时, 情况变得极为微妙. 此时, 函数可能可积, 也可能不可积.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.5.3.3 狄利克雷函数(不可积)

考虑定义在 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

这个函数在每一点都不连续. 对于 $[0,1]$ 上的任何一个分割 $\mathcal{P}$, 在任意一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内, 由于有理数和无理数的稠密性, 我们总能找到有理数和无理数. 因此, 每个小区间上的上确界 M_i 永远是 1, 而下确界 m_i 永远是 0. 于是, 对于**任何**分割 $\mathcal{P}$:

$$U(D,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1-0=1$$

$$L(D,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

上和与下和之差恒为 1, 永远无法小于任意正数 ϵ. 因此, 狄利克雷函数是黎曼不可积的.

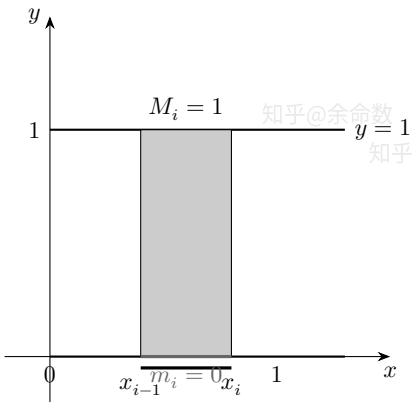


图 2.4 狄利克雷函数在任意子区间上的上确界为 1、下确界为 0, 故不可积

2.5.3.4 可积的托玛函数

然而, 有些含无穷间断点的函数仍可积. 考虑托玛函数 $t(x)$:

$$t(x)=\begin{cases}1/q, & x=p/q\in\mathbb{Q}\text{(最简分数)}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\\ 1, & x=0\end{cases}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个函数在所有有理点上间断, 在所有无理点上连续. 尽管其间断点是无穷且稠密的, 但它在 $[0,1]$ 上却是黎曼可积的, 其积分值为 0. 其深层原因是, 对于任何 $\epsilon > 0$, 只有限个有理点的函数值 $t(x) = 1/q$ 大于 ϵ(因为这要求分母 $q < 1/\epsilon$). 可将这有限个主要间断点用总长度任意小的区间隔离起来, 而在剩下的区间上, 函数的振荡 $M - m$ 小于 ϵ. 从而, 总的 $U - L$ 之差可以被控制.

2.5.4 微积分基本定理

至此, 我们面对着两个在起源、定义和形式上都截然不同的积分概念.

- **不定积分** 是一个纯粹的分析概念, 它作为求导的逆运算, 给出一个函数族 $F(x) + C$.
- **定积分**是一个源于几何与物理的概念, 它作为黎曼和的极限, 给出一个数值.

数学史上最伟大的发现之一, 是牛顿和莱布尼茨发现了这两个概念之间存在着内在的联系. 这种联系就是**微积分基本定理**. 它包含两个部分, 把微分与积分联系起来.

2.5.4.1 第一基本定理

为了探寻二者的联系, 我们构造一个辅助函数, 即**变上限积分函数**. 对于一个在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(t)$, 可定义一个新函数 $A(x)$:

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

这个函数 $A(x)$ 的几何意义是 $f(t)$ 的图像从 a 到 x 所累积的有向面积. 微积分第一基本定理精确地给出了这个累积函数 $A(x)$ 的瞬时变化率.

定理 2.17 (微积分第一基本定理) 若 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则由 $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 定义的函数 $A(x)$ 在 (a,b) 上可导, 并且

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \tag{2-6}$$

证明 考察 $A(x)$ 的导数定义式.

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

根据 $A(x)$ 的定义和定积分的区间可加性,

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个积分值表示了在极窄区间 $[x, x+h]$ 上的面积. 现给出严格估计. 当 $h \neq 0$ 且

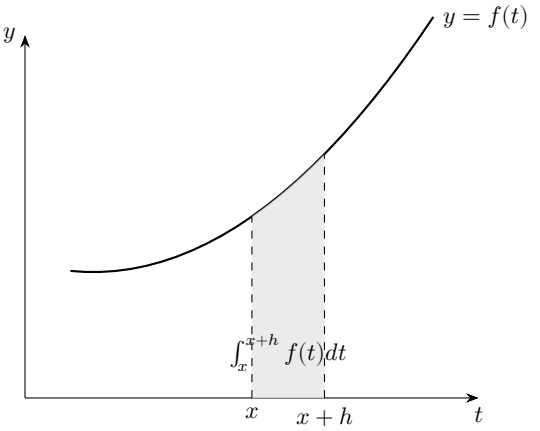


图 2.5 第一基本定理的几何直观

$x+h \in [a,b]$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}-f(x) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t)-f(x)\big)\,dt.\end{aligned}$$

由 f 在点 x 处连续,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得当 $|t-x|<\delta_1$ 时,$|f(t)-f(x)|<\varepsilon$. 又因 $x\in(a,b)$, 可取

$$\delta = \min\{\delta_1,\, x-a,\, b-x\} > 0.$$

当 $0<|h|<\delta$ 时, $x+h\in[a,b]$, 且积分区间 $[x,x+h]$ (或按有向积分理解的 $[x+h,x]$)内所有 t 都满足该不等式, 因而

$$\left|\frac{A(x+h)-A(x)}{h}-f(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\int_{\min(x,x+h)}^{\max(x,x+h)} |f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon.$$

故极限存在且等于 $f(x)$, 即 $A'(x)=f(x)$. □

第一基本定理说明, 对连续函数 f, 变上限积分 $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 给出它的一个原函数. 这证明了连续函数必有原函数, 也表明微分与积分分别作为变化率与总积累的互逆关系.

2.5.4.2 第二基本定理

第一基本定理是一个存在性与结构性的定理, 而第二基本定理则是一个实用的计算工具. 它是我们通常所说的微积分基本定理.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.18 (微积分第二基本定理 (牛顿-莱布尼茨公式)) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的**任意一个**原函数, 即 $F'(x)=f(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \tag{2-7}$$

证明 由第一基本定理, $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数, 由原函数结构定理, 二者只差一个常数 C, 即 $A(x)=F(x)+C$. 令 $x=a$ 确定 C, 因 $A(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$, 故 $0=F(a)+C$, 即 $C=-F(a)$, 从而 $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$. 令 $x=b$ 即得 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$. □

为方便书写, 我们通常引入记号 $F(x)\big|_a^b$ 来表示 $F(b)-F(a)$. 于是, 公式可以写为 $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\big|_a^b$.

这个定理的伟大之处在于, 它将一个原则上需要计算无穷和的极限问题 (求定积分), 转化为了一个简单的代数问题.

1. 找到被积函数 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$(通过不定积分).
2. 计算原函数在积分区间两个端点处的值, 并求其差.

这是数学思想的一次巨大飞跃, 它使得曾经只有像阿基米德那样的天才才能解决的面积问题, 变成了任何掌握了基本积分公式的人都能完成的常规计算.

2.5.4.3 变限积分的复合求导法则

第一基本定理对变上限 $\int_a^x f(t)\,dt$ 处处可导给出了 $A'(x)=f(x)$. 在应用中, 积分上下限常以更一般的函数给出, 例如 $\int_0^{x^2} f(t)\,dt$ 或 $\int_{\sin x}^{e^x} f(t)\,dt$. 下列推论 (复合变限求导) 是第一基本定理与链式法则的直接组合.

推论 2.2 (复合变限求导) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, α,β 在某区间 I 上可导且 $\alpha(I)\subset[a,b]$, $\beta(I)\subset[a,b]$. 定义

$$\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt.$$

则 Φ 在 I 上可导, 且

$$\Phi'(x)=f(\beta(x))\,\beta'(x)-f(\alpha(x))\,\alpha'(x).$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

证明 令 $F(u)=\int_a^u f(t)\,dt$, 由第一基本定理知 F 在 $[a,b]$ 上可导且 $F'(u)=f(u)$. 注意到 $\Phi(x)=F(\beta(x))-F(\alpha(x))$, 由链式法则分别求两项:

$$\frac{d}{dx}F(\beta(x))=F'(\beta(x))\beta'(x)=f(\beta(x))\beta'(x),$$

$$\frac{d}{dx}F(\alpha(x))=F'(\alpha(x))\alpha'(x)=f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

两式相减即得证. □

例题 2.21 求导数 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sin(t^2)\,dt$.

解 在此取常数下限 $\alpha(x)=0$(此时 $\alpha'(x)=0$), 上限 $\beta(x)=x^2$. 被积函数 $f(t)=\sin(t^2)$. 由复合变限求导法则

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sin(t^2)\,dt=\sin\big((x^2)^2\big)\cdot(x^2)'-\sin(0^2)\cdot 0=\sin(x^4)\cdot 2x=2x\sin(x^4).$$

例题 2.22 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx$.

解 被积函数 $f(x)=\sin x$ 的一个原函数为 $F(x)=-\cos x$ ($F'(x)=\sin x$). 由微积分基本定理,

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)\big|_0^{\pi}=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=1+1=2.$$

正弦曲线在 $[0,\pi]$ 上的一个拱形所围区域的精确面积恰为 2.

例题 2.23 计算定积分 $\displaystyle\int_1^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$.

解 被积函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的不定积分宜用换元法求出. 令 $u=\ln x$, 则 $du=\frac{1}{x}dx$; 定积分换元须同步变换上下限, $x=1$ 时 $u=0$, $x=e$ 时 $u=1$. 于是

$$\int_1^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_0^{1}u\,du=\frac{u^2}{2}\bigg|_0^{1}=\frac{1}{2}.$$

直接变换积分限免去了求出原函数后回代 x 的步骤, 是处理定积分换元的标准做法.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.5.5 定积分的极限应用

黎曼和的极限定义了定积分，也给出了将求和极限化为定积分的实用方法. 当某数列极限形如 n 等分区间上的函数求和形式 $\sum f(\frac{i}{n})\,\frac{1}{n}$（或更一般地 $\sum f(a+i\Delta x)\Delta x, \Delta x=(b-a)/n$），我们便可反向利用定积分定义，把这个极限识别为某个连续函数在某区间上的定积分，再用牛顿-莱布尼茨公式计算.

定理 2.19 (由黎曼和还原定积分) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$\Delta x=(b-a)/n$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\,\Delta x)\,\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx.$$

证明 对每个正整数 n，取 n 等分分割 $\mathcal{P}_n=\{a,a+\Delta x,a+2\Delta x,\dots,b\}$，其模 $\|\mathcal{P}_n\|=\Delta x=(b-a)/n$，当 $n\to\infty$ 时它趋于 0. 在每个小区间 $[a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x]$ 上选取样本点为右端点 $\xi_i=a+i\Delta x$. 此分割下相应的黎曼和为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，故可积（前文已证），可积函数的黎曼和对任意细分分割与任意样本点选取都收敛到同一极限 $\int_a^b f(x)\,dx$. 当 $\|\mathcal{P}_n\|\to 0$ 时即得 $S_n\to\int_a^b f(x)\,dx$. □

例题 2.24 求极限 $L=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$.

解 取 $\Delta x=1/n$、$a=0$、$b=1$，被积函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$，则样本点 $\xi_i=a+i\Delta x=i/n$，黎曼和

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\,\Delta x.$$

由定理，该极限即 $\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$. 直接积分得

$$\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)=\frac{4\sqrt{2}-2}{3},$$

故 $L=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\approx 1.219$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.6 定积分的性质

微积分基本定理是计算定积分的实用工具, 而定积分本身来自黎曼和的极限. 因此, 它继承了求和运算 ($\sum$) 的结构, 并表现出与积分区间、被积函数大小相关的几何与分析性质. 掌握这些性质, 既能简化计算, 也能看清定积分作为算子的行为.

2.6.1 代数性质

定积分算子 $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ 作用于一个函数空间之上. 在这个空间中, 最基本的运算是函数的加法与数乘. 定积分算子与这些运算兼容, 展现出**线性性质**.

定理 2.20 (定积分的线性性) 设 $a<b$. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积, k 为任意常数, 则 $kf(x)$ 与 $f(x)+g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

1. **齐次性**: $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
2. **可加性**: $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

证明 先说明可积性在这些运算下保持. 若 f 可积, 则对任意分割 $\mathcal{P}$,

$$U(kf,\mathcal{P})-L(kf,\mathcal{P}) = |k|\big(U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})\big),$$

因而 kf 可积. 若 f,g 可积, 对任意 $\varepsilon>0$ 可分别取分割使两者的上下和差小于 $\varepsilon/2$; 取这两个分割的公共加细后, 利用

$$U(f+g,\mathcal{P})-L(f+g,\mathcal{P}) \le \big(U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})\big)+\big(U(g,\mathcal{P})-L(g,\mathcal{P})\big)$$

可得 $f+g$ 可积.

再由求和算子 $\sum$ 的线性性给出积分等式. 对 $kf(x)$ 的黎曼和有 $\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, 取极限 $\|\mathcal{P}\|\to 0$ 即得齐次性. 对 $f(x)+g(x)$ 的黎曼和有 $\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$, 取极限即得可加性. □

从一个更抽象的视角看, 此定理表明, 在给定区间 $[a,b]$ 上的可积函数构成一个**线性空间**(或称向量空间), 而定积分算子是从这个函数空间到实数域 $\mathbb{R}$ 的一个**线性映射**, 也称线性泛函.

2.6.2 积分区间的性质

这些性质阐明了定积分的值如何依赖于其积分域 $[a,b]$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1. **积分域退化**：若积分的上下限重合，则积分区间 $[a,a]$ 的长度为零.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

这既可以从黎曼和的角度理解（所有 $\Delta x_i = 0$），也可以由牛顿-莱布尼茨公式直接得出 $F(a) - F(a) = 0$.

2. **积分域反向**：交换定积分的上下限，积分值反号.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

此性质最初作为约定引入，它使得牛顿-莱布尼茨公式 $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$ 在 $a > b$ 时依然保持形式上的统一.

3. **积分域的可加性**：积分的区间可以被拆分或合并.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

该性质对于 a, b, c 的任意排列顺序均成立，只要 $f(x)$ 在包含这三点的最大区间上可积. 其几何意义极为直观. 从 a 到 b 的总（有向）面积，等于从 a 到 c 的面积与从 c 到 b 的面积之和.

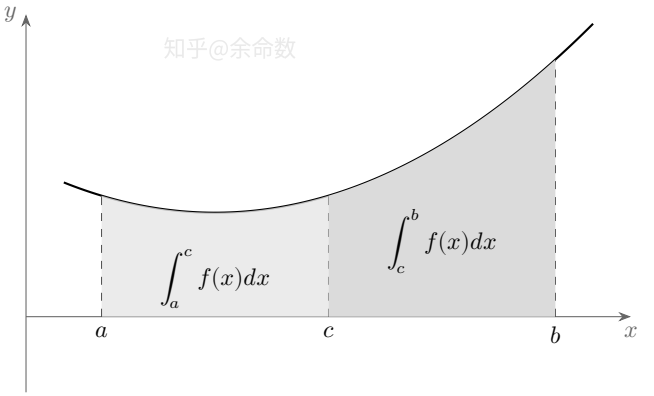


图 2.6　定积分的区间可加性

2.6.3 序性质与估值

这类性质将函数的大小关系（序关系）与积分值的大小关系联系起来，是进行积分估算的理论基础.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4. **保序性**：若在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\geq g(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

特别地，若 $f(x)\geq 0$，则 $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$. 从黎曼和看，由于每个 $f(\xi_i)\geq g(\xi_i)$ 且 $\Delta x_i>0$，故和式的大小关系得以保持，取极限后亦然. 几何上，这表示更高的函数曲线所围成的（有向）面积也更大. 从算子的角度看，定积分是一个**保序算子**.

5. **估值定理**：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m. 那么

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

证明 因为在 $[a,b]$ 上恒有 $m\leq f(x)\leq M$. 根据保序性，对这个不等式链进行积分.

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

由于 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$，定理得证. □

几何上，这表示曲线下的真实面积一定被两个矩形的面积所夹住. 一个是以最小值为高的内接矩形，另一个是以最大值为高的外切矩形.

6. **积分的绝对值不等式**：

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a<b)$$

证明 已知 $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$. 根据保序性，对这个不等式积分，得到

$$\int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

即

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

这是绝对值不等式 $|A|\leq B \iff -B\leq A\leq B$ 的形式. □

2.6.4 积分中值定理

估值定理给出了积分值的一个界. 在这个界之间，存在一个值能以平均的方式代表整个积分.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 2.4 (函数的平均值) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**平均值**定义为

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

知乎@余命数

这个定义的合理性在于， 它推广了有限个数算术平均值的概念. 黎曼和 $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ 是对函数值的加权求和， 除以总长度 $b-a=\sum\Delta x_i$ 后再取极限, 就得到了连续情形下的平均值.

那么, 对于一个连续函数, 它是否一定能在某一点取到它的平均值, 积分中值定理给出了肯定的回答.

定理 2.21 (积分中值定理) 设 $a<b$. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2-8}$$

或者写成等价形式 $\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$.

证明 设 m 和 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值. 根据估值定理,

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

知乎@余命数

两边同除以 $(b-a)$, 得

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M$$

故函数的平均值 $\bar{f}$ 介于函数的最小值与最大值之间. 由于 $f(x)$ 在闭区间上连续, 根据**介值定理**, 对于任何一个介于 m 与 M 之间的数值, 函数 $f(x)$ 必定能在区间内的某一点取到该值. 因此, 在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=\bar{f}$. □

此定理的几何意义极为基本. 对于任意连续曲线下的面积, 总能找到一个高度为 $f(\xi)$ 的矩形, 其宽度为区间长度 $(b-a)$, 使得这个矩形的面积与曲线下的面积相等.

知乎@余命数

2.6.5 推广的积分第一中值定理

积分第一中值定理中, 被积函数是单个函数 $f(x)$. 在应用中常常遇到两个函数的乘积 $f(x)g(x)$ 的积分. 当其中一个因子 g 不变号时, 中值定理有相应的推广形式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

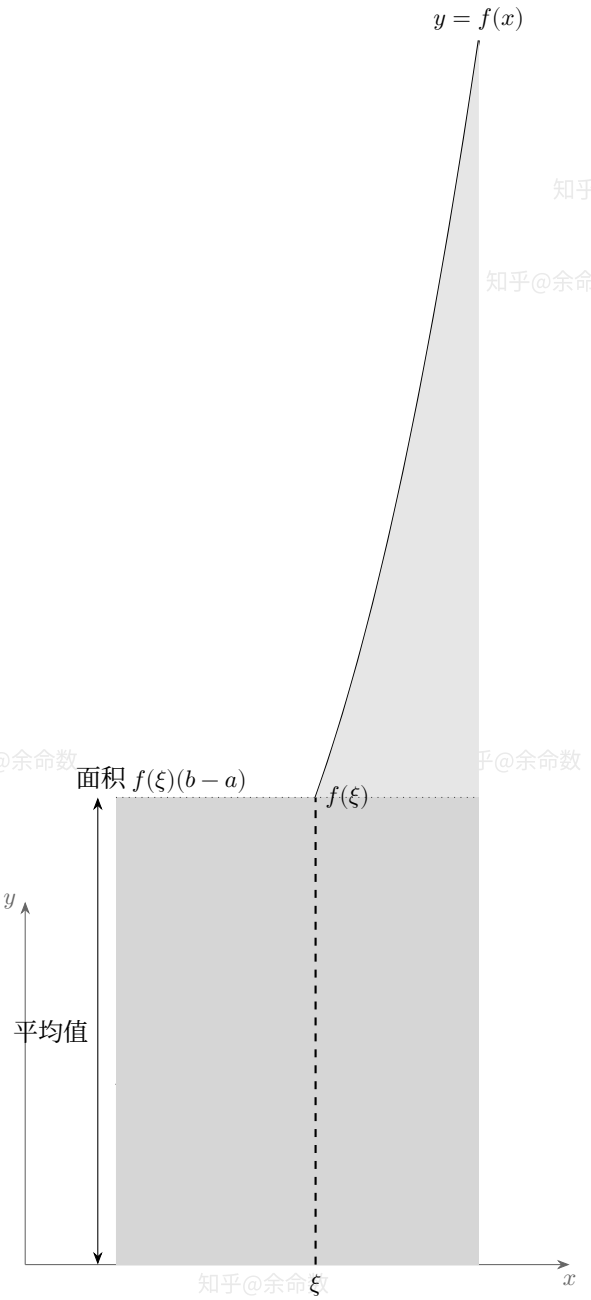


图 2.7 积分中值定理的几何诠释

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.22 (推广的积分第一中值定理) 设 f, g 均在 $[a,b]$ 上连续, 且 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 即恒有 $g(x) \geq 0$ 或恒有 $g(x) \leq 0$. 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

证明 不妨设 $g(x) \geq 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立 (否则考虑 $-g$). 设 $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$, 由连续性极值定理知 m, M 存在. 由 $m \leq f(x) \leq M$ 与 $g(x) \geq 0$ 得

$$m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\,g(x).$$

保序性已在 第2.6.3小节 中证明过, 由它积分得

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g.$$

若 $\int_a^b g = 0$, 则不等式两边均为 0, $\int_a^b fg = 0$, 任意 ξ 都成立, 定理平凡. 否则

$$m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M.$$

由 f 在 $[a,b]$ 上连续, 介值定理保证存在 $\xi \in [a,b]$ 使 $f(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$, 即 $\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$. □

注 2.13
当 $g \equiv 1$ 时, 即退化为前文的(普通)积分中值定理 $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$. 推广形式允许处理带权函数 g 的平均值问题.

例题 2.25 估计 $\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ 的范围.

解 在 $[0,1]$ 上 $e^{-x} > 0$ 不变号, 视作权函数 $g(x) = e^{-x}$, $f(x) = x$. 由推广中值定理存在 $\xi \in [0,1]$, 使

$$\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = \xi\int_0^1 e^{-x}\,dx = \xi\cdot(1-e^{-1}).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因 $0 \le \xi \le 1$, 故

$$0 \le \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx \le 1 - \frac{1}{e} \approx 0.6321.$$

(精确值用分部积分易得 $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - 2/e \approx 0.2642$, 确实在估计区间内.)

2.6.6 对称区间与周期函数的积分性质

对于具有对称性或周期性的积分, 利用函数本身的结构可以大幅简化计算. 下列两条定理是利用结构简化积分的范例.

定理 2.23 (奇偶函数在对称区间上的积分) 设 f 在 $[-a, a]$ 上可积. 若 f 为奇函数 ($f(-x) = -f(x)$), 则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. 若 f 为偶函数 ($f(-x) = f(x)$), 则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

证明 拆分 $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f$. 在 $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ 中作换元 $u = -x$, $du = -dx$, 当 $x = -a$ 时 $u = a$, $x = 0$ 时 $u = 0$, 故

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-u)\,du = \int_0^a f(-u)\,du.$$

奇函数情形 $f(-u) = -f(u)$, 故 $\int_{-a}^{0} f = -\int_0^a f$, 总积分 $= 0$. 偶函数情形 $f(-u) = f(u)$, 故 $\int_{-a}^{0} f = \int_0^a f$, 总积分 $= 2\int_0^a f$. □

定理 2.24 (周期函数在一个周期上的积分) 设 f 以 $T > 0$ 为周期, 且在任何有限区间上可积. 则对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

证明 假定 $0 \le a \le T$(其余情况由区间可加性及周期性化归于此). 由区间可加性

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{a+T} f.$$

知乎@余命数

在第二项中作换元 $u=x-T$, $du=dx$, 当 $x=T$ 时 $u=0$, $x=a+T$ 时 $u=a$. 由周期性 $f(u+T)=f(u)$, 即

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^a f(u+T)\,du=\int_0^a f(u)\,du.$$

合并: $\int_a^{a+T} f=\int_a^T f+\int_0^a f=\int_0^T f$. □

例题 2.26 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx$.

解 利用 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. 因 $\cos 2x$ 的周期为 π, 故 $\sin^2 x$ 的最小周期也为 π. 由周期性定理(取 $a=0, T=\pi$, 注意 $2\pi=2T$),

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx.$$

在 $[0,\pi]$ 上对称地, $\sin^2 x$ 关于中点 $\pi/2$ 对称, 故 $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$. 应用将要给出的华里士公式 ($n=2$), 得 $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$, 故

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4}=\pi.$$

也可直接积分验证, $\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{2}-\frac{0-0}{4}=\pi$.

2.6.7 区间反射性质与特殊变换

对积分区间作线性代换 $u=a+b-x$, 可以把积分反射回原区间, 但被积函数 f 换成 $f(a+b-x)$. 这一定积分本身不变的性质(King 性质)是处理对称积分的有效工具.

定理 2.25 (King 性质 (区间反射)) 对 $[a,b]$ 上连续函数 f,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

证明 令 $u=a+b-x$, $du=-dx$. 当 $x=a$ 时 $u=b$, $x=b$ 时 $u=a$, 故

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(a+b-u)\,du=\int_a^b f(a+b-u)\,du.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

把积分变量名 u 改回 x 即得证. □

推论 2.3 (半周期消去) 若 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 则

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx.$$

证明 记 $I=\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, dx$, 应用 King 性质(取 $a=0, b=\pi$, 故 $a+b=\pi$). 作代换 $u=\pi-x$, 则 $\sin(\pi-u)=\sin u$, 故 $f(\sin(\pi-u))=f(\sin u)$.

$$I=\int_0^{\pi}(\pi-u)\, f(\sin u)\, du=\pi\int_0^{\pi} f(\sin u)\, du-\int_0^{\pi} u\, f(\sin u)\, du.$$

最后一项即 $-I$. 故 $I=\pi\int_0^{\pi} f(\sin u)\, du - I$, 即 $2I=\pi\int_0^{\pi} f(\sin u)\, du$, 解出

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx.$$

□

例题 2.27 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^3 x\, dx$.

解 取 $f(t)=t^3$, 则 $f(\sin x)=\sin^3 x$. 由半周期消去推论得

$$\int_0^{\pi} x\sin^3 x\, dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^3 x\, dx.$$

计算 $\int_0^{\pi}\sin^3 x\, dx=\int_0^{\pi}\sin x(1-\cos^2 x)\, dx$. 令 $u=\cos x$, $du=-\sin x\, dx$, 当 $x=0$ 时 $u=1$, $x=\pi$ 时 $u=-1$.

$$\int_0^{\pi}\sin^3 x\, dx=\int_1^{-1}(1-u^2)(-du)=\int_{-1}^{1}(1-u^2)\, du=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

故 $\int_0^{\pi} x\sin^3 x\, dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

2.6.8 华里士公式 (Wallis' Formula)

已在 第2.4.2小节 的 $\sin^n x$ 递推公式中, 掌握了把 $I_n=\int\sin^n x\, dx$ 降阶到 I_{n-2} 的方法. 当积分区间限定在 $[0,\pi/2]$ 时, 把同一递推重复应用, 最终归约到 I_0 或 I_1, 即可得到一个统一封闭的公式, 这就是华里士公式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.26 (华里士公式) 对正整数 n,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数},\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

其中 $n!!=n(n-2)(n-4)\cdots$ 为双阶乘, 约定 $(-1)!!=0!!=1$.

证明 记 $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$. 由 第2.4.2小节 的 sin 版递推应用于 $[0,\pi/2]$,

$$I_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}I_{n-2},$$

端点项因 $\cos(\pi/2)=0$ 与 $\sin(0)=0$ 而消失. 起点 $I_0=\pi/2$, $I_1=1$. $n=2m$ 为偶数时, 重复递推至 I_0:

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$n=2m+1$ 为奇数时, 重复递推至 I_1:

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

$\cos^n$ 版由换元 $x\to\pi/2-x$ 化为 $\sin^n$ 版, 结果一致. □

例题 2.28 求 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\,dx$.

解 $n=6$ 为偶数, 由公式得 $I_6=\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}$. 计算双阶乘: $5!!=5\cdot3\cdot1=15$, $6!!=6\cdot4\cdot2=48$. 故

$$I_6=\frac{15}{48}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}.$$

作为验证, $\int_0^{\pi/2}\sin^7 x\,dx$($n=7$ 奇)应为 $\frac{6!!}{7!!}=\frac{48}{105}=\frac{16}{35}$, 对偶可用同公式.

2.6.9 经典积分不等式

最后用两条著名不等式结束本章.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

定理 2.27 (柯西-施瓦茨积分不等式) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,dx \cdot \int_a^b g(x)^2\,dx.$$

等号成立当且仅当 f 与 g 线性相关, 即 $f=\lambda g$ 或 $g=\lambda f$. 在 g 不恒为零的连续情形下, 即存在常数 c 使 $f(x)=cg(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒成立.

证明 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx \ge 0$. 展开得关于 λ 的二次式

$$\left(\int_a^b g^2\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b f^2 \ge 0.$$

该二次式非负, 故判别式 $\Delta = 4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \le 0$, 即 $\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$. 等号当 $\Delta=0$ 时成立, 即存在 λ_0 使 $\int_a^b (f+\lambda_0 g)^2 = 0$, 亦即 $f+\lambda_0 g = 0$ 几乎处处, 故 $f=cg$. □

例题 2.29 估计 $\left(\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx\right)^2$ 的上界.

解 取 $f(x)=x$、$g(x)=\sqrt{1-x}$、$[a,b]=[0,1]$. 由柯西-施瓦茨不等式

$$\left(\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2\,dx \cdot \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

故 $\left|\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx\right| \le \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.408$. (精确值可用换元 $x=1-t^2$ 或直接由 $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 (u^{1/2}-u^{3/2})\,du = \frac{2}{3}-\frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0.267$ 求得.)

定理 2.28 (切比雪夫积分不等式) 设 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积且**同单调**, 即同时单调递增或同时单调递减. 记 $\bar f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, $\bar g = \frac{1}{b-a}\int_a^b g$. 则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \ge \bar f\cdot\bar g.$$

若 f,g **反单调**(一个单增一个单减), 则不等式反向.

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 考虑二重积分 $\iint_{[a,b]\times[a,b]} (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,dx\,dy$. 当 f,g 同单调时，对任意 $x,y\in[a,b]$，$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0$，故二重积分非负. 展开被积函数，得

$$\begin{aligned}&\iint (f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y))\,dx\,dy\\ =\ &2(b-a)\int_a^b fg\,dx-2\left(\int_a^b f\,dx\right)\left(\int_a^b g\,dx\right)\geq 0.\end{aligned}$$

两端除以 $2(b-a)^2$ 得 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b fg\,dx\geq \bar{f}\cdot\bar{g}$. 反单调时 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\leq 0$，不等式反向. □

例题 2.30 验证 $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx\geq\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 e^x\,dx\right)$.

解 在 $[0,1]$ 上，$f(x)=x$ 与 $g(x)=e^x$ 都单调递增（后者因 e^x 严格单增），故由切比雪夫不等式

$$\int_0^1 xe^x\,dx\geq\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 e^x\,dx\right)=\frac{1}{2}(e-1)\approx 0.8591.$$

精确值用分部积分计算，$\int_0^1 xe^x\,dx=\left[(x-1)e^x\right]_0^1=0-(-1)=1\geq 0.859$. 不等式成立.

2.7 定积分的几何与物理应用

定积分源于黎曼和的极限，它对一个连续变化的量在区间上做无限求和，得到总积累量. 前几节建立了积分的计算工具，包括换元法、分部法、微积分基本定理. 本节把这些工具应用于几何与物理中的经典积累问题：面积、体积、弧长、做功与平均值.

每一个应用都遵循同一个模式，把待求的总量分割成若干微元，每个微元用已知的公式算出近似值，再将所有微元求和并取极限，得到一个定积分. 这个方法称为**微元法**（或元素法）.

2.7.1 平面图形的面积

第2.5节 已经用黎曼和定义了曲边梯形的面积，连续函数 $f(x)\geq 0$ 在 $[a,b]$ 上与 x 轴围成区域的面积为 $\int_a^b f(x)\,dx$. 当 $f(x)$ 在某些区间取负值时，有向面积用积分的符号自然处理；而几何面积则需取绝对值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

更一般的情形是两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 之间的区域. 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$, 则两曲线之间的区域面积为

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx. \tag{2-9}$$

当 f 与 g 在 $[a,b]$ 上有交叉时, 需要找到所有交点, 在每个子区间上用上方的曲线减下方的曲线, 分段积分. 等价地, 统一写为

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx. \tag{2-10}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

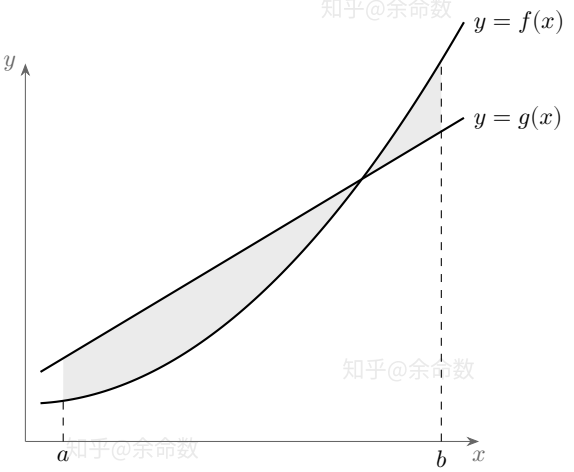


图 2.8 两曲线之间的区域面积

若曲线以参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in[t_1,t_2])$ 给出, 且 φ 单调可导, 则可作换元 $x=\varphi(t)$, 面积公式化为

$$A=\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2-11}$$

此即参数方程下的有向面积公式(详见 第三卷第 14 章对参数方程的讨论).

例题 2.31 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成区域的面积.

解 先求交点. 由 $x^2=x$ 得 $x=0$ 或 $x=1$. 在 $[0,1]$ 上 $x\geq x^2$, 故上方曲线为 $f(x)=x$, 下方曲线为 $g(x)=x^2$. 由 (2-9),

$$A=\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.32　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$ 的面积.

解　用参数方程 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(t\in[0,2\pi])$. 由对称性, 面积等于第一象限部分的四倍. 在第一象限 t 从 0 到 $\pi/2$, x 从 a 递减到 0. 由 (2-11), 注意 $\varphi'(t)=(a\cos t)'=-a\sin t$,

$$A=4\left|\int_0^{\pi/2} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt\right|=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt.$$

由华里士公式 (第2.6节), $\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$. 故 $A=4ab\cdot\frac{\pi}{4}=\pi ab$.

2.7.2 极坐标下面积

在极坐标下, 曲线由 $r=r(\theta)$ 给出(详见 第三卷第 14 章). 考虑由极坐标曲线 $r(\theta)$ 与两条射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 所围成的扇形区域.

将角度区间 $[\alpha,\beta]$ 分割成 n 个小扇形,第 i 个小扇形的圆心角为 $\Delta\theta_i$. 当 $\Delta\theta_i$ 很小时, 该小扇形近似为一个半径 $r(\theta_i)$、圆心角 $\Delta\theta_i$ 的圆扇形, 其面积为 $\frac{1}{2}r(\theta_i)^2\Delta\theta_i$. 对所有小扇形求和并取极限, 得到极坐标下的面积公式

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,d\theta. \tag{2-12}$$

若区域由内曲线 $r_1(\theta)$ 与外曲线 $r_2(\theta)$ $(r_2(\theta)\ge r_1(\theta)\ge 0)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成, 则面积为两个扇形面积之差

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[r_2(\theta)^2-r_1(\theta)^2\right]d\theta. \tag{2-13}$$

例题 2.33　求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围成区域的面积.

解　心形线关于极轴对称, 故面积等于上半平面部分 $(\theta\in[0,\pi])$ 的两倍. 由 (2-12),

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta.$$

其中 $\int_0^\pi\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}$(由半角公式或对称性可得), $\int_0^\pi\cos\theta\,d\theta=[\sin\theta]_0^\pi=0$. 故

$$A=a^2(\pi+0+\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{3}{2}\pi a^2.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.7.3 旋转体的体积

设连续函数 $f(x) \geq 0$ 在 $[a,b]$ 上定义, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周, 得到一个旋转体. 下面用微元法推导其体积.

在点 x 处取厚度为 Δx 的薄片, 当 Δx 很小时, 该薄片近似为一个半径 $f(x)$、高 Δx 的圆柱, 其体积为 $\pi f(x)^2 \Delta x$. 对所有薄片求和并取极限, 得到旋转体体积公式

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx. \tag{2-14}$$

若旋转体的截面为圆环, 例如两曲线之间的区域绕轴旋转, 则微元为圆环面积 $\pi[R(x)^2 - r(x)^2]$ 乘以厚度, 其中 $R(x)$ 为外半径、$r(x)$ 为内半径. 这给出圆环法, 也称垫圈法的体积公式

$$V = \pi \int_a^b \left[R(x)^2 - r(x)^2\right] dx. \tag{2-15}$$

当旋转轴为 y 轴时, 若曲线以 $y = f(x)$ 给出且 f 单调, 可作换元反解出 $x = g(y)$, 再对 y 积分; 也可直接对 x 积分, 此时微元为半径 x、高 $f(x)$ 的圆柱壳(柱壳法), 其体积微元为 $2\pi x f(x)\, dx$, 于是

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx. \tag{2-16}$$

三种方法的选择取决于被积函数的形式与计算便利, 圆盘法与圆环法沿旋转轴方向切片, 柱壳法则沿垂直于旋转轴的方向切片.

例题 2.34 求由曲线 $y = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq 4)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解 由 (2-14),

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi.$$

2.7.4 平行截面面积为已知的立体的体积

旋转体是截面为圆盘的特殊情形. 更一般地, 设一个立体夹在垂直于 x 轴的两平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间, 且过点 x 处垂直于 x 轴的截面面积为已知的连续函

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

数 $A(x)$. 用微元法, 在点 x 处取厚度 Δx 的薄片, 其体积近似为 $A(x)\Delta x$, 求和取极限得

$$V=\int_a^b A(x)\,dx. \tag{2-17}$$

公式 (2-14) 是上式的特例, 当截面为半径 $f(x)$ 的圆盘时, $A(x)=\pi f(x)^2$.

例题 2.35 设一立体的底面是 xy 平面上由直线 $x=0$、$x=4$、$y=0$、$y=2$ 围成的矩形, 垂直于 x 轴的截面均为正方形(边长等于底面上该处的宽度). 求该立体的体积.

解 在点 x 处, 底面上的截面宽度恒为 2(沿 y 方向从 0 到 2), 故正方形截面的边长为 2, 面积 $A(x)=4$. 由 (2-17),

$$V=\int_0^4 4\,dx=16.$$

2.7.5 平面曲线的弧长

设曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, 即 $f\in C^1[a,b]$. 将区间 $[a,b]$ 分成 n 段, 对应曲线上的分点连成折线, 弧长定义为折线总长当分割无限加密时的极限.

每小段折线的长度为 $\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$. 由拉格朗日中值定理, $\Delta y_i=f'(\xi_i)\Delta x_i$, 故折线总长为 $\sum\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\,\Delta x_i$, 取极限得直角坐标下的弧长公式

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{2-18}$$

若曲线以参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in[\alpha,\beta])$ 给出, 且 φ,ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数, 则弧长微元为 $\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$, 于是

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt. \tag{2-19}$$

若曲线以极坐标 $r=r(\theta)$ $(\theta\in[\alpha,\beta])$ 给出且 r 可导, 利用极坐标与直角坐标的关系 $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$, 代入参数式并化简得极坐标下的弧长公式

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta. \tag{2-20}$$

三个公式的弧长微元相同, 均为 $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ 乘以参数微分, 只是在不同坐标系下表达形式不同.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.36 求抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ 在 $0\le x\le 1$ 上的一段弧的长度.

解 由 $y'=x$, 代入 (2-18),

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

用换元法令 $x=\tan t$, 则 $\sqrt{1+x^2}=\sec t$, $dx=\sec^2 t\,dt$. 当 $x=0$ 时 $t=0$, 当 $x=1$ 时 $t=\pi/4$. 故

$$L=\int_0^{\pi/4}\sec^3 t\,dt.$$

由分部积分, 或查积分表, $\int_0^{\pi/4}\sec^3 t\,dt=\frac{1}{2}\left[\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|\right]_0^{\pi/4}$. 代入端值: $\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, $\tan\frac{\pi}{4}=1$, 故

$$L=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-(0+0)\right]=\tfrac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

2.7.6 变力做功

物理学中, 恒力 F 沿力的方向位移 s 所做的功为 $W=Fs$. 当力的大小随位置变化时, 需要用积分处理.

设物体沿 x 轴从 a 运动到 b, 所受的力为位置的连续函数 $F(x)$ (方向沿 x 轴). 将区间 $[a,b]$ 分割, 在每一小段 $[x_i,x_{i+1}]$ 上力近似为常数 $F(x_i)$, 该段做功近似为 $F(x_i)\Delta x_i$. 求和取极限得变力做功公式

$$W=\int_a^b F(x)\,dx. \tag{2-21}$$

抽取液体做功是另一类典型应用. 设一垂直放置的容器内盛有密度 ρ 的液体, 液面距容器底部高为某定值, 要将液体全部抽出容器顶部 (高出容器底部 H), 需计算克服重力所做的功. 在高度 y 处取厚度 Δy 的薄层, 其体积为截面积 $A(y)\Delta y$, 质量为 $\rho A(y)\Delta y$, 该层液体被提升的距离为 $H-y$, 故做功微元为 $\rho g A(y)(H-y)\Delta y$, 总功为

$$W=\rho g\int_{y_1}^{y_2} A(y)(H-y)\,dy, \tag{2-22}$$

其中 $[y_1,y_2]$ 为液体占据的高度区间.

例题 2.37 一弹簧的自然长度为 1 m, 用力拉长时弹力满足胡克定律 $F=kx$, 其中 $k=20\,\mathrm{N/m}$, x 为伸长量. 求将弹簧从自然长度拉长 0.5 m 所做的功.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 以伸长量 x 为积分变量, 范围 $[0, 0.5]$. 由 (2-21),

$$W = \int_0^{0.5} 20x\,dx = 10\big[x^2\big]_0^{0.5} = 10 \times 0.25 = 2.5\,\mathrm{J}.$$

2.7.7 函数的平均值

n 个离散数 $y_1, \dots, y_n$ 的算术平均值为 $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. 连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有无穷多个取值, 其平均值用积分的极限来定义.

将 $[a, b]$ 等分为 n 段, 每段长 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, 取分点 $x_i = a + i\Delta x$, 则离散平均值为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. 注意到 $\frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}$, 令 $n \to \infty$ 取极限得连续函数的平均值

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2-23}$$

知乎@余命数

该公式有明确的几何意义, 以 $[a, b]$ 为底、$\bar{f}$ 为高的矩形面积等于曲线 $y = f(x)$ 下方的曲边梯形面积.

关于平均值的一个重要结论是积分中值定理, 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2-24}$$

知乎@余命数

即连续函数在某区间上必能取到其平均值. 该定理的证明依赖闭区间上连续函数的介值定理.

例题 2.38 求正弦交流电 $i(t) = I_m \sin\omega t$ 在半个周期 $[0, \pi/\omega]$ 上的电流平均值与有效值.

解 由 (2-23), 平均值为

$$\bar{i} = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} I_m \sin(\omega t)\,dt = \frac{\omega I_m}{\pi}\left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = \frac{\omega I_m}{\pi}\cdot\frac{2}{\omega} = \frac{2I_m}{\pi}.$$

有效值(方均根值)定义为 $I_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{i^2}}$, 即

$$I_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} I_m^2 \sin^2(\omega t)\,dt}.$$

由半角公式 $\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$,

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/\omega}[1 - \cos(2\omega t)]\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = \frac{\pi}{2\omega}.$$

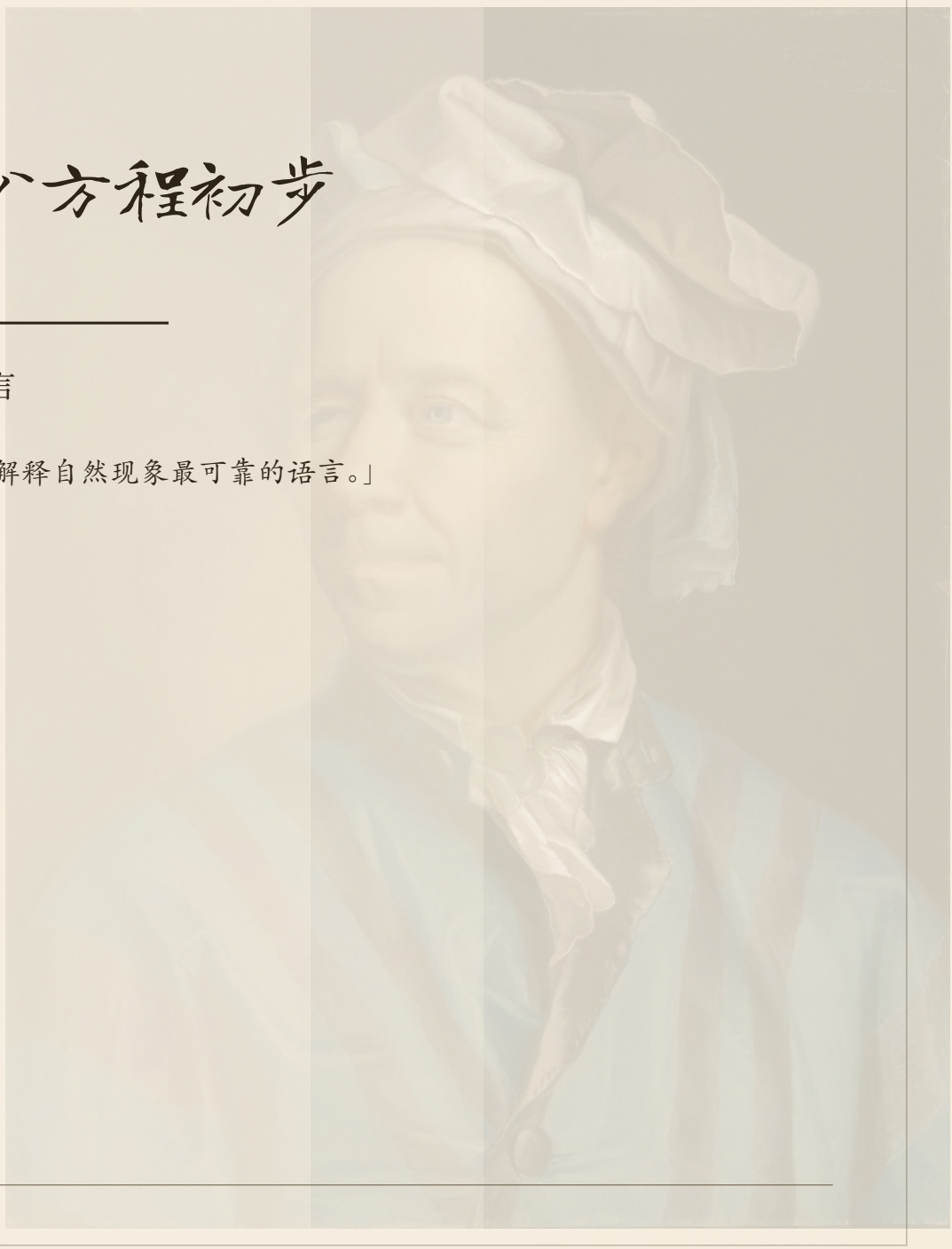
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故 $I_{\text{rms}} = I_m\sqrt{\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. 这正是正弦交流电有效值等于峰值除以 $\sqrt{2}$ 的由来.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 3 章

微分方程初步



基础语言

「数学是解释自然现象最可靠的语言。」

——欧拉

第三章 微分方程初步

3.1 微分方程、阶与解

我们研究两类对象, 不变的量和变化的量. 代数方程(如 $x^2-1=0$)的解是一些孤立的数, 它们描述静止的状态. 但自然科学与工程技术中的许多问题关心的是变化过程. 要刻画这些过程, 我们需要把未知对象从**数**转向**函数**, 即用一个函数描述整个过程的演变.

微分学告诉我们, 一个函数在区间上的整体变化由它在每一点附近的变化率累积而成. 系统在某一瞬间的变化率就是它的导数. 在实验里, 局部的变化法则往往比全局规律更容易测量. 例如, 物体的冷却速率在每一时刻都与它和环境的温差成正比. 这个观察把温度函数 $T(t)$ 与它的导数 $T'(t)$ 直接联系起来.

我们把未知函数与其导数之间的关系写成等式, 就得到**微分方程**. 它要求未知函数在定义域中的每一点都满足自身与变化率之间的特定关系.

方向场与积分曲线的几何图像

一阶微分方程最常见的形式是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y).$$

左端是未知曲线 $y=y(x)$ 在横坐标 x 处的切线斜率, 右端只依赖于点的位置 (x,y). 于是方程给出明确的指令. 平面上每一点都规定了曲线在该点允许的切线方向.

我们在平面上取任意一点 $P=(x_0,y_0)$. 若 f 在该点有定义, 则任何经过 P 的解曲线在 P 处的切线斜率都必须等于 $f(x_0,y_0)$. 解曲线在 P 处只能沿这个斜率穿过, 不能取别的倾角.

我们把同一要求加到平面上许多点. 在每一格点画一小段短线, 方向由 $f(x,y)$ 决定. 这些短线铺满平面, 构成**方向场**, 也称**斜率场**. 方向场在每一点都标出该朝哪个方向前进, 就像一张只标风向的地图.

在这张地图上手描一条曲线, 就是从某一位置出发, 始终顺着每一点的短线方向前进, 使曲线在每一点的切线都与该点的短线方向重合. 这样画出的曲线称为方程的**积分曲线**. 我们也可以把方向场想象成河面的流速方向, 把积分曲线想象成小船的航迹; 航迹在每一点都顺着水流, 才能处处与场相切.

图 3.1 以方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(x-y)$ 为例. 图中每个小箭头的倾角由右端 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)$ 决定. 在区域 $x>y$ 内斜率为正, 曲线向右上方走; 在区域 $x<y$ 内斜率为负, 曲线向右下方走; 靠近直线 $y=x$ 时斜率接近 0, 场几乎水平. 图中的几条连续曲线都是积分曲线, 它们与箭头处处相切, 不会横穿场的方向.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

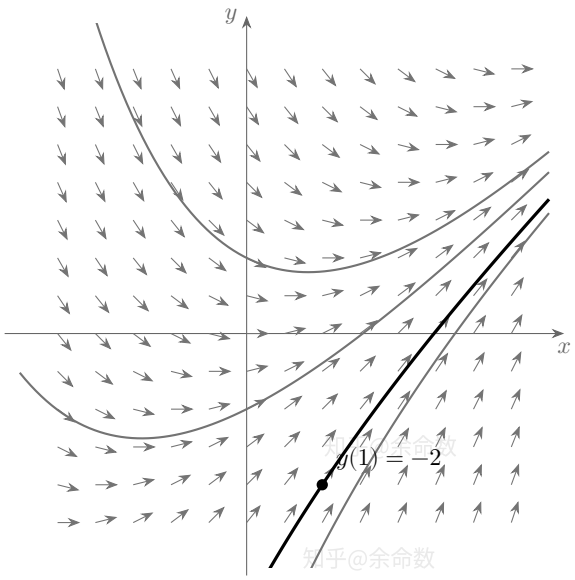


图 3.1　微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}(x-y)$ 的方向场与积分曲线. 灰色短箭头在每一点给出斜率 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)$, 构成方向场. 灰色与黑色曲线是积分曲线, 在每一点都与场方向相切. 加粗的黑色曲线经过点 $(1,-2)$, 由初始条件 $y(1)=-2$ 唯一确定.

从不同起点出发, 可以画出无穷多条积分曲线. 它们共同构成方程的**通解**, 是一族填满方向场的曲线. 若额外指定曲线必须经过某一点 (x_0,y_0), 即给定**初始条件** $y(x_0)=y_0$, 则通常只有一条积分曲线满足要求, 称为**特解**. 图中加粗的曲线经过 $(1,-2)$, 就是由 $y(1)=-2$ 挑出的那一条.

几何图像与后文的代数写法互相印证. 一阶方程的通解通常含有一个任意常数, 这个常数对应在方向场中选取哪一条积分曲线. 一个初值问题由微分方程和曲线过定点这两个条件组成, 在方向场里通常只有一条解. 场在每一点只给出一个方向, 从定点沿场走下去, 航迹便被唯一确定. 严格的存在唯一性定理需要用分析语言证明, 方向场给出同一事实的直观版本.

我们用正式语言把上面的对象整理成定义.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

定义 3.1 (微分方程及其相关概念)

- **微分方程**. 建立自变量 x、未知函数 $y=y(x)$ 以及其直至 n 阶的导数 $y', y'', \dots, y^{(n)}$ 之间关系的方程, 一般形式为 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$.
- **阶**. 方程中出现的导数的最高阶数 n.
- **解**. 若将函数 $y=\phi(x)$ 及其各阶导数代入微分方程后得到关于 x 的恒等式, 则称 $y=\phi(x)$ 是该方程的一个解.
- **通解**. 含有 n 个相互独立任意常数的 n 阶方程的解, 代表满足方程约束的整个函数族.
- **初始条件**. 为确定通解中任意常数而给定的附加条件,通常形如 $y(x_0)=y_0$、$y'(x_0)=y_1$、$\dots$、$y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.
- **特解**. 在初始条件约束下, 由通解确定全部任意常数后得到的解.

知乎@余命数

3.2 可分离变量的微分方程

我们从结构最简单的一类一阶微分方程开始研究. 设一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的右端可以分解为一个只与 x 有关的函数 $g(x)$ 和一个只与 y 有关的函数 $h(y)$ 的乘积, 即

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

知乎@余命数

我们就称它为**可分离变量的微分方程**. 这种方程的特征是, 自变量和未知函数对变化率的影响可以分开.

求解这类方程的方法来自积分学. 设 $h(y)\neq 0$, 我们先对原方程作代数变形, 把含 y 的项放到等式左端, 把含 x 的项放到右端.

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}=g(x)$$

这个等式断言, 对于解函数 $y=y(x)$, 复合函数 $\frac{1}{h(y(x))}\frac{dy}{dx}$ 与函数 $g(x)$ 恒等. 两个相等的函数关于 x 的不定积分也相等(至多差一个常数). 于是我们对等式两端关于 x 积分.

$$\int \frac{1}{h(y(x))}\frac{dy}{dx}\,dx=\int g(x)\,dx$$

观察左端的积分. 令 $u=y(x)$, 则 $du=\frac{dy}{dx}dx$. 根据换元法, 左端的积分可以化为对 y 的积分. 于是

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy=\int g(x)\,dx$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这一步也说明, 把 $\frac{dy}{dx}$ 看作分数并交叉相乘, 得到 $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$. 这个看似不严格的符号操作是正确的. 求出上述两个积分后, 我们就得到一个联系 x 与 y 的代数方程, 它通常以隐函数形式给出原微分方程的通解.

例题 3.1　求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$.

解　方程的右端是 $g(x) = x^2$ 与 $h(y) = \frac{1}{y}$ 的乘积, 因此它是可分离变量方程. 以下在 $y \neq 0$ 的区间上求解. 两端乘以 y 后对 x 积分, 左端用换元 $u = y(x)$ 化为对 y 的积分. 依次演算得

$$\begin{aligned}
\int y\,\frac{dy}{dx}\,dx &= \int x^2\,dx \quad \text{（两端乘 } y \text{ 后对 } x \text{ 积分）}\\
\int y\,dy &= \int x^2\,dx \quad \text{（左端令 } u = y(x) \text{ 换元）}\\
\tfrac{1}{2}y^2 &= \tfrac{1}{3}x^3 + C_1 \quad \text{（求不定积分, } C_1 \text{ 为任意常数）}\\
3y^2 &= 2x^3 + C \quad \text{（两端乘 } 6\text{, 令 } C = 6C_1\text{）.}
\end{aligned}$$

$3y^2 - 2x^3 = C$ 就是方程在不穿过 $y = 0$ 的区间上的通解, 不同的常数 C 对应平面上一族积分曲线. 当积分曲线碰到 $y = 0$ 时, 原方程无定义, 因此解只能取在避开这些点的局部区间上.

该方程的通解为 $3y^2 - 2x^3 = C$.

定理 3.1 (指数增长与衰减模型) 描述一个量的变化率正比于其自身大小的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (k \neq 0 \text{ 为常数})$$

其通解为

$$y = Ce^{kx}$$

其中 C 为任意常数.

证明　方程 $\frac{dy}{dx} = ky$ 描述种群增长、放射性衰变等动态过程. 为了不讨论 $y = 0$ 处除以 y 的问题, 我们把它改写成乘积导数的形式. 设 y 是任意可导解, 则

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-kx}y(x)\right) = e^{-kx}y'(x) - ke^{-kx}y(x) = e^{-kx}\left(y'(x) - ky(x)\right) = 0.$$

因此 $e^{-kx}y(x)$ 在所讨论的区间上为常数, 记为 C. 于是

$$y(x) = Ce^{kx}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

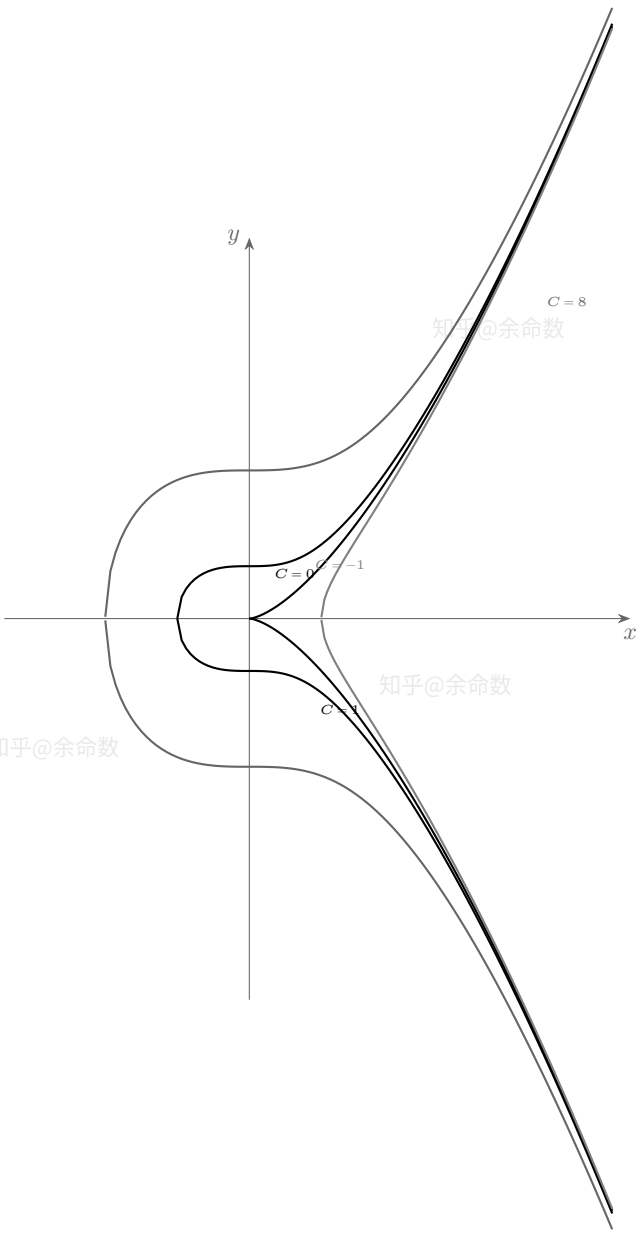


图 3.2 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ 的积分曲线族 $3y^2 - 2x^3 = C$.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

反过来, 对任意常数 C, 函数 $y = Ce^{kx}$ 满足

$$y' = kCe^{kx} = ky,$$

因而都是方程的解. 当 $C = 0$ 时即包含平凡解 $y \equiv 0$.

方程 $\frac{dy}{dx} = ky$ 的通解为 $y = Ce^{kx}$, 其中 C 是任意实数. □

3.3 一阶线性微分方程

另一类重要的一阶微分方程是线性方程. 下面给出它的标准形式.

定义 3.2 (一阶线性微分方程) 形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

的方程, 被称为**一阶线性微分方程**.

我们引入一个辅助函数**积分因子**来求解这类方程. 具体做法是, 在方程两边同乘某个函数 $\mu(x)$, 使新方程的左边正好是一个乘积的导数.

考虑标准形式 $y' + P(x)y = Q(x)$. 两边同乘 $\mu(x)$, 得到 $\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$. 我们希望左端能够写成 $(\mu(x)y)'$. 由乘法求导法则, $(\mu(x)y)' = \mu'(x)y + \mu(x)y'$. 比较两式, 只需 $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$ 即可.

方程 $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$ 正是上一节讨论的指数增长模型, 它的解是 $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$. 这个 $\mu(x)$ 就是我们要找的积分因子.

例题 3.2 求解微分方程 $y' - 2xy = e^{x^2}$.

解 方程已经具有标准形 $y' + P(x)y = Q(x)$, 其中 $P(x) = -2x$, $Q(x) = e^{x^2}$. 按积分因子法, 取 $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-x^2}$, 使左端凑成 $(\mu y)'$. 两端乘 $\mu(x)$ 后依次演算.

$$\begin{aligned}
e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y &= 1 && \text{(两端乘 } e^{-x^2}\text{, 右端 } e^{-x^2}e^{x^2} = 1\text{)}\\
(e^{-x^2}y)' &= 1 && \text{(左端恰为乘积导数)}\\
e^{-x^2}y &= x + C && \text{(两端对 } x \text{ 积分)}\\
y &= (x + C)e^{x^2} && \text{(两端除以 } e^{-x^2}\text{)}.
\end{aligned}$$

方程的通解为 $y = (x + C)e^{x^2}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

阅读提示

可分离变量方程与一阶线性方程的求解方法, 是用微分方程处理函数方程的工具. 尤其是方程 $y' = ky$ 与它的解 $y = Ce^{kx}$, 在 第3.4节 中会反复出现.

3.4 应用微分方程求解函数方程

3.4.1 从代数恒等式到分析微分方程

在前面的章节里, 我们已经学过赋值法、模型法等处理抽象函数方程的代数工具. 这些工具对特定结构的方程很有效. 但遇到形式更新或更复杂的方程时, 纯代数变换可能不够.

函数方程是在定义域上处处成立的**恒等式**. 微积分的一个基本事实是, 若两个函数在某区间上恒等且都可导, 那么它们在该区间上的导函数也恒等.

据此我们可以对函数方程这个恒等式两边求导, 得到关于函数导数的信息. 这个过程常常把一个含多个变量、关系复杂的函数方程, 化成一个只含单个变量、结构清晰的**微分方程**. 一旦转化成功, 我们就可以用微积分的整套工具求出原函数的精确表达式. 这是处理某些函数方程的有效路径.

3.4.2 偏导数

在应用这个策略之前, 我们先需要一个预备工具. 函数方程通常含有多个变量, 例如 $f(x+y)$. 我们熟悉的导数定义针对单变量函数, 对一个多变量表达式求导则需要**偏导数**.

它的想法是直观而直接的. 要对其中一个变量, 例如 x 求导, 就把其余变量, 例如 y 暂时**看作常数**, 然后按单变量求导法则运算.

定义 3.3 (偏导数的操作性定义) 对于一个含有变量 x 和 y 的表达式 $F(x,y)$, 其对 x 的偏导数(记作 $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$)的计算方式是把 y 看作一个常数, 然后对 x 进行常规的求导.

在函数方程的应用里, 最常见的操作是对复合函数求偏导. 这需要链式法则. 我们举例计算 $f(x+y)$ 对 x 的偏导数. 设 $u = x+y$. 由链式法则,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x+y) = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+y)$$

对 x 求偏导时, y 是常数, 因此 $\frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1+0 = 1$. 于是

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x+y) = f'(x+y)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

同理, 对于乘法形式 $f(xy)$, 对 x 求偏导时, y 是常数, 则

$$\frac{\partial}{\partial x}f(xy)=f'(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy)=f'(xy)\cdot y$$

3.4.3 求解的四步流程

利用偏导数这个工具, 我们可以把函数方程问题转成微分方程问题.

例题 3.3 (再探柯西指数方程) 若可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 且 $f(x)$ 不恒为零, 求 $f(x)$.

解 方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 关于 x,y 恒等. 固定 y, 把 $f(y)$ 看作常数, 两端对 x 求偏导. 由链式法则得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x+y)&=\frac{\partial}{\partial x}[f(x)f(y)]\\ f'(x+y)&=f'(x)f(y)\quad(f(y)\text{ 视为常数}).\end{aligned}$$

上式仍含两个变量. 令 $x=0$ 消去 x, 得到 $f'(y)=f'(0)f(y)$. 记 $k=f'(0)$, 把变量改记为 x, 就得到一阶方程 $f'(x)=kf(x)$. 这正是指数增长模型, 它的通解是 $f(x)=Ce^{kx}$.

为确定 C, 我们把通解代回原方程检验.

$$\begin{aligned}f(x+y)&=Ce^{k(x+y)}=Ce^{kx}e^{ky},\\ f(x)f(y)&=(Ce^{kx})(Ce^{ky})=C^2e^{kx}e^{ky}.\end{aligned}$$

两端相等当且仅当 $C=C^2$, 即 $C=0$ 或 $C=1$. 若 $C=0$, 则 $f(x)\equiv0$, 与题设中 f 不恒为零矛盾, 因此 $C=1$. 令 $a=e^k$(a 由 $f'(0)$ 决定), 我们便得到非零可导解.

因此, 唯一的非零可导解是 $f(x)=e^{kx}=(e^k)^x=a^x$.

例题 3.4 设可导函数 $f(x)$ 对任意 $x,y>0$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 求 $f(x)$.

解 方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 对所有 $x,y>0$ 成立. 固定 y 并把它看作常数, 两端对 x 求偏导. 由链式法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(xy)&=\frac{\partial}{\partial x}[f(x)+f(y)]\\ yf'(xy)&=f'(x)\quad(y\text{ 视为常数}, f(y)\text{ 对 }x\text{ 导数为 }0).\end{aligned}$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

为了消去 xy 中的复合变量, 令 $x=1$, 得到 $yf'(y)=f'(1)$. 记 $k=f'(1)$, 把变量改记为 x, 就有 $xf'(x)=k$, 也就是 $f'(x)=\frac{k}{x}$. 两端积分(定义域 $x>0$, 不用绝对值), 得到通解 $f(x)=k\ln x+C$.

把通解代回原方程检验.

$$f(xy)=k\ln(xy)+C=k\ln x+k\ln y+C,$$

$$f(x)+f(y)=(k\ln x+C)+(k\ln y+C)=k\ln x+k\ln y+2C.$$

两端相等要求 $C=2C$, 即 $C=0$. 若 $k\neq 0$, 令 $a=e^{1/k}$, 则 $k\ln x=\frac{\ln x}{\ln a}=\log_a x$; 若 $k=0$, 则解退化为零函数.

故该方程的可导解为 $f(x)=k\ln x$; 其中 $k\neq 0$ 时也可写作 $f(x)=\log_a x$, $k=0$ 时为 $f(x)\equiv 0$.

例题 3.5 (达朗贝尔方程) 若二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, 且 f 不恒为 0. 求 $f(x)$.

解 我们对方程 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 两边求偏导并分离变量来求解. 先令 $x=y=0$, 得到 $2f(0)=2f(0)^2$, 于是 $f(0)\in\{0,1\}$. 若 $f(0)=0$, 再令 $y=0$, 得 $2f(x)=2f(x)f(0)=0$, 即 $f(x)\equiv 0$. 因此非平凡解必有 $f(0)=1$.

对原方程分别关于 x、y 求偏导, 得

$$f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)f(y),\quad (\text{对 } x \text{ 求偏导})$$

$$f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y).\quad (\text{对 } y \text{ 求偏导})$$

对前一式再关于 x 求偏导、后一式再关于 y 求偏导, 两式左端同为 $f''(x+y)+f''(x-y)$, 故右端相等, 得 $2f''(x)f(y)=2f(x)f''(y)$. 令 $y=0$(非平凡情形 $f(0)=1$)并记 $k=f''(0)$, 即得二阶常系数齐次方程 $f''(x)=kf(x)$.

按 k 的符号分为三种情形.

- $k=0$. 方程 $f''(x)=0$ 的通解为 $f(x)=Ax+B$, 由 $f(0)=1$ 得 $B=1$. 在原方程中令 $x=0$ 得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$, 即 f 为偶函数, 故 $A=0$, 解为 $f(x)=1$.
- $k>0$. 令 $k=\omega^2$ ($\omega>0$), 特征方程 $r^2-\omega^2=0$ 给出 $r=\pm\omega$, 通解 $f(x)=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}$. 偶性要求 $f'(0)=0$, 联立

$$f(0)=C_1+C_2=1,$$

$$f'(0)=\omega(C_1-C_2)=0,$$

解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$, 故 $f(x)=\frac{e^{\omega x}+e^{-\omega x}}{2}=\cosh(\omega x)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- $k<0$. 令 $k=-\omega^2$ ($\omega>0$), 特征方程 $r^2+\omega^2=0$ 给出 $r=\pm i\omega$, 通解 $f(x)=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$. 同样由 $f(0)=1$ 与 $f'(0)=0$ 得

$$f(0)=C_1=1,$$
$$f'(0)=\omega C_2=0,$$

即 $C_1=1, C_2=0$, 故 $f(x)=\cos(\omega x)$.

该方程的所有非平凡二阶可导解为 $f(x)=1$, $f(x)=\cos(\omega x)$, 或 $f(x)=\cosh(\omega x)$.

例题 3.6 (正切加法模型) 若可导函数 $f(x)$ 在包含 0 的区间内满足 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, 其中 $x, y, x+y$ 均在该区间内, 且分母不为零, 求 $f(x)$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

解 方程的结构与正切和角公式一致. 先确定 $f(0)$. 令 $x=y=0$, 得 $f(0)=\frac{2f(0)}{1-f(0)^2}$, 即 $f(0)(1+f(0)^2)=0$. 在实数域内唯一解为 $f(0)=0$.

把方程两边对 x 求偏导 ($f(y)$ 视为常数). 左端是 $f'(x+y)$; 右端按商的求导法则展开分子并化简.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}\right)=\frac{f'(x)(1-f(x)f(y))-(f(x)+f(y))(-f'(x)f(y))}{(1-f(x)f(y))^2}$$
$$=\frac{f'(x)(1+f(y)^2)}{(1-f(x)f(y))^2}\quad\text{(分子合并同类项)}.$$

故 $f'(x+y)=\dfrac{f'(x)(1+f(y)^2)}{(1-f(x)f(y))^2}$. 由原方程关于 x, y 对称, 对 y 求偏导得对称式 $f'(x+y)=\dfrac{f'(y)(1+f(x)^2)}{(1-f(x)f(y))^2}$. 比较两式, 得 $f'(x)(1+f(y)^2)=f'(y)(1+f(x)^2)$, 分离变量即

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}=\frac{f'(y)}{1+f(y)^2}.$$

左端仅依赖 x, 右端仅依赖 y, 故两端同为常数 ω, 得可分离变量方程 $\dfrac{df}{1+f^2}=\omega\,dx$. 两端积分得

$$\arctan(f(x))=\omega x+C\quad\left(\int\frac{df}{1+f^2}=\arctan f\right),$$

即 $f(x)=\tan(\omega x+C)$. 代入 $f(0)=0$ (取 arctan 主值) 得 $C=0$; 若用多值反正切, 整数倍 π 由正切周期性吸收, 表达式不变.

故该方程在不跨越正切极点的区间内的可导解为 $f(x)=\tan(\omega x)$. 若要求在整个 $\mathbb{R}$ 上处处有定义并满足原式, 则只能取 $\omega=0$, 即 $f(x)\equiv 0$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.5 增长与衰减模型

第3.2节 证明了方程 $\frac{dy}{dx}=ky$ 的通解是 $y=Ce^{kx}$. 这个简单的方程出现在大量互不相干的领域里: 银行存款、细菌繁殖、放射性衰变、物体冷却、溶液混合. 它们的共同点是, 变化率与现存量成正比. 接着我们就把这些模型一个一个建立起来.

3.5.1 连续复利

设本金为 P, 年利率为 $100k\%$, 如 $k=0.06$ 对应 6%, 一年计息 n 次, 每次利率 $\frac{k}{n}$. 由 第3.1节 的复利知识, t 年后的本利和为

$$A=P\left(1+\frac{k}{n}\right)^{nt}. \tag{3-1}$$

计息周期越短, 结算越频繁. 让 $n\to\infty$, 利用 $\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n/k}\to e$ (第五卷第 24.1 节的极限), 得到

$$A=Pe^{kt}. \tag{3-2}$$

这就是**连续复利**公式. 对 式 (3-2) 求导, $\frac{dA}{dt}=kA$, 本利和恰好满足增长率正比于现存量的微分方程.k 的含义也随之清晰, 它是单位时间内的相对增长率.

> **例题 3.7** 本金 10000 元, 年利率 6%, 存期一年. 比较一年计息一次与连续复利的本利和.

解 一年计息一次, 本利和为 $10000\times1.06=10600$ 元. 连续复利为

$$10000\,e^{0.06}\approx10000\times1.061837=10618.37\text{ 元}.$$

连续复利多出约 18 元. 计息频率的收益有上限, 这个上限正是 e 设定的.

一年计息一次得 10600 元, 连续复利得约 10618.37 元.

3.5.2 人口增长与倍增期

设 $t=0$ 时刻细菌数为 x_0, 营养与环境不受限制, 任一时刻的繁殖率与当时的细菌总数成正比. 记 t 时刻总数为 $x(t)$, 则

$$\frac{dx}{dt}=kx,\qquad x(0)=x_0,$$

解出

$$x(t)=x_0e^{kt}. \tag{3-3}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

数量翻倍所需的时间称为**倍增期**. 在 式 (3-3) 中令 $x(T)=2x_0$, 得 $e^{kT}=2$, 故

$$T=\frac{\ln 2}{k}. \tag{3-4}$$

倍增期只依赖增长率 k, 与初值无关.

例题 3.8　某地区人口以每年 2% 的速率净增长. 按指数增长模型, 人口翻一番需要多少年?

解　此时 $k=0.02=\frac{1}{50}$, 由 式 (3-4),

$$T=50\ln 2\approx 50\times 0.6931=34.7 \text{ 年}.$$

约 34.7 年.

倍增期公式还顺手解释了一条粗估法则, 年增长率百分之 r 的量, 倍增大约要 $\dfrac{70}{r}$ 年. 拿 $r=2$ 验证, $\dfrac{70}{2}=35$, 与 $50\ln 2$ 相差无几, 原因是 $\ln 2\approx 0.693\approx 0.7$.

3.5.3 放射性衰变与半衰期

放射性元素的原子核随机衰变. 单个原子核何时衰变无法预测, 但大量原子核合起来服从一条统计规律, 单位时间内发生衰变的原子核数与现存原子核数成正比. 设 t 时刻现存质量为 $x(t)$, 则

$$-\frac{dx}{dt}=kx\quad(k>0),\qquad \text{即}\qquad x(t)=x_0e^{-kt}.$$

负号表示质量在减少. 现存量减半所需的时间称为**半衰期** $T_{1/2}$. 令 $x(T_{1/2})=\frac{x_0}{2}$, 得

$$kT_{1/2}=\ln 2. \tag{3-5}$$

半衰期与倍增期是同一个公式的两面, 前者刻画衰减到一半, 后者刻画增长到两倍.

例题 3.9 (碳十四测年)　碳十四 (^{14}C) 的半衰期约为 5730 年. 活体生物与环境交换碳, 体内 ^{14}C 的比例与环境一致; 死亡后交换停止, 体内的 ^{14}C 按半衰期衰减. 某古墓木制品的 ^{14}C 放射性只有同类活体材料的 25%, 求它的年代.

解　放射性强度正比于 ^{14}C 的现存量. 设制作年代为 t 年前, 则

$$e^{-kt}=0.25=\frac{1}{4}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 式 (3-5), $k=\frac{\ln 2}{5730}$, 故

$$t=\frac{\ln 4}{k}=\frac{2\ln 2}{\ln 2}\times 5730=2\times 5730=11460 \text{ 年}.$$

该木制品距今约 11460 年.

注 3.1
碳十四测年由化学家 Willard Libby 在 1940 年代末建立, 他因此获得 1960 年诺贝尔化学奖. 半衰期 5730 年恰好落在几千年的尺度上, 适合考古测年; 更久远的年代则改用铀铅法(半衰期约 44.7 亿年)等慢时钟.

3.5.4 Newton 冷却定律

热学实验给出另一条正比规律, 物体温度向环境温度收敛的速率与二者温差成正比. 设物体温度为 $T(t)$, 环境温度为常数 T_s, 则

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_s),\qquad k>0. \tag{3-6}$$

温差 $T-T_s$ 大时散热快, 温差小则散热慢, 收敛的极限是环境温度. 令 $\theta(t)=T(t)-T_s$, 方程化为 第3.2节 的衰减模型 $\theta'=-k\theta$, 解为

$$T(t)=T_s+(T(0)-T_s)e^{-kt}.$$

例题 3.10 一杯 100 °C 的热水放在 20 °C 的房间里, 30 分钟后降至 50 °C. 再过 30 分钟, 水温是多少?

解 记温差 $\theta(t)=T(t)-20$, 初值 $\theta(0)=80$. 由衰减解 $\theta(t)=80e^{-kt}$. $t=30$ 时 $\theta=30$, 即 $80e^{-30k}=30$, $e^{-30k}=\frac{3}{8}$. 于是

$$T(60)=20+80\,e^{-60k}=20+80\,(e^{-30k})^2=20+80\times\frac{9}{64}=31.25\,^\circ\text{C}.$$

再过 30 分钟水温为 31.25 °C.

3.5.5 混合问题

一池液体, 外部以固定流量注入含盐浓度为常数 c_{in} 的盐水, 池内搅拌均匀后以相同流量流出, 池内水量保持不变. 设池内盐量为 $x(t)$, 水量为 V, 流量为 r, 则

$$\frac{dx}{dt}=\underbrace{r\,c_{\text{in}}}_{\text{注入速率}}-\underbrace{r\cdot\frac{x}{V}}_{\text{流出速率}}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这是一个一阶线性方程 (第3.3节), 也可分离变量求解.

例题 3.11　池内有 100 L 清水.$t = 0$ 起注入浓度为 2 g/L 的盐水, 流量为 3 L/min, 同时以相同流量流出搅拌均匀的混合液. 问池内盐量何时达到 100 g? 长时间后盐量趋于多少?

解 注入速率为 $3 \times 2 = 6$ g/min, 流出速率为 $3 \cdot \frac{x}{100}$ g/min, 故

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{100} = \frac{3}{100}(200 - x), \qquad x(0) = 0.$$

知乎@余命数

分离变量:

$$\frac{dx}{200 - x} = \frac{3}{100}\,dt \implies -\ln(200 - x) = \frac{3}{100}t + C.$$

知乎@余命数

代入 $x(0) = 0$ 得 $C = -\ln 200$, 于是

$$x(t) = 200\left(1 - e^{-3t/100}\right).$$

令 $x = 100$ 得 $e^{-3t/100} = \frac{1}{2}$, $t = \frac{100 \ln 2}{3} \approx 23.1$ 分钟.$t \to \infty$ 时 $x \to 200$ g, 与直觉一致, 盐量最终应等于注入浓度乘以池内容积, 即 2 g/L × 100 L.

约 23.1 分钟后盐量达 100 g, 长期盐量趋于 200 g.

练习 3.1　某放射性同位素经 8 天后剩余 30%. 求它的半衰期.

练习 3.2　一杯饮料在冰箱中从 25 °C 降到 10 °C 用了 40 分钟, 冰箱内温度恒为 4 °C. 它降到 6 °C 还需多久?

3.6 落体与极限速度

3.6.1 自由落体

知乎@余命数

取竖直向下为正方向, y 为下落距离. 无空气阻力时, 落体以恒定加速度 $g \approx 9.8$ m/s^2 下落, 运动满足二阶方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $v=\dfrac{dy}{dt}$，方程变为 $\dfrac{dv}{dt}=g$，积分得

$$v=gt+v_0,\qquad y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0,$$

其中 v_0,y_0 为初始速度与初始位置. 从静止开始下落时 $v=gt,y=\frac{1}{2}gt^2$，消去 t 得

$$v=\sqrt{2gy}. \tag{3-7}$$

式 (3-7) 也可由能量守恒导出，动能的增加等于重力势能的减少，$\frac{1}{2}mv^2=mgy$. 两条路径都归结为同一个关系 $v^2=2gy$.

3.6.2 空气阻力与极限速度

真实的下落伴随空气阻力. 低速情形下，阻力的大小近似与速度成正比、方向与运动相反. 设阻力为 $-cv(c>0$，由物体形状与介质决定)，速度方程为

$$\frac{dv}{dt}=g-cv. \tag{3-8}$$

这是 第3.5节 混合问题中出现过的方程，常数项 g 持续加速，比例项 $-cv$ 持续减速. 分离变量求解：

$$\frac{dv}{g-cv}=dt\implies -\frac{1}{c}\ln(g-cv)=t+C_1\implies g-cv=C_2e^{-ct}.$$

代入初值 $v(0)=0$ 得 $C_2=g$，故

$$v(t)=\frac{g}{c}\left(1-e^{-ct}\right). \tag{3-9}$$

当 $t\to\infty$，$v\to\dfrac{g}{c}$. 速度不会无限增大，而是单调逼近上界 $\dfrac{g}{c}$，称为**极限速度**. 物理图像很直白. 速度小时阻力也小，净加速接近 g；速度增大后阻力跟上来，把净加速一点点吃掉，等到 $cv=g$ 时加速归零，速度就稳定在 $\dfrac{g}{c}$.

例题 3.12 跳伞员张开降落伞后，每千克质量受到的空气阻力约为 $2v$(单位 N，速度 v 以 m/s 计)，即 $c=2\ \mathrm{s}^{-1}$. 求张伞后的极限速度，以及达到极限速度 95% 所需的时间.

解 极限速度为

$$\frac{g}{c}=\frac{9.8}{2}=4.9\ \mathrm{m/s}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

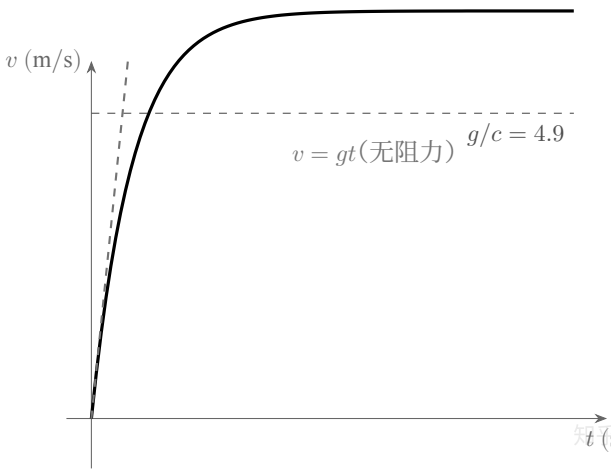


图 3.3　受阻落体的速度曲线 $v(t)=\frac{g}{c}(1-e^{-ct})$(实线, $c=2$), 单调逼近极限速度 g/c; 虚线为无阻力时的 $v=gt$, 短时间内二者几乎重合.

张伞后 $v(t)=4.9\,(1-e^{-2t})$. 达到 95% 即 $e^{-2t}=0.05$, 故

$$t=\frac{\ln 20}{2}\approx 1.5\ \text{s}.$$

两秒不到, 跳伞员便以近似恒定的速度下降.4.9 m/s 相当于从约 1.2 米高处跳下的落地速度, 这正是降落伞救命的原因.

极限速度 4.9 m/s, 约 1.5 秒后达到其 95%.

注 3.2
阻力与速度成正比只在低速下成立. 速度较高时, 阻力更接近与 v^2 成正比, 方程 $\frac{dv}{dt}=g-cv^2$ 依然可分离变量, 解为 $v=\sqrt{\frac{g}{c}}\tanh\left(\sqrt{gc}\,t\right)$, 极限速度为 $\sqrt{g/c}$. 处理手法与 第3.2节 一致, 积分时用到 $\int\frac{dv}{1-v^2}=\operatorname{artanh} v$.

3.6.3 单摆的小角度摆动 *(选读)

一根长为 a 的轻杆, 下端固定质量为 m 的小球, 构成单摆. 设摆角为 $\theta(t)$, 重力沿圆弧切线方向的分量为 $-mg\sin\theta$, 由牛顿第二定律

$$a\,\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta. \tag{3-10}$$

这是非线性方程. 当摆角很小时, 第二卷第 6.10 节的倍角关系给出 $\sin\theta\approx\theta$(弧度制), 方程近似为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{a}\,\theta.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

第3.4节 求解 d'Alembert 方程时，$k<0$ 的情形正是 $f''(x)=-\omega^2 f(x)$，通解为 $C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$. 取 $\omega=\sqrt{g/a}$, 设初始摆角为 α、静止释放, 得

$$\theta(t)=\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right).$$

摆角按余弦规律振荡, 周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \tag{3-11}$$

在小角度近似下与振幅 α 无关. 这个等时性是摆钟的理论基础, 伽利略据传由教堂吊灯的摆动发现了它, 惠更斯则据此造出了第一座摆钟. 大角度下 式 (3-10) 的周期依赖振幅, 摆幅越大周期越长, 摆钟工程师称之为**圆误差**; 其精确周期由一个不能表示为初等函数的积分(椭圆积分)给出.

> **练习 3.3** 要把单摆的周期从 2 秒 (秒摆) 调整为 3 秒, 摆长应变为原来的多少倍?

3.7 悬链线与追逐曲线 *(选读)

3.7.1 降阶法

形如 $y''=f(x,y')$ 的二阶方程不含 y 本身. 令 $p=y'$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$, 方程降为关于 p 的一阶方程

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p).$$

解出 $p(x)$ 后再积分一次便得 y. 前面两节的落体问题(令 $v=y'$)用的正是这一手法, 现在拿它来处理两个经典的几何问题.

3.7.2 悬链线

一条密度均匀的软链悬挂于两点, 静止时下垂成曲线. 伽利略猜测它是抛物线, 莱布尼茨、惠更斯与约翰·伯努利在 1690 年前后各自证明它另有其形. 这条曲线称为**悬链线**(catenary, 源自拉丁语 catena, 链).

取 y 轴过链的最低点. 考察最低点与任意点 (x,y) 之间的一段链, 把它想成被三个力拽住而保持平衡的一小段, 一端是最低点处的水平张力 T_0, 另一端是 (x,y) 处的张力 T (链柔软, 张力只能沿切线方向), 中间还有这段链自身的重力. 设线

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

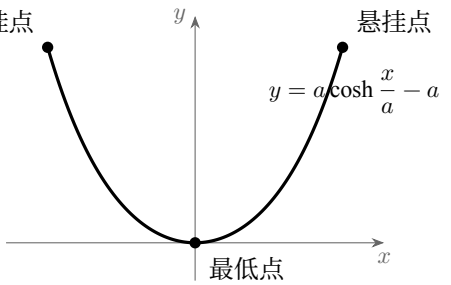


图 3.4　悬链线 $y = a\cosh(x/a) - a$: 坐标原点取在最低点, 纵轴过最低点竖直向上.

密度为常数 w_0, 这段弧长为 s, 重力便是 $w_0 s$. 水平与竖直方向的合力都为零, 写出来是

$$T\cos\theta = T_0, \qquad T\sin\theta = w_0 s,$$

其中 θ 为切线倾角, $\tan\theta = y'$. 两式相除, 再对 x 求导消去 s, 其中用到 $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$, 见 第2.7节:

$$T_0 y' = w_0 s \implies T_0 y'' = w_0 \frac{ds}{dx} = w_0\sqrt{1+(y')^2}.$$

记 $a = \dfrac{T_0}{w_0}$, 其中 a 为张力与线密度之比, 量纲为长度, 得微分方程

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}. \tag{3-12}$$

令 $p = y'$, 降阶后分离变量:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\,dx \implies \ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a} + C.$$

最低点处切线水平, $p(0) = 0$, 故 $C = 0$. 现在从 $p + \sqrt{1+p^2} = e^{x/a}$ 反解 p. 由恒等式 $(p+\sqrt{1+p^2})(\sqrt{1+p^2}-p) = 1$ 得 $\sqrt{1+p^2} - p = e^{-x/a}$, 两式相减除以 2,

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right) = \sinh\frac{x}{a},$$

其中 $\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ 是 第3.4节 中与 cosh 一同出现的双曲正弦. 再积分一次, 取最低点为原点:

$$y = a\cosh\frac{x}{a} - a. \tag{3-13}$$

悬链线由双曲余弦给出, 与抛物线只在小范围内近似重合, 靠近最低点处 $\cosh u \approx 1 + \frac{u^2}{2}$, 悬链线近似于抛物线 $y = \frac{x^2}{2a}$; 离最低点越远, 二者差距越大. 第3.4节 求解 d'Alembert 方程时出现的 cosh, 在这里找到了几何原型.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7.3 追逐曲线

兔子从原点出发沿 y 轴以速度 a 逃跑, 狗从 $(c,0)$ 出发以速度 b 追击, 方向始终指向兔子. 狗的轨迹称为**追逐曲线**.

设时刻 t 兔在 $R=(0,at)$, 狗在 $D=(x,y)$. 追击方向恒指向兔子, 即 DR 是轨迹的切线:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x}\implies xy'-y=-at. \tag{3-14}$$

对 x 求导消去 t:

$$xy''=-a\frac{dt}{dx}.$$

狗以速度 b 沿轨迹奔跑, $\frac{ds}{dt}=b$; x 随时间减少, $\frac{ds}{dx}=-\sqrt{1+(y')^2}$, 故

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{b}\sqrt{1+(y')^2},\qquad xy''=\frac{a}{b}\sqrt{1+(y')^2}.$$

记 $k=\dfrac{a}{b}$, 再用降阶法. 令 $p=y'$:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=k\,\frac{dx}{x}\implies \ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=k\ln x+C.$$

初值 $p(c)=0$ 给出 $C=-k\ln c$, 于是

$$p+\sqrt{1+p^2}=\left(\frac{x}{c}\right)^k\implies p=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^k-\left(\frac{c}{x}\right)^k\right].$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^k-\left(\frac{c}{x}\right)^k\right],\qquad k=\frac{a}{b}. \tag{3-15}$$

例题 3.13 (狗能否追上兔子) 按 式 (3-15) 判断: $b>a(k<1)$ 与 $b\le a(k\ge 1)$ 两种情形各有什么结局?

解 沿曲线积分 式 (3-15) 得狗在横坐标 x 处的高度

$$y(x)=\int_c^x p\,du=\frac{1}{2}\int_x^c\left[\left(\frac{c}{u}\right)^k-\left(\frac{u}{c}\right)^k\right]du.$$

右端在 $x\to 0^+$ 处的行为由 $\int_x^c (c/u)^k\,du$ 决定.$k<1$ 时积分收敛, 曲线在有限高度到达 y 轴, 狗在有限时间内追上兔子.$k\ge 1$ 时积分发散, 狗的高度随 $x\to 0$ 无限增长, 轨迹贴着 y 轴向上延伸, 追击不会结束.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

等速情形 $k=1$ 的结局可以精确算出. 此时 $p=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}-\frac{c}{x}\right)$, 积分得

$$y=\frac{x^2}{4c}-\frac{c}{2}\ln\frac{x}{c}.$$

由 式 (3-14), 兔子此刻的高度为 $t=y-xy'$(取 $a=b=1$), 于是二者的纵向距离

$$t-y=-xp=\frac{c}{2}-\frac{x^2}{2c}\longrightarrow\frac{c}{2}\qquad(x\to0^+).$$

狗与兔同速时, 间距恰好稳定在初始横向距离的一半, 越追越近, 近到 $c/2$ 为止.

$b>a$ 时狗在有限时间内追上; 等速时间距趋于 $\dfrac{c}{2}$; $b<a$ 时追击不结束.

注 3.3

同一条技巧链(受力分析或几何约束给出方程, 降阶化为可分离变量, 积分出曲线)还处理过另一个古典问题. 沿 y 轴拖动长度为 a 的细绳, 绳端物体在平面上留下的轨迹称为**曳物线** (tractrix), 方程为 $y=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}$. 曳物线绕 y 轴旋转得到的曲面具有常数负曲率, 是罗巴切夫斯基非欧几何的一个经典模型, 称为伪球面.

知乎@余命数

3.8 章末习题

习题

3.1. (分离变量) 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x^2}\cdot\dfrac{y+1}{x+1}$ 的通解. 提示: 两端同乘 $\dfrac{dx}{y^2}$ 后, 左端可写成 $\dfrac{dy}{(y+1)y^2}$ 之类的分式, 部分分式分解后再积分; 也可先取倒数 $\dfrac{dx}{dy}$.

3.2. (积分因子) 解初值问题 $y'+y\tan x=\sec x,\ y(0)=0$. 提示: 积分因子取 $\mu(x)=e^{\int\tan x\,dx}=\dfrac{1}{\cos x}$, 两端乘开后左端恰为 $\left(\dfrac{y}{\cos x}\right)'$.

3.3. (复利)年利率 r 按半年复利与按连续复利计算, 一年后本利和之比为 $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2:e^r$. 当 $r=0.12$ 时, 连续复利比半年复利多百分之几? 提示: 计算 $e^{0.12}$ 与 1.06^2, 差额再除以半年复利的结果.

3.4. (倍增期)某培养基中的细菌每小时增长 18%. 按指数模型, 数量增至十倍需要多少小时? 提示: 解 $e^{0.18t}=10$, 即 $t=\dfrac{\ln10}{0.18}$.

3.5. (半衰期)钚-239 的半衰期约为 24100 年. 一枚样品中钚-239 已衰变掉 90%, 它经过了多少年? 提示: 剩余 10%, 即 $e^{-kt}=0.1$, 结合 $kT_{1/2}=\ln2$.

3.6. (冷却) 傍晚 6 时测得路面温度为 32 °C, 气温恒为 22 °C. 已知路面温度按 Newton 冷却定律下降, 且每小时温差缩减为原来的 80%. 午夜时路面温度是多少? 提示: 温差 $\theta(t)=\theta_0\cdot0.8^t$, 六小时后温差乘以 0.8^6.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7. (混合)池内有 200 L 浓度 1 g/L 的盐水. 以 4 L/min 注入清水, 同时以 4 L/min 流出混合液. 盐量何时降到 50 g? 提示: $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{4x}{200}$, 盐量按 $e^{-t/50}$ 衰减, 初值 $x_0 = 200$.

3.8. (极限速度)质量为 m 的雨滴下落,阻力为 $-cv$. 写出速度满足的方程并求极限速度;若雨滴初始静止, 速度达到极限速度一半所需的时间是多少? 提示: $v = \dfrac{mg}{c}(1-e^{-ct/m})$, 令 $v = \dfrac{1}{2}\dfrac{mg}{c}$ 解出 $t = \dfrac{m\ln 2}{c}$.

3.9. (悬链线, 选做) 悬链线 $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ 在最低点附近与抛物线 $y = \dfrac{x^2}{2a}$ 近似. 利用 e^u 在 $u = 0$ 处的二阶泰勒展开说明理由, 并估计 $x = a$ 处两曲线的相对误差. 提示: $\cosh u = 1 + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^4}{24} + \cdots$; $x = a$ 处悬链线高度为 $a(\cosh 1 - 1)$, 抛物线高度为 $\dfrac{a}{2}$.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

第 4 章

数学思想浅谈



基础语言

「人追求完美，却往往只能得到近似。」

——柯西

第四章 数学思想浅谈

4.1 数学对象与问题三要素

解题之前先审题. 审题要做的第一件事, 是把一道题拆成三个部分, 即**研究对象、已知条件、待求目标**.

- **研究对象**是题目所谈论的那个对象. 它可以是一个数、一个式子、一个点、一条曲线、一个函数, 也可以是一组对象构成的结构(一个数列、一个三角形、一个圆系).
- **已知条件**是对研究对象的约束. 题面明确写出的等式、不等式、几何关系属于条件; 定义域、整数性、连续性、隐含的取值范围同样是条件, 只是写得隐蔽.
- **待求目标**规定了解题的方向. 同一组对象和条件, 对应的目标可以是求值、求范围、证明一个断言、判断存在性、求轨迹, 问法不同, 路径随之改变.

例题 4.1 (同一个条件, 三种问法) 设正数 a,b 满足 $a+b=1$. 考虑三个问题. (1) 求 ab 的最大值; (2) 证明 $a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}$; (3) 是否存在 a,b 使 $a^2+b^2=1$?

解 三个问题共享同一组研究对象(正数 a,b)和同一个已知条件 $(a+b=1)$, 目标却各异.

(1) 由均值不等式 $ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$, 等号在 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 取到, 故 ab 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.

(2) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$. 由 (1) 知 $ab\leq\dfrac{1}{4}$, 故 $a^2+b^2\geq1-2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $a^2+b^2=1-2ab$. 因为 a,b 为正数, $ab>0$, 故 $a^2+b^2<1$ 严格成立, 等号取不到. 因此不存在这样的 a,b.

研究对象与条件完全相同, 仅因目标从求最值换成证明不等式再换成判断存在性, 三段论证的依据与落点各不相同.

4.1.1 显条件与隐条件

题面写出的等式与不等式是**显条件**. 还有一类**隐条件**不写在题面上, 却同样约束着解的形态.

- 定义域与值域. $y=\log_a x$ 隐含 $a>0$、$a\neq1$、$x>0$;
- 整数性. n 为正整数把连续变量截断为离散点, 自由度骤降;
- 几何存在性. 三角形隐含两边之和大于第三边; 圆的半径非负;

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 连续性与可导性. 题目说“函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导”, 这就附带 f 连续这一隐藏条件.

隐条件常常是解题的关键, 也是丢解与增根的根源. 例如求过圆外一点引圆的切线, 若用斜率 k 参数化直线, 斜率不存在的竖直直线落在参数化范围之外, 这是一条必须单独检验的隐条件, 见 例题 4.17. 把隐条件写成显条件, 是审题的实质工作.

4.1.2 对象个体与对象族

研究对象有时是一个**个体**(“已知圆 $C:x^2+y^2=4$”), 有时是一个**族**, 比如过点 P 的直线或椭圆上的动点 Q. 区分二者, 决定了该不该设参数、该不该求范围.

一族对象由若干自由参数刻画, 参数取遍允许值就生成整族. 面对一族, 题目通常问的是这族的共同性质, 如求轨迹、求范围、求最值, 或问其中某个特殊成员(求满足额外条件的那个). 面对个体, 问的则是它的某个具体属性, 例如求值. 误把个体当族, 会无端引入参数徒增计算; 误把族当个体, 会漏掉一族解或答非所问.

4.1.3 确定的程度决定问题的形态

条件约束对象, 约束的强弱决定对象被锁定的程度, 锁定的程度又决定问题的形态.

- 对象被**完全确定**时, 问题表现为求值, 答案是一个或有限多个具体的数值;
- 对象只被**部分确定**时, 它仍保留变动的余地, 问题表现为求范围、求最值或求轨迹, 答案是一个区间或一条曲线.

下列一对只差一个条件的对照题, 直观展示这种差别.

例题 4.2 (三边给定的三角形) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $5,6,7$, 求它的面积.

解 三边长是三个独立的实数, 它们把三角形完全锁定(边边边全等). 剩下的只是代入公式. 半周长 $s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$, 由海伦公式

$$S=\sqrt{s(s-5)(s-6)(s-7)}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}.$$

对象被完全确定, 答案是一个确定的数值.

例题 4.3 (两边给定、夹角自由的三角形) 已知 $\triangle ABC$ 中 $AB=6$, $AC=5$, 而夹角 $\angle A$ 未给定, 求它的面积的取值范围.

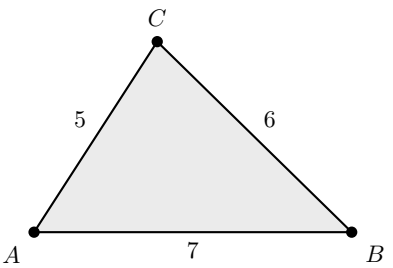
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 与上题相比, 条件从三个减为两个, 三角形未被锁定, 它仍可绕顶点 A 自由开合. 面积公式恰好把这种不确定性显示出来.

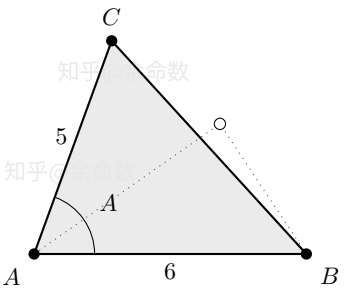
$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = 15 \sin A.$$

由 $0 < A < \pi$ 知 $0 < \sin A \leq 1$, 故 $0 < S \leq 15$, 当 $A = \dfrac{\pi}{2}$ 时取到最大值 15.

对象保留了一份变动的余地, 问题便从求值变成求范围与最值.



(a) 三边给定, 三角形被完全锁定.



(b) 仅两边给定, 三角形仍可绕 A 开合(虚线为另一可能位置).

图 4.1 确定的程度决定问题的形态

例题 4.2 与 例题 4.3 的差别只有一条边, 条件少了, 对象反而多了变动的余地. 这份余地的多少可以被精确计量, 计量它的工具是**自由度**, 我们在 第4.2节 中引入它.

4.2 自由度与变量、约束、独立参数

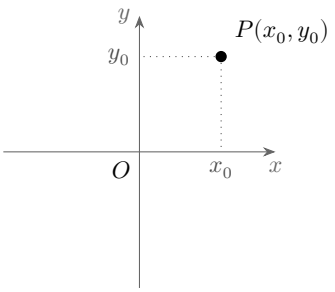
一个数学对象可以由若干个独立的实数来刻画. 完全确定这个对象所需的最少实数个数, 就是它的**自由度**. 自由度衡量一个数学对象内在的信息量. 几种熟悉的几何图形足以直观展示这一概念.

除了直观的几何图形, 更抽象的数学对象也同样具有自由度.

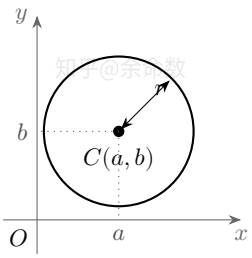
- **一个实数**是最基本的数学对象, 拥有 **1** 个自由度. 它的值可以是具体的数值, 如 $-\frac{7}{3}, e^3, 1+\ln 5$; 也可以是由题目参数决定的值, 如 $\sin a, a(a+1)$; 还可以是某个方程的隐式解. 例如, 锐角 θ 满足 $\cos\theta = \frac{1}{3}$, 虽然写不出 θ 的精确值, 它已被唯一确定, 其所有三角函数值也随之确定, 可视为已确定的对象.
- **平面上的直线**可由斜率 k 和截距 b 两个实数决定 $(y = kx + b)$, 拥有 **2** 个自由度. 垂直于 x 轴的直线是特殊情况, 不改变一般情形的自由度个数.
- **二次函数**由其三个系数 a, b, c 决定 $(y = ax^2 + bx + c)$, 拥有 **3** 个自由度.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

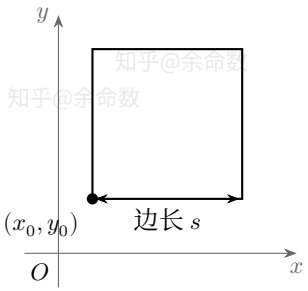
知乎@余命数



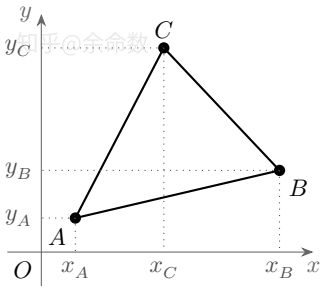
(a) 平面上的点, 由 (x_0, y_0) 确定, **2** 个自由度.



(b) 平面上的圆, 由 (a, b, r) 确定, **3** 个自由度.



(c) 轴平行正方形, 由 (x_0, y_0, s) 确定, **3** 个自由度.



(d) 任意三角形, 由 $(x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C)$ 确定, **6** 个自由度.

图 4.2　常见几何对象的自由度

知乎@余命数

4.2.1 变量、约束与独立参数

把对象写成一组参数, 参数的个数就是**变量数**; 每一条约束(一个等式或等价的不等式)消去一个自由度. 于是

知乎@余命数

$$\text{自由度} = \text{变量数} - \text{独立约束数}.$$

这里的**独立**二字不可省去, 只有彼此独立的约束才各消去一个自由度, 重复或可由其他约束推出的约束不提供新信息.

我们常说两点确定一条直线. 一个点有 2 个自由度, 两个点合起来有 $2+2=4$ 个自由度, 它们确定的直线却只有 2 个自由度, 差额出在参数的过剩上.

用两个点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 描述一条直线时, 这四个参数提供的信息是**过剩**的. 它们既固定了直线的**位置**, 用去 2 个自由度, 也把这两点在直线上的**具体位置**固定下来(每个点沿直线需要 1 个自由度, 共 2 个自由度). 因此直线本身的自由度是 $4-2=2$. 多余的参数描述了直线之外的信息, 自由度的总数并不改变.

给对象设参数时, 应优先选择**独立**的参数, 让参数个数恰等于自由度. 过剩的参数会引入冗余方程, 徒增消元的负担; 欠少的参数又无法覆盖全部对象, 造成漏解.

4.2.2 例题

例题 4.4 (相切的圆) 求所有满足以下条件的圆的方程. 它与 y 轴相切, 经过点 $P(1,2)$, 且圆心在直线 $y=x$ 上.

解 分析对象是一个平面上的圆.

该对象的自由度为 3, 可由其圆心坐标 (a,b) 和半径 r 完全确定, 标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 目标是用题目的三个条件确定这三个参数.

条件一为圆与 y 轴相切, 即圆心到 y 轴(直线 $x=0$)的距离等于半径, $|a|=r$. 由于 $r>0$, 得 $r^2=a^2$.

条件二为圆经过点 $P(1,2)$, $(1-a)^2+(2-b)^2=r^2$.

条件三为圆心 (a,b) 在直线 $y=x$ 上, $a=b$.

三个参数 (a,b,r) 对应三个方程.

$$\begin{cases} r^2=a^2 \\ (1-a)^2+(2-b)^2=r^2 \\ a=b \end{cases}$$

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将 $b=a$ 和 $r^2=a^2$ 代入第二个方程，得

$$(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$$

$$(1-2a+a^2)+(4-4a+a^2)=a^2$$

$$a^2-6a+5=0$$

$$(a-1)(a-5)=0$$

解得 $a=1$ 或 $a=5$.

当 $a=1$ 时，$b=1, r=1$，圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

当 $a=5$ 时，$b=5, r=5$，圆的方程为 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

因此存在两个满足条件的圆. 此例说明，当独立条件的个数等于对象的自由度时，通常得到离散的解集，可能恰有一解、有限多解，或无解. 条件个数与自由度的其他大小关系在 第4.3节 中讨论.

例题 4.5 (三次函数) 已知三次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$、$f(1)=0$、$f'(1)=0$，且 $f(2)=9$. 求 $f(x)$ 的表达式.

解 分析对象是一个三次函数.

其一般形式为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$，由四个系数 (a,b,c,d) 完全确定，自由度为 4. 题目恰好给出四个独立的条件.

由条件 $f(1)=0$ 与 $f'(1)=0$ 可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有一个重根，即 $f(x)$ 含有因子 $(x-1)^2$.

据此把三次多项式按 $(x-1)$ 的幂展开，即在 $x=1$ 处的泰勒形式，见 第1.13节，并入 第1章，让重根条件自动转化为系数的取值.

$$f(x)=k(x-1)^3+m(x-1)^2+n(x-1)+p$$

$f(1)=0 \implies p=0$. $f'(x)=3k(x-1)^2+2m(x-1)+n$，故 $f'(1)=0 \implies n=0$.

此时函数形式简化为 $f(x)=k(x-1)^3+m(x-1)^2$，只剩两个待定系数 (k,m)，自由度降为 2. 利用剩下两个条件.

$f(0)=1 \implies k(-1)^3+m(-1)^2=1 \implies -k+m=1$.

$f(2)=9 \implies k(1)^3+m(1)^2=9 \implies k+m=9$.

解关于 (k,m) 的线性方程组

$$\begin{cases} -k+m=1 \\ k+m=9 \end{cases}$$

得 $m=5, k=4$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此 $f(x)=4(x-1)^3+5(x-1)^2=4x^3-7x^2+2x+1$.

例题 4.6 (确定圆锥曲线) 平面直角坐标系中的一条圆锥曲线由一般二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 定义. 确定一条圆锥曲线需要几个自由度? 至少需要几个(处于一般位置的)点才能唯一确定它?

解 分析对象是一条圆锥曲线.

该对象的代数表示有 A,B,C,D,E,F 六个系数. 将整个方程乘以一个非零常数 λ, 即

$$(\lambda A)x^2+(\lambda B)xy+(\lambda C)y^2+(\lambda D)x+(\lambda E)y+(\lambda F)=0$$

所代表的曲线与原方程完全相同. 因此六个系数不同时为零, 且只在整体非零倍数的意义下唯一.

为消除这种尺度上的冗余, 选定其中一个非零系数归一化为 1. 例如 $F\neq 0$ 时, 两边同除以 F, 方程写为

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+1=0$$

无论选取哪个非零系数作归一化, 都是从六个系数中扣除一个整体比例自由度. 因此一条圆锥曲线的自由度为 $6-1=5$.

要确定这五个参数, 需要五个独立的线性方程. 一个点 (x_i,y_i) 位于曲线上, 给出一个关于五个未知参数的线性方程.

$$A'x_i^2+B'x_iy_i+C'y_i^2+D'x_i+E'y_i=-1$$

因此, 唯一确定一条圆锥曲线至少需要五个点.

一般位置这个限制是必要的, 它排除退化情形. 例如五个点共线时, 以这条直线为因子的退化二次曲线有无穷多条经过它们, 无法唯一确定.

例题 4.7 (点的轨迹) 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2=R^2$.A,B 是圆 C 上两个固定的不同点. 点 P 在圆 C 上运动(P 不与 A,B 重合). 求 $\triangle PAB$ 的垂心 H 的轨迹.

解 分析对象是 $\triangle PAB$ 的垂心 H.

先分析自由度. 圆 C 和点 A,B 固定, 没有自由度. 动点 P 在圆周上运动, 其位置可用一个参数, 如极角 θ 描述, 故 P 有 1 个自由度.

由 A,B,P 三点构成的 $\triangle PAB$ 也因此拥有 1 个自由度. 所求的垂心 H 完全由这三个顶点决定, 其位置也由这 1 个自由度控制. 一个自由度通常对应一条曲线, 因此预期 H 的轨迹是一条曲线.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为确定这条曲线, 采用向量法. 设圆心为坐标原点 $O(0,0)$, 令 $\vec{a},\vec{b},\vec{p}$ 分别为点 A,B,P 的位置向量.

对于以原点 O 为外心的三角形 PAB, 其垂心 H 的位置向量 $\vec{h}$ 满足

$$\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{p}$$

本题中 A,B 固定, $\vec{a}+\vec{b}$ 是固定向量, 记为 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$. 于是

$$\vec{h}=\vec{s}+\vec{p}$$

这个关系式清晰说明了 H 的轨迹. 点 P 在以 O 为圆心、R 为半径的圆 C 上运动, 其位置向量 $\vec{p}$ 的终点轨迹是圆 C. 向量 $\vec{h}$ 是固定向量 $\vec{s}$ 与动向量 $\vec{p}$ 的和, 表示 H 的轨迹是将 P 的轨迹(圆 C)按向量 $\vec{s}$ 平移所得的图形.

因此垂心 H 的轨迹位于一个半径同样为 R 的圆上, 圆心为 S, 位置向量为 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$. 严格地说, 由于题设要求 P 不与 A,B 重合, 轨迹应去掉与 $P=A$ 和 $P=B$ 对应的两个点; 若讨论轨迹的闭包, 则是整个圆.

知乎@余命数

4.3 自由度如何决定解的个数

知乎@余命数

第4.2节 给出了自由度的计算方式, 即变量数减去独立约束数. 接着我们把它当作动笔之前的判断工具使用, 看自由度的数值对应着怎样的解的形态.

4.3.1 圆过点的序列

平面内的几何对象, 其自由度有直观的几何意义. 以圆为例层层加约束, 能看清自由度如何决定解的个数.

知乎@余命数

- **平面内一点**有 2 个自由度, 对应横、纵坐标两个独立实数.
- **一个圆**有 3 个自由度, 对应圆心两个坐标和半径.
- **过两个定点的圆**剩下 1 个自由度, 圆心必须落在两点的垂直平分线上, 沿这条直线滑动即得一族圆(半径随之改变).
- **过三个定点的圆**一般唯一确定, 自由度降为 0; 若三点共线, 则不存在这样的圆, 约束相容性被破坏.

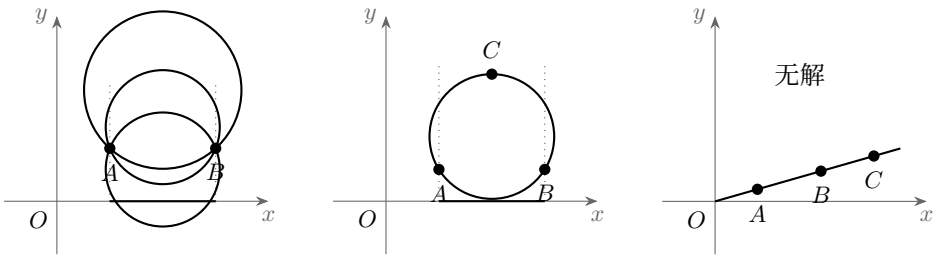
自由度从正降到零, 解从一族收缩为有限个; 约束再加一重, 若新约束与已有约束相容, 不过是冗余确认, 若不相容, 则解集体消失.

知乎@余命数

4.3.2 三种形态

设待定对象的总自由度为 n, 独立的约束(满足式条件)个数为 m. 比较 m 与 n, 可在动笔之前预判解的形态.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



(a) 过两点的圆, 圆心在垂直平分线上滑动, 一族解.

(b) 过三点的圆, 唯一确定(圆心同时落在两条垂直平分线上).

(c) 三点共线,不存在过它们的圆, 约束不相容.

图 4.3 圆过点的序列, 自由度从 1 到 0 到不相容

- $m < n$ 即**欠定**, 对象无法被完全确定, 解是含 $n - m$ 个参数的一**族**对象. 此时问题的合理形态是求轨迹、求范围或求最值, 第4.1节 中那个夹角自由的三角形就是如此, $n - m = 1$ 的余地留给 $\sin A$ 去变化. 误以为能解出唯一答案, 就是误判了问题的形态.
- $m = n$ 即**恰定**, 通常得到**离散解集**, 恰有一解、有限多解, 或因条件隐性相斥而无解. 第4.2节 中相切圆有两解、三次函数有唯一解, 两者都属于这种形态.
- $m > n$ 即**超定**, 条件可能互相矛盾, 此时无解, 例如不存在过三个共线点的圆; 若条件彼此相容, 多余的等价条件不构成新信息, 可用于**检验**或提供计算的捷径.

4.3.3 自由度分析在解题中的作用

把三种形态翻译成解题动作.

- **自由度为零**($m = n$ 恰定). 原则上所有量都可以求出. 此时直接设参数、列方程、解出离散值, 最后回代检验相容性与定义域.
- **自由度为正**($m < n$ 欠定). 对象成族, 适合用参数化或函数观点处理. 题目问的是整族的共同性质, 即求范围、求最值、求轨迹, 目标是把族参数与所求量联系起来, 刻画整族的共同形态.
- **自由度为负**($m > n$ 超定). 约束过强, 首要任务是判断条件之间是否相容、是否真有解. 贸然求解可能得到形式解却无实际对象对应; 确认相容后, 多余的约束可作为检验或简化计算的工具.

4.3.4 三个常见陷阱

自由度分析简明, 却有几处容易失足.

约束未必独立. 计入 m 的只能是**独立**约束. 不独立的约束会造成看似足够、实则欠定的陷阱. 第4.2节 中确定圆锥曲线需要五个点, 前提是五点处于一般位置, 若有四点共线, 第五个条件就不再独立, 曲线也就无法唯一确定. 判断独立性没有机械的规则, 一个有效的自检是看这个条件是否真的缩小了解集.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

隐条件会改变自由度. 一道题表面上给出 m 个方程, 隐条件却可能暗中增减自由度. 例如 x 为正整数把连续的自由度压缩到离散点;“a,b,c 为三角形三边”附带三角不等式, 限制了参数的可行域. 自由度的计算必须把隐条件一并计入, 否则预判的形态会与实际不符.

整数解问题尤需谨慎. 整数约束使自由度概念从连续的实数降到离散的整数计数. 方程 $x+y=10$ 在实数域有 1 个自由度(一族解), 在正整数域却只有 9 个解, 自由度的连续直觉不再直接适用. 处理整数解问题时, 自由度分析只能作粗略定位, 精确的解的个数需要数论工具, 见 第二卷第 9 章的计数与整除.

这样, 自由度分析在动笔之前就能给出方向的预判, 欠定的问题不必空求唯一解, 超定的问题先验相容性再动手.

知乎@余命数

4.4 解题框架的四种基本路径

第4.3节 用自由度预判了解的形态. 形态既定, 接下来是动手推进. 推进之前还有一段调查工作, 先把题目变成可以动手的材料; 调查完成之后, 再把条件分类, 并在四条基本路径中选择与组合.

4.4.1 动手调查

自由度分析回答的是问题有没有确定的答案, 它不说明第一步该写什么. 从读懂题意到选定路径之间隔着一段摸索, 这段摸索可以拆成几项具体动作, 分别是动手列举、缩小规模、幻想答案, 以及在举例时守住猜想的边界. 它们的共同作用是先制造出可以操作的材料, 把抽象的题面变成具体的例子, 解题思路常常在这些例子中间浮现出来.

4.4.1.0.1　动手列举　题面条件少而怪的时候, 最有效的起步是把所有可能的情形列出来. 数据一旦摆到桌面上, 隐藏的结构就有了着落.

例题 4.8 (普查员的难题) 人口普查员询问一位母亲三个女儿的年龄. 母亲给出两条信息, 女儿们的年龄都是正整数, 乘积等于 36. 普查员说这不够. 母亲又说, 她们年龄之和恰好是自家的门牌号. 普查员看了一眼门牌号, 仍然说不够. 母亲想了想, 补充一句, 大女儿养了一条狗. 普查员马上得出了三个年龄. 求三个女儿的年龄, 并说明门牌号是多少.

解 乘积等于 36 的正整数三元组一共八组, 把它们连同各自的年龄之和一并列出.

年龄	$(1,1,36)$	$(1,2,18)$	$(1,3,12)$	$(1,4,9)$	$(1,6,6)$	$(2,2,9)$	$(2,3,6)$	$(3,3,4)$
之和	38	21	16	14	13	13	11	10

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

普查员知道了门牌号, 却依然无法确定年龄, 说明他所看到的那一个和数对应不止一组解. 八组数据当中只有和数 13 出现了两次, 对应 $(1,6,6)$ 与 $(2,2,9)$, 门牌号因此是 13. 第三条信息说的是“大女儿” 养狗, 可见年龄最大的人只有一个, $(1,6,6)$ 里有两个孩子同为六岁, 不符合这一条. 于是三个年龄依次是 $2,2,9$.

整道题只能靠列举推进. 乘积条件展开成八行数据之后, “信息仍然不够” 这句话立刻暴露出重复的和. 列举把语言描述的线索转成可以比对的数据, 这一步没有别的办法替代.

4.4.1.0.2 缩小规模 一般情形无从下手时, 先缩小问题的规模. 把数字改小, 把条件删减, 让结构在简单版本里先出现, 再带着这份认识回到原题.

知乎@余命数

例题 4.9 (连续正整数之和) 哪些正整数可以写成至少两个连续正整数之和? 例如 $6=1+2+3, 36=11+12+13$.

解 一般情形无从下手, 先缩小规模, 从 1 到 16 逐个检验, 把能写出的数写出一种分解.

- 能写出的数有 $3=1+2$、$5=2+3$、$6=1+2+3$、$7=3+4$、$9=2+3+4$、$10=1+2+3+4$、$11=5+6$、$12=3+4+5$、$13=6+7$、$14=2+3+4+5$、$15=7+8$.
- 写不出的数恰好是 $1,2,4,8,16$, 即 2 的幂.

分界线落在 2 的幂上, 于是猜想, 能写成至少两个连续正整数之和的正整数, 恰好是全体不是 2 的幂的正整数.

猜想分两半, 先证 2 的幂写不出. 设从 a 起共写了 k 项, 其中 $k\geq 2$ 且 $a\geq 1$, 由等差数列求和公式 (第二卷第 7.4 节)

$$2n=k\,(2a+k-1).$$

右边两个因子 k 与 $2a+k-1$ 恰好一奇一偶. 若 n 是 2 的幂, 则 $2n$ 也是 2 的幂, 而 2 的幂的因子只能是 2 的幂, 一奇一偶便迫使那个奇因子等于 1. 若 $k=1$, 与 $k\geq 2$ 矛盾; 若 $2a+k-1=1$, 与 $a\geq 1$ 且 $k\geq 2$ 矛盾. 故 2 的幂写不出, 这一半成立.

再证非 2 的幂都写得出. 设 n 不是 2 的幂, 把 $2n$ 分解成一个大于 1 的奇数与一个 2 的幂的乘积, 设其中较小的因子为 u, 较大的因子为 v. 取项数 $k=u$, 并令 $2a+k-1=v$, 解得

$$a=\frac{v-u+1}{2}.$$

两个因子一奇一偶, 故 $v-u+1$ 是偶数, a 是整数; $v>u$ 说明 $v-u+1\geq 2$, 即 $a\geq 1$; 而 u 是 2 的幂或者奇因子, 都满足 $k\geq 2$ 且各项为正. 这组 a 与 k 给出了合法的分解, 后一半也成立.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两半合起来,能写成至少两个连续正整数之和的正整数,恰好是全体不是 2 的幂的正整数. 以 $n=36$ 验算,$2n=72=8\times 9$,取 $u=8, v=9$,得 $k=8$ 与 $a=1$,于是 $36=1+2+\cdots+8$.

4.4.1.0.3　幻想答案　还有一种起步方式看起来不合规矩, 却经常奏效. 假装题目已经解出, 凭直觉先写下一个答案, 再回头逐条检验它. 检验中出现的差距就是题目缺少的部分, 把差距写成方程, 方程组随即出现.

例题 4.10 (培训住宿) 公司送 216 名员工外出参加培训, 需要在酒店住一晚. 酒店提供双人房与四人房两种房型, 每间双人房 100 元, 每间四人房 150 元, 住宿预算共 9600 元. 两种房各订多少间, 才能恰好住满全部员工并把预算用完?

解　先假装答案是双人房 30 间, 四人房 39 间. 这两个数字是随手写的, 不必正确, 要紧的是它们带着单位, 可以拿去检验.

第一条检验是人数, $30\times 2+39\times 4=216$, 恰好住满, 这条通过. 第二条检验是预算, $30\times 100+39\times 150=8850$, 比 9600 少 750, 这条不通过.

两条检验正好就是题目的两条约束. 设双人房 x 间, 四人房 y 间, 把检验写成方程

$$\begin{cases} 2x+4y=216 \\ 100x+150y=9600 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y=108 \\ 2x+3y=192 \end{cases} \Longrightarrow \quad y=24,\ x=60.$$

验算人数 $60\times 2+24\times 4=216$, 预算 $60\times 100+24\times 150=9600$, 两条同时满足. 答案是双人房 60 间, 四人房 24 间.

写下一个具体答案, 等于提前给自由度命名 (第4.2节). 未知数 x 与 y 在代入检验的那一刻就位, 两条检验对应两条约束, 方程组的形态先于列方程一步出现. 应用题正面列式感到困难时, 从答案这一端倒着走, 常常比从条件那端硬凑更快.

4.4.1.0.4　例证与猜想　列举与实验会给出猜想, 而猜想有时并不成立.

例题 4.11 (两个失效的猜想) (1) 多项式 $P(x)=x^2+x+41$ 在 $x=0,1,2,\ldots,39$ 处的取值都是素数, 能否据此断言它对一切正整数都取素数?
(2) 圆周上取 n 个点, 两两连线, 设任意三条弦不共点.$n=1,2,3,4,5$ 时圆被分成的区域数依次为 $1,2,4,8,16$, 能否据此断言区域数总等于 2^{n-1}?

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 (1) 不能. 前四十个值确实都是素数, 但 $P(40)=1600+40+41=41^2$ 是合数. 这个多项式在一段不短的范围里始终保持素数, 原因在初等层面看不出来, 恰好说明有限次检验的说服力十分有限.

(2) 不能.$n=6$ 时区域数是 31, 与 $2^5=32$ 相差一个. 精确的计数也不难做出. 把弦一条一条添进圆里, 每一条新弦被它与此前各弦的交点分成若干段, 每一段都把所在的一个区域一分为二,所以新弦增加的区域数等于它上面的交点数加一. 全部累加, 区域总数等于 1 加上弦的条数 $\binom{n}{2}$, 再加上相交的弦对数. 每一对相交的弦由圆上四个点确定, 反过来每四个点恰好给出唯一一对相交的弦, 相交弦对数为 $\binom{n}{4}$. 于是区域数为

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+1,$$

代入 $n=5$ 得 16, 代入 $n=6$ 得 31, 数列在第六项处离开了 2 的幂.

例证无论积累多少, 覆盖的都只是有限个情形. 一个全称命题的反例只需要一个, 而检验每做一次, 只排除有限多个整数, 这就是列举与实验无法代替证明的原因. 第二卷第 7.1 节的数学归纳法把无穷多个情形压缩成两个有限的步骤, 正因如此它值得单独讨论.

调查得到的材料, 接下来交给四条基本路径使用.

4.4.2 构造式与满足式两类条件

定义 4.1 题目中的条件可分为两类.

- **构造式条件**是直接表明如何构建出数学对象, 或其一部分的条件. 例如“点 O 的坐标为 $(0,0)$”、“抛物线方程为 $y^2=4x$”、“点 A 是 C_1 和 C_2 的交点”.
- **满足式条件**是对象必须恰好满足的约束, 通常表现为方程或等式, 是需利用和求解的目标. 例如 $a_5+a_6=16$、直线与圆相切.

构造式条件回答对象从哪里来, 满足式条件回答对象还要满足什么. 一道题的全部条件几乎都可以归入这两类; 剩下要做的, 是让它们各司其职. 这一分类是后续 第4.5节 与 第4.7节 两节的方法论起点, 前者是纯构造式, 后者含满足式.

4.4.3 四条基本路径

4.4.3.0.1 正向推进 从已知条件出发, 逐步推出能推出的结论, 看能否抵达目标. 适用于条件较多、结论相对简单的情形. 风险在于可能推出大量中间结果, 却不知哪一条通往目标, 陷入漫无目的的推导.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 4.12 (正向推进的缩影) 已知 a,b,c 为正数且 $abc=1$,证明 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 3$.

解 从条件 $abc=1$ 出发,$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=bc+ca+ab$. 由三元均值不等式 $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$, 得证. 条件单一而结论是熟悉的均值形式, 顺势正向推进即可.

知乎@余命数

4.4.3.0.2　反向分析　从结论出发, 思考“要结论成立, 只需什么先成立”, 一步步倒退到已知条件. 适用于结论复杂、条件较少的情形. 风险在于反向步骤未必可逆, 由结论推出的必要条件未必充分, 需在写正式证明时正向验证每一步的等价性.

例题 4.13 (反向分析的缩影) 设 n 为任意正整数, 证明 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

解 要证 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, 只需证其有理化形式 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, 只需 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}$, 只需 $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$, 而 $n+1>n$ 且算术平方根保持不等号方向, 此式成立. 反向找到的链条每一步都可逆, 正向重写即得证明.

4.4.3.0.3　倒数第二步　反向分析常以倒数第二步的形式出现. 遇到链条很长、起点又推不出来的情形, 不去回溯整条链条, 只问最后一步需要什么前提, 把这个前提当作独立的命题先解决掉, 再回头解决原来的问题.

知乎@余命数
知乎@余命数

例题 4.14 (分数不可约) 证明对任意正整数 n, 分数 $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ 都不能约分.

解 要证不能约分, 只需证明分子与分母的最大公因数是 1. 要证这个最大公因数是 1, 只需找到分子与分母的一个整数组合等于 1. 组合并不难找

$$3(14n+3)-2(21n+4)=42n+9-42n-8=1,$$

于是分子与分母的最大公因数整除 1, 只能等于 1. 若把最后一步写成一般形式, 它是 第一卷第 1.6 节中裴蜀定理的充分方向.

知乎@余命数

证明只有三步, 每一步都在回答上一步提出的前提, 原命题始终没有从正面碰过. 倒数第二步把目标换成一个更小也更具体的问题, 是反向分析中最常用的一种压缩方式.

知乎@余命数

4.4.3.0.4　双向夹击　同时从条件和结论出发, 在中间寻找相遇点. 条件端推出一批性质, 结论端倒退一批前提, 两边靠近直到衔接. 几何证明中尤为常见, 从已知关系推一端, 从待证关系推另一端, 会在某个中间等式或比例上汇合.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 4.15 (双向夹击的缩影) 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 中点, $AB = AC$. 用双向夹击说明 $AD \perp BC$.

解 从条件端看, 等腰且 D 为底中点, 可推 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 三边对应相等($AB = AC$、$BD = CD$、AD 公共), 故 $\angle ADB = \angle ADC$. 从结论端看, 要证 $AD \perp BC$, 即 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, 即此二角相等且互补. 两端在"$\angle ADB = \angle ADC$"相遇, 补上平角 180° 即得垂直.

4.4.3.0.5 模式识别 识别题目背后的深层结构, 如对称多项式、递推关系、几何变换、典型模型, 把陌生题归入熟悉模式. 这是最省力的路径, 也是最容易出错的路径. 模式识别依赖经验的厚度, 一旦僵化套用, 形似而质异的题目便被误塞进同一模板.

例题 4.16 (模式识别的缩影) 设 x, y, z 满足 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 6$, 求 $x^4 + y^4 + z^4$.

解 识别出对称多项式的模式, 令 $s = x + y + z = 0$、$p = xy + yz + zx$、$q = xyz$. 由 $x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - 2p = 6$ 及 $s = 0$ 得 $p = -3$. 又

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2),$$

其中 $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = p^2 - 2sq = p^2 = 9$. 故 $x^4 + y^4 + z^4 = 36 - 18 = 18$. 识别对称结构后, 所有运算沿对称多项式的标准通道展开.

4.4.4 四条路径的交织

四条路径可以交织使用, 多数题目都需要如此. 先模式识别定位结构, 再正向推进展开条件, 遇阻时反向分析寻找突破口, 过程中双向夹击收拢两端. 综合例题最能体现这种交织.

例题 4.17 (过定点引圆的切线) 求过点 $P(3, 1)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切的直线的方程.

解 先让框架空转一遍, 看清形态.

清点对象, 已知对象有圆 $x^2 + y^2 = 4$(由方程直接给出)与点 $P(3, 1)$, 待定对象是一条直线. 标注自由度, 平面上的直线有 2 个自由度, $n = 2$. 分类条件, "直线过点 P"与"直线与圆相切"都没有直接给出直线, 都是满足式条件, $m = 2$. 预判形态, $m = n = 2$, 恰定, 预期得到有限条切线; 由 $3^2 + 1^2 = 10 > 4$ 知 P 在圆外, 应当恰有两条.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这一步是**反向分析**与**模式识别**的交汇, 识别出“切线 + 外点”的标准模式, 预判出离散解集的个数, 避免动手时心里没底.

正向求解时, 先为直线的自由度命名. 设斜率为 k, 直线为 $y-1=k(x-3)$, 即 $kx-y+1-3k=0$.“过 P”已用在参数形式里, 剩下“相切”翻译为圆心到直线的距离等于半径.

$$\frac{|1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2 \implies (1-3k)^2=4(k^2+1) \implies 5k^2-6k-3=0$$

解得 $k=\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{5}$. 对应的两条切线为

$$y-1=\frac{3+2\sqrt{6}}{5}(x-3) \quad 与 \quad y-1=\frac{3-2\sqrt{6}}{5}(x-3).$$

知乎@余命数

最后回代检验. 用斜率 k 为直线命名时, 默认了斜率存在, 竖直直线 $x=3$ 被排除在参数化之外, 它也可能是被漏掉的解. 点 $P(3,1)$ 确在 $x=3$ 上, 但圆心到 $x=3$ 的距离为 $3>2$, 不相切, 本次没有遗漏. 这一步绝不能省. 若把题中的点换成 $(2,1)$, 竖直直线 $x=2$ 恰是一条切线, 漏参就会丢掉一个解.

4.4.5 为自由度命名

例题 4.17 中还有一处自由度参数的选择. 我们选用斜率 k(配合定点), 也可以改用**切点** (x_0,y_0) 命名, 此时切线方程为 $xx_0+yy_0=4$, 条件过 P 给出 $3x_0+y_0=4$, 与 $x_0^2+y_0^2=4$ 联立, 同样是 $m=n=2$ 的封闭方程组. 为自由度选择哪个名字, 是计算量的分水岭, 第4.7节 将专门展开.

4.4.6 框架早已在手中

这套框架只是把前几卷已有经验**统一命名**.

- 解析几何中的**设点法与设线法**, 是为自由度命名的两种范式 (第三卷第 13.4 节至 第三卷第 13.7 节, 决策见 第三卷第 13.16 节);
- 恒成立问题中的**必要性探路与端点分析**, 是欠定情形下先用特例压缩候选集、再证充分性的策略 (第1.15节);
- 数列中“首项 + 递推关系确定一个数列”, 是用构造式条件锁定一个无穷对象 (第二卷第 7.9 节);
- 函数方程的**赋值法**, 是主动代入构造式取值、迫使抽象对象显形 (第一卷第 4.1 节).

面对新题时不妨先让框架空转一遍, 清点对象、标注自由度、给条件分类、选好路径, 再调用各章的具体技术去执行. 解题框架根据题目结构动态调整, 没有固定流程. 条件多则正向, 结论繁则反向, 几何题常双向夹击, 结构熟则模式识别.

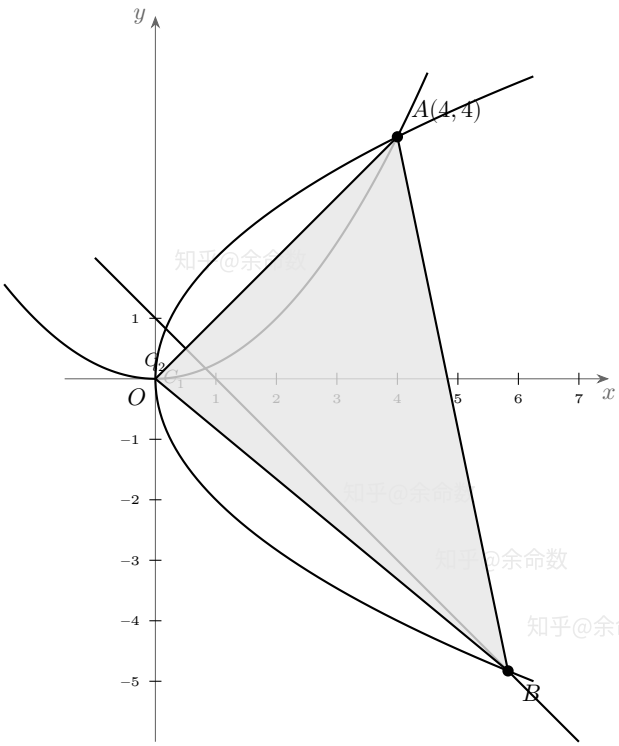
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.5 纯构造式问题的解法

当所有条件都是构造式时, 解题路径非常直接, 沿着构造链条一步步确定出所有对象即可.

例题 4.18 (抛物线交点与面积) 已知原点 $O(0,0)$, 抛物线 $C_1: y^2=4x$ 和抛物线 $C_2: x^2=4y$ 在第一象限的交点为 A, C_1 与直线 $l: x+y-1=0$ 在第四象限的交点为 B, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

知乎@余命数



解 本题是典型的纯构造式问题. 已知条件直接给出几何对象 O, C_1, C_2, l, 而点 A 作为 C_1 与 C_2 的交点、点 B 作为 C_1 与 l 的交点随之被构造出来, 于是三个确定的点 O, A, B 便构造出 $\triangle OAB$ 及其面积. 解题沿构造链分三段推进, 先定 A 的坐标, 再定 B 的坐标, 最后用坐标求面积.

联立 C_1 与 C_2 的方程定出点 A.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ x^2=4y \end{cases} \implies x^4=(4y)^2=16y^2=16(4x)=64x$$

即 $x(x^3-64)=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=4$. 因为点 A 在第一象限, 取 $x=4$ 代入得 $y=4$, 故 $A(4,4)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

联立 C_1 与 l 的方程定出点 B.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \implies y^2 = 4(1-y) \implies y^2 + 4y - 4 = 0$$

解得 $y = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(-4)}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$. 因为点 B 在第四象限, $y < 0$, 取 $y = -2 - 2\sqrt{2}$, 此时 $x = 1 - y = 3 + 2\sqrt{2}$, 故 $B(3 + 2\sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2})$.

将两点的坐标代入坐标面积公式 $S = \frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A|$ 求出三角形面积.

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2}\left|4(-2-2\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2})\cdot 4\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-8-8\sqrt{2}-12-8\sqrt{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-20-16\sqrt{2}\right| \\ &= 10 + 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

沿构造链推进时, 还有一处自由度常被忽略, 即**构造的次序**. 目标对象未必需要先显式定出全部中间对象; 有时可以越过它们, 直接由已知对象构造出目标.

例题 4.19 (两圆的公共弦所在直线) 设圆 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 9$ 交于 A, B 两点, 求直线 AB 的方程.

解 沿构造链走到底, 可直接求出两交点再连线. 联立两圆方程, 消去 $x^2 + y^2$ 得 $x = \frac{11}{8}$, 代回得 $y = \pm\frac{3\sqrt{15}}{8}$, 即

$$A\left(\tfrac{11}{8}, \tfrac{3\sqrt{15}}{8}\right), \quad B\left(\tfrac{11}{8}, -\tfrac{3\sqrt{15}}{8}\right).$$

两点横坐标相同, 直线 AB 为 $x = \frac{11}{8}$. 这条路径万无一失, 但要穿越根式.

越过交点, 可由两圆方程直接构造出公共弦. 交点 A, B 的坐标同时满足两个圆的方程, 因此也满足两方程之**差**.

$$[(x-4)^2 + y^2 - 9] - [x^2 + y^2 - 4] = 0 \implies -8x + 11 = 0.$$

差是一个一次方程, 表示一条直线; A, B 两点都在其上, 而两点确定一条直线 (第4.2节), 故直线 AB 即 $8x - 11 = 0$. 整个过程没有求出任何一个交点坐标.

次序二的实质, 是识别出目标对象即公共弦所在直线, 可以由两圆方程这个已知对象**直接组合而成**, 于是构造链被短路了. 这种确定对象而不求出对象的姿态, 正是解析几何中**设而不求**思想的萌芽 (第三卷第 13.16 节有系统讨论); 两方程相减所得的这条直线也被称为两圆的**根轴**, 在圆幂问题中反复出现.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

纯构造式问题有两条经验, 一条是沿构造链步步确定对象, 另一条是推进之前先问一句, 目标能否由已有对象直接构造, 哪些中间对象其实不必显式求出.

4.6 直接构造困难时的反证法

第4.5节 的构造法直接造出对象, 证明它存在. 当正面构造受阻, 题目要求证明*不存在*某对象、某对象*唯一*、某类对象*有无穷多个*时, 反证法常常更省力. 它把结论的否定作为额外条件引入, 反而打开了新的推理空间.

4.6.1 反证法的逻辑结构

要证明 P 推出 Q, 反证法改为证明"P 与非 Q 同时成立会推出矛盾". 既然 P 已知为真, 非 Q 又引出矛盾, 非 Q 必假, Q 必真. 形式上多假设了一个非 Q, 实质上是给推理增添了可用的结构. 证明不存在时, 可以假设它存在并加以使用; 证明唯一时, 可以假设有两个并加以比较.

反证法给出的是**判定**, 它说明对象不存在、唯一或有无穷多, 却不直接造出对象. 需要具体对象时, 往往仍要另寻构造途径.

4.6.2 按适用场景分类

4.6.2.0.1 证明不存在某对象 假设该对象存在, 导出矛盾. 这是最自然的反证场景, 因为存在一旦被假设, 就提供了可操作的实体.

例题 4.20 ($\sqrt{2}$ 的无理性) 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

解 假设 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 为互素的正整数(既约分数). 则 $p^2=2q^2$, 故 p^2 为偶数, p 为偶数. 设 $p=2k$, 代入得 $4k^2=2q^2$, 即 $q^2=2k^2$, 故 q 也为偶数.p,q 同为偶数与它们互素矛盾. 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

4.6.2.0.2 证明唯一性 假设存在两个不同的对象都满足条件, 推出它们其实相等.

例题 4.21 (方程解的唯一性) 证明方程 $x^3+x+1=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恰有一个实根.

解 $f(x)=x^3+x+1$ 连续, $f(0)=1>0$, $f(-1)=-1<0$, 由介值定理至少有一实根. 假设有两个不同实根 $x_1\neq x_2$. 由罗尔定理, $f'(x)=3x^2+1$ 在 (x_1,x_2) 内有零点. 但 $3x^2+1\geq 1>0$ 恒成立, f' 无零点, 矛盾. 故实根唯一.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.6.2.0.3　证明某类对象有无穷多个　假设只有有限个, 据此构造出一个不在其中的新对象, 矛盾.

例题 4.22 (素数无穷多) 证明素数有无穷多个.

解 假设素数只有限个 $p_1, p_2, \dots, p_n$. 令 $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. 对每个 p_i, N 除以 p_i 余 1, 故 $p_i \nmid N$. 但 $N > 1$ 必有素因子, 该素因子不在 $p_1, \dots, p_n$ 之中, 与素数已全部列出矛盾. 故素数无穷多.

4.6.2.0.4　证明至少型命题　形如至少有一个对象满足某性质的命题, 假设全部对象都不满足该性质, 导出与已知条件的矛盾.

例题 4.23 (抽屉原理的至少型) 把 5 个点放入一个边长为 2 的正方形, 证明至少有两个点的距离不超过 $\sqrt{2}$.

解 将正方形等分为 4 个边长 1 的小正方形. 假设任意两点距离都大于 $\sqrt{2}$, 则每个小正方形内至多一个点(同一小正方形内两点距离 $\leq \sqrt{2}$). 4 个小正方形至多容纳 4 个点, 却要放入 5 个, 矛盾. 故至少有一对点距离不超过 $\sqrt{2}$.

4.6.3 反证法的局限

反证法并非万能. 它擅长给出存在性、唯一性、无穷性的判定, 却有两处局限.

其一, 否定结论后若无可用结构, 反证便无从展开. 假设对象不存在时手里没有可操作的对象, 假设对象不唯一时若两对象的差异无法比较, 推理都会卡住. 此时正面构造或直接论证可能更顺手.

其二, 反证法即便成功, 也只回答有没有、是否唯一、是否无穷, 不回答是什么. 证明了解的存在之后, 要具体求出或构造该对象, 仍需借助构造法或满足式策略(第4.5节、第4.7节). 把反证法当作存在性判定的工具, 把构造法当作造出对象的工具, 两者配合使用.

4.7 含满足式问题的通用策略

题目里出现满足式条件时, 我们**用自由度参数表达出满足式条件, 然后解方程**.

例题 4.24 (椭圆上的角与斜率) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 $A(-2,0)$, $B(2,0)$.P 为 C 上一点且在 x 轴上方. 求 $\tan\angle PAB + 2\tan\angle PBA$ 的最小值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

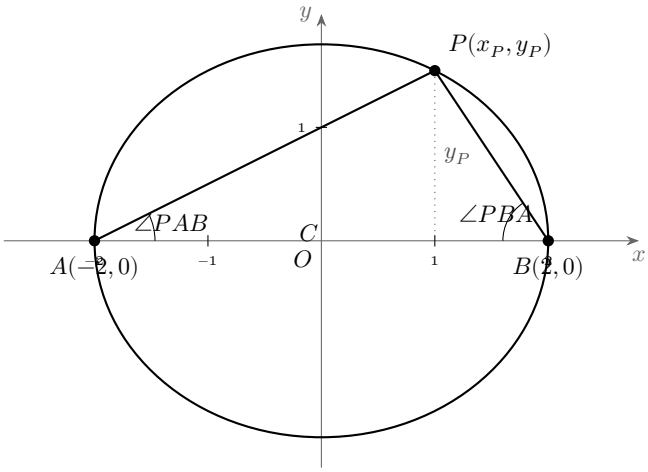


图 4.4 椭圆上点 P 与两顶点连线的斜率及夹角.

面对此题, 第一反应通常是为动点 P 设定变量. 无论设坐标 $P(x,y)$ 还是用参数方程 $P(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$, 都会将问题导向含根式或复杂三角函数的表达式, 后续求最值异常繁琐. 这提示存在一个更优的视角来描述点 P 的运动.

椭圆的第三定义指出, 对椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 P(非左右顶点), 其与左右顶点 A, B 连线的斜率之积为定值.

$$k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{b^2}{a^2}$$

本题中 $a^2=4, b^2=3$, 故 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{3}{4}$.

接着把原问题中的几何语言翻译为斜率语言.$\angle PAB$ 是直线 AP 的倾斜角, 故 $\tan\angle PAB = k_{AP}$. 而 $\angle PBA$ 是直线 BP 与 x 轴**负向**的夹角. 设 BP 的倾斜角为 α_{BP}, 则 $\angle PBA=\pi-\alpha_{BP}$, 故

$$\tan\angle PBA=\tan(\pi-\alpha_{BP})=-\tan\alpha_{BP}=-k_{BP}$$

于是所求表达式化为

$$S=k_{AP}-2k_{BP}$$

点 P 在 x 轴上方, $k_{AP}>0$ 且 $k_{BP}<0$. 令 $k_A=k_{AP}>0$ 及 $k'_B=-k_{BP}>0$, 则 $S=k_A+2k'_B$, 约束变为

$$k_A\cdot(-k'_B)=-\frac{3}{4}\quad\Longrightarrow\quad k_A\cdot k'_B=\frac{3}{4}$$

应用基本不等式

$$S=k_A+2k'_B\geq 2\sqrt{k_A\cdot(2k'_B)}=2\sqrt{2(k_Ak'_B)}=2\sqrt{2\cdot\frac{3}{4}}=\sqrt{6}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

等号当且仅当 $k_A = 2k'_B$ 时成立, 联立 $k_A k'_B = 3/4$ 可解出 k_A, k'_B, 表明最值可以取到. 所求最小值为 $\sqrt{6}$.

二级结论实质上是基本的变量代换. 它把"点 $P(x,y)$ 在椭圆上"这一关于**坐标变量** (x,y) 的约束, **翻译**成"连接 P 与顶点的两条直线斜率满足某关系"这一关于**斜率变量** (k_{AP}, k_{BP}) 的约束. 完成这一翻译, 原理便随之清晰.

给定两个斜率 $k_A = k_{AP}$ 和 $k_B = k_{BP}$, 写出两直线方程并求其交点 $P(x_P, y_P)$.

$$\begin{cases} y = k_A(x+2) \\ y = k_B(x-2) \end{cases}$$

联立解得

$$x_P = \frac{2(k_A+k_B)}{k_B-k_A}, \quad y_P = \frac{4k_Ak_B}{k_B-k_A}$$

将 P 的坐标代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 即强加点 P 必须在椭圆上的约束.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2(k_A+k_B)}{k_B-k_A}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4k_Ak_B}{k_B-k_A}\right)^2 = 1$$

两边同乘 $3(k_B-k_A)^2$ 并化简, 最终剩下

$$12k_Ak_B + 16k_A^2k_B^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4k_Ak_B(3+4k_Ak_B) = 0$$

由于 P 不在 x 轴上, $y_P \neq 0$, 所以 k_A, k_B 均不为零. 因此必有

$$3 + 4k_Ak_B = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_Ak_B = -\frac{3}{4}$$

这一推导说明结论的由来. 在复杂的 (x,y) 坐标系下求解绕远, 切换到约束条件极其简洁的 (k_A, k_B) 斜率坐标系里更直接.

整个过程沿同一条策略展开. 先识别出用斜率 (k_{AP}, k_{BP}) 描述问题可能更简单; 再把 P 在椭圆上这一条件翻译为斜率坐标系下的简洁关系 $k_{AP}\cdot k_{BP} = -3/4$; 最后将目标函数也用斜率表达, 并在新变量体系下结合几何约束 (P 在 x 轴上方) 求出最值. 此题的要领是**借助变量代换选择有利的表达, 使约束尽可能简单**.

再看一个代数形式的例子, 策略仍然是同一条.

例题 4.25 (和积换元求范围) 设实数 x, y 满足 $x^2+xy+y^2=3$, 求 x^2+y^2 的取值范围.

解　先沿解题流水线过一遍. 对象是实数对 (x,y), 共 2 个自由度; 唯一的条件 $x^2+xy+y^2=3$ 是满足式, 化为 1 个方程, $m=1<n=2$, 欠定. 于是 (x,y) 在一条曲线上变动, 求目标式的范围正是与欠定形态相配的问题 (第4.3.2小节).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

直接用 (x,y) 处理并不顺手, 约束与目标都是二次式, 消元会引入根式. 约束与目标关于 x,y 都是对称的, 改用和与积命名的新变量.

$$s=x+y,\qquad p=xy.$$

由 $x^2+xy+y^2=s^2-p$, 约束化为 $s^2-p=3$, 即 $p=s^2-3$.

目标随之改写为 $x^2+y^2=s^2-2p=s^2-2(s^2-3)=6-s^2$.

还需刻画像集, 否则翻译不完备. 实数对 (x,y) 经和积换元后只落在 (s,p) 平面的一个子集里, x,y 是方程 $t^2-st+p=0$ 的两个实根, 当且仅当判别式非负.

知乎@余命数

$$s^2-4p\ge 0 \implies s^2-4(s^2-3)\ge 0 \implies s^2\le 4.$$

这一步绝不能省. 若漏掉它, s^2 将无上界, 便会错误地断言 $6-s^2$ 没有最小值.

在新变量体系下, 由 $0\le s^2\le 4$ 得

知乎@余命数

$$2\le 6-s^2\le 6.$$

端点均可取到. $s=\pm 2$ 时 $x=y=\pm 1$; $s=0$ 时 $x=-y=\pm\sqrt{3}$, 均满足原约束.

因此 x^2+y^2 的取值范围是 $[2,6]$.

椭圆题把点在曲线上翻译成斜率之间的关系, 本题把同一个坐标约束翻译成和积之间的关系, **处理满足式条件的通用手法是把它翻译成更好用的变量语言**, 在新语言里目标式也随之变得简单. 此外, (x,y) 与 (y,x) 被映到同一对 (s,p), 而目标 x^2+y^2 对此并不敏感, 这个细节正是 第4.11节 要剖析的多对一映射与不变量的雏形.

知乎@余命数

4.8 不变量、单调量、极端原理、抽屉原理与对称

第4.6节 的反证法处理存在性判定. 另有一大类问题涉及**过程**与**操作**, 棋盘上移动棋子、数列按规则递推、算法逐步执行. 这类问题的复杂度随步数膨胀, 控制它的手段有四种: 在变化中寻找**不变**或**单调**的量, 在有限对象中取**极端**元素, 用**抽屉原理**从计数中读出存在性. 这四件工具之外再补一件适用范围更广的, 即在结构里寻找**对称**.

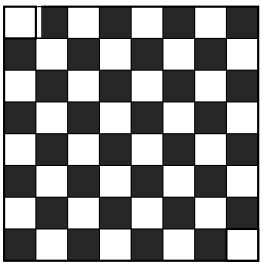
知乎@余命数

4.8.1 用不变量排除不可达状态

不变量是操作过程中始终保持不变的量. 若目标状态与初始状态在某不变量上取值不同, 则目标状态不可达, 这是不变量最常见的用法, 常配反证法使用.

例题 4.26 (残缺棋盘的覆盖) 8×8 棋盘去掉左上角与右下角两格, 能否用 31 块 1×2 多米诺骨牌(每块恰好覆盖两格)铺满?

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 4.5　去掉两个同色对角格的棋盘, 黑白格数不等, 无法用多米诺铺满.

解　将棋盘黑白相间染色 (图 4.5). 完整棋盘有 32 黑 32 白, 而左上角与右下角是同色格, 去掉后剩下 30 格一色、32 格另一色. 每块 1×2 骨牌必覆盖一黑一白, 故任何铺法覆盖的黑格数等于白格数.$30\neq 32$, 铺满不可能.

这里的不变量是"已覆盖区域中黑格数与白格数之差", 始终为 0; 目标区域该差为 ± 2, 不在同一不变量类, 故不可达.

例题 4.27 (函数对称性与不变量)　已知函数 $f(x)$ 对一切 x 满足 $f(x)+f(2-x)=4$. 证明 f 的图像关于点 $(1,2)$ 中心对称.

解　操作 $x\mapsto 2-x$ 是关于 $x=1$ 的反射. 在此操作下, 量 $f(x)+f(2-x)$ 始终等于 4, 这就是不变量.

令 $x=1$ 得 $2f(1)=4$, 故 $f(1)=2$. 对任意 x, 点 $(x,f(x))$ 在图像上, 其反射点 $(2-x,f(2-x))=(2-x,4-f(x))$ 也在图像上, 二者中点为 $(1,2)$. 因此图像关于 $(1,2)$ 中心对称.

第1.15节 中 2023 年全国甲卷题是用 $f(x)+f(2-x)=2a$ 这一不变量确定参数 a.

不变量也可用于判定两个状态是否属于同一操作可达的等价类. 若某量在一切允许操作下不变, 取值不同的状态互不可达. 奇偶性是最常见的不变量, 模某数的余数是它的推广.

4.8.1.0.1　用染色呈现不变量　例题 4.26 的解法把棋盘黑白相间染色, 让黑白格数相等这个不变量变得一目了然. 染色法是不变量原理的几何变体, 给棋盘格子、多边形顶点、格点这类离散对象按特定规律涂色或标数, 把抽象的不变量转化为颜色计数. 选取染色方案的关键, 是让每一步操作恰好覆盖各色一个, 于是颜色之差成为不变量; 目标状态的颜色之差一旦与之不同, 便不可达.

4.8.1.0.2　几何中的不变量　不变量不限于离散的染色. 给定一个圆与一个定点 P, 过 P 任作一条直线与圆交于 X 与 Y, 乘积 $PX\cdot PY$ 不随直线的选取改变, 这就是 第三卷第 13.21 节的圆幂定理. 直线在动, 交点随之改变, 乘积却恒定. 相交弦定

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

理与割线定理都可以看作这一条不变量的具体形态, 区别只在 P 落在圆内还是圆外. 解题时先认出哪个量在变化中保持不变, 比逐条记忆定理更省力.

知乎@余命数

4.8.1.0.3 变形问题中的不变量 有些过程问题的状态空间很大, 逐态计算无从下手, 把注意力放到某个守恒量上, 问题立刻变短.

知乎@余命数

例题 4.28 (兑在一起的咖啡与牛奶) 瓶 A 装有一升牛奶, 瓶 B 装有一升咖啡. 从 B 中取一勺咖啡倒入 A, 搅匀后再从 A 中取同样容量的一勺混合液倒回 B. 此时 A 里的咖啡与 B 里的牛奶, 哪个更多?

解 逐次计算浓度需要跟踪两次混合, 式子很快变长. 改用守恒的眼光, 两个瓶子的容积自始至终都是一升.A 中的咖啡只能来自 B 少掉的那一部分, 而 B 少掉的咖啡由等量的牛奶补上, 因此 A 中的咖啡恰好等于 B 中的牛奶.

两者一样多, 这个结论与勺子的大小无关, 与有没有搅匀也无关. 只要两次取走的体积相同, 交换就是等量的.

4.8.1.0.4 只取两个值的不变量 有的过程里, 不变量只有奇偶两种取值. 这类二值信息可以当作暗号使用, 让一个人把看到的情形传给其他人.

例题 4.29 (黑白帽与奇偶传信) 64 人排成一列, 每人头上戴一顶黑帽或白帽, 帽色由旁人任意安排. 每人只能看见自己前面那些人的帽子. 游戏从队尾开始, 依次询问每人自己帽子的颜色, 被问者只能说“黑”或“白”两个字, 所有人都能听见这些回答. 什么方案能保证存活的人最多, 最多能保证多少人?

解 队列里的人按视野排成一条链, 队尾的人能看见前面 63 顶帽子, 队首的人什么都看不见. 若各人只顾自己猜, 后面的人得不到任何有用的信息, 只能碰运气.

关键是把队尾那一次发言变成一句公用的情报. 约定“黑”表示他所看到的黑帽个数为奇数, “白”表示黑帽个数为偶数. 队尾的人按看到的黑帽数奇偶发言, 他本人只有一半的可能恰好说中, 而在他前面的每个人都因此有了可以使用的信息.

第二个人看得见后面 62 顶帽子, 把自己看到的三者与队尾报出的两者相比. 两人所数黑帽只在第二个人的头上相差一顶, 两份奇偶相同就说明他是白帽, 不同就说明他是黑帽.

此后每个人照同样的办法办理. 第 i 个人已经听到前面 $i-2$ 个正确的回答, 又看得见后面所有人的帽子, 只有自己的帽色未知. 他把已知的黑帽个数从队尾报出的总数奇偶中减掉, 剩下的奇偶就决定自己的帽色.

最多能保证 63 人存活. 队尾那个人的回答被用作情报, 他无法保证自己也说对, 其余 63 人全部获救. 整个方案只用了一个取值为奇偶两态的不变量, 却把每个人的可见信息接成了一条链.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.8.2 用单调量证明过程终止

单调量是操作过程中严格单调变化且有界的量. 若某量每步严格递减且下有界,如非负整数,则过程必在有限步终止. 这是证明算法终止的标准手段. 单调量的形态不限于逐次减一的计数, 两个都在变的量相除, 比值常常就是那个单调的量.

例题 4.30 (欧几里得算法的终止性) 说明欧几里得算法(辗转相除法)对任意正整数输入必在有限步终止.

解 算法从正整数对 (a,b) 出发, 反复用 $(a,b)\to(b,a \bmod b)$, 直到余数为 0. 考察第二个分量 b 的序列. 每一步中新的第二分量 $a \bmod b$ 满足 $0 \le a \bmod b < b$. 只要余数非零, 第二分量就是非负整数且严格递减. 非负整数列不能无限严格递减, 故有限步内余数必为 0, 算法终止.

这里的单调量是当前数对中较小者的序列, 严格递减的非负整数保证了终止. 同样的论证适用于任何状态空间有限、每步状态严格按某序下降的过程.

另一类用法出现在计数过程里. 两个量各自都在变化, 看不出规律, 把二者相除, 比值却每一步减少一个定值.

例题 4.31 (病毒与细菌) 某容器在 $t=0$ 时放入 2009 个细菌与 1 个病毒. 每分钟每个病毒先杀死 1 个细菌, 随后所有存活的细菌与病毒各自分裂为 2 个. 细菌会不会灭绝? 若会, 在什么时候?

解 设某一时刻细菌数为 b, 病毒数为 v. 一分钟后每个病毒先杀死一个细菌, 再连同细菌一起分裂加倍, 于是

$$b' = 2(b-v), \qquad v' = 2v.$$

单独观察 b 与 v, 两者都在变化, 规律并不明显. 把二者相除, 规律立刻出现

$$\frac{b'}{v'} = \frac{2b-2v}{2v} = \frac{b}{v} - 1.$$

比值 $\dfrac{b}{v}$ 每分钟恰好减少 1, 是一个单调递减的量. 初始比值为 $\dfrac{2009}{1} = 2009$, 每过一分钟减 1, 经过 2009 分钟减到 0, 细菌全部消失.

整个过程不需要解递推式, 只要盯住这一个比值. 题面通常不直接给出单调量, 它需要从几个已知的量组合出来.

例题 4.32 (迭代数列的收敛) 已知 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 先证 $a_n \le 2$ 对一切 n 成立：$a_1 = 2$；若 $a_n \le 2$，则 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \le \sqrt{4} = 2$.

再证 $a_{n+1} \ge a_n$：$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_n + 2) - a_n^2 = -(a_n - 2)(a_n + 1) \ge 0$（因 $a_n \le 2$）.

$\{a_n\}$ 单调递增且上有界，故收敛. 设极限为 L，由 $L = \sqrt{L+2}$ 得 $L^2 - L - 2 = 0$，正根 $L = 2$.

这里的单调量是 a_n 本身，严格递增且有上界，保证了数列逐步逼近极限值.

例题 4.33 (比利时华夫饼) 6×8 格的华夫饼，两人轮流沿格线切开，每一刀只沿一条完整的格线把其中一块一分为二，轮到切不动的人输. 先手有没有必胜策略？

解 局面分析看起来要枚举大量切法，实际上根本不存在策略问题. 每切一刀，饼的块数增加 1. 切到最后，每一小格都彼此分开，共有 $6 \times 8 = 48$ 块，所以无论两人怎么切，总刀数都等于 47.

胜负只取决于最后一刀归谁.47 是奇数，先手走的是第 $1, 3, \ldots, 47$ 刀，最后一刀由先手切出，先手必胜. 单调量不必交代每一步的细节，它只说明总步数固定，胜负随之确定.

单调量证明过程必终止，并能给出步数上界. 若量从 N 起每步至少减 1 且不降至负，则至多 N 步终止.

4.8.3 用极端原理取极值元素

面对存在某对象满足某性质的命题，取极端元素，即最大、最小、最近、最远的那个，让极端性自动带来所需性质. 极端原理把存在性证明转化为取极值 + 用极值性质导出结论.

例题 4.34 (整数的素因子分解) 证明每个大于 1 的整数都能写成素数之积（素数本身视为一积）.

解 假设存在大于 1 的整数不能写成素数之积，由极端原理，自然数集的非空子集必有最小元，取其中最小者 n.n 不是素数（否则它是自己的一积），故 $n = ab$ 且 $1 < a, b < n$. 由 n 的最小性，a 与 b 都能写成素数之积，二者之积即 n 的素数之积，与 n 的取法矛盾. 故不存在这样的 n.

最小反例是极端原理的典型形态. 取最小的坏对象，用更小的对象已被处理来迫使坏对象其实不坏. 它与反证法天然配合，假设坏对象存在，取最小坏对象，导出矛盾.

极端原理不止于数论. 在几何中，取距离最短的（点，直线）对，同样能用极端性导出结论.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 4.35 (西尔维斯特问题) 平面上有限个点不全共线. 证明存在一条直线恰好经过其中两个点.

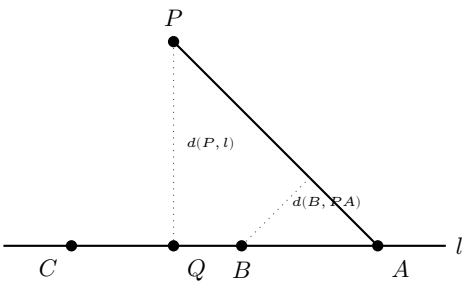


图 4.6　极端原理取距离最短的(点, 直线)对 (P,l), 导出 l 只含两个点.

解 全部共线的情形已排除, 故存在点 P 不在经过至少两个给定点的直线 l 上. 在所有这样的(点, 直线)对中, 取 $d(P,l)$ 最小的一对. 断言 l 恰好经过两个给定点.

设 l 上至少三个点, Q 为 P 到 l 的垂足.l 上的点分布在 Q 的两侧, 含 Q 本身, 总能取出同侧两点 A,B 使 B 比 A 离 Q 更近. 考虑直线 PA, P,A 都是给定点, 故 PA 经过至少两个点.B 不在 PA 上. 由 $\triangle PAB$ 面积的两种算法,

$$d(B,PA)=\frac{|AB|}{|PA|}\,d(P,l).$$

因 $|AB|<|PA|$ (直角 $\triangle PQA$ 中 $|PA|^2=|PQ|^2+|QA|^2>|QA|^2\geq|AB|^2$), 故 $d(B,PA)<d(P,l)$, 与 (P,l) 的最小性矛盾. 故 l 上恰好两个点.

极端原理有时以比较相邻对象的形式出现. 下面这道题里, 每个人朝离自己最近的人射击, 最近这一条是可以反复使用的极端性.

例题 4.36 (水枪) 平坦的场地上站着 n 个人 ($n>1$), 每人到其他各人的距离互不相同. 一声令下, 每人朝离自己最近的人射击. 证明当 n 为奇数时至少有一个人不会中枪, 并说明 n 为偶数时结论不成立.

解 把每个人画成一个点, 朝谁射击就从谁那里引一条有向边出去, 得到一个每点出度都是 1 的有向图. 某人被射中一次或多次, 相当于相应点的入度不小于 1.

先看 n 为偶数时的反例. 把人两两配成 $n/2$ 对, 同一对内两人相距 1 米, 不同对的人相距 100 米. 每个配对里, 两人的最近之人都是对方, 于是两人互射, 所有人都中枪.

再证奇数情形. 假设所有人都被射中, 则每个点的入度不小于 1. 全部点的出度之和等于 n, 入度之和也等于 n, 于是每个点的入度恰好是 1. 这时每个点恰有一条入边与一条出边, 图被分成若干个有向环.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

环的长度不能超过 2. 若有一个长度为 $k \geq 3$ 的环 $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$, 记 e_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的距离(下标按环循环).v_i 射击的对象 v_{i+1} 是离它最近的人, 而 v_{i-1} 是另一个人, 故

$$e_i < e_{i-1}.$$

把这条不等式沿环走一圈, 得到

$$e_1 < e_k < e_{k-1} < \cdots < e_2 < e_1,$$

首尾是同一个数, 矛盾, 故不存在长度不小于 3 的环.

于是每个环都是长度为 2 的互射对. 点被两两配对, 总数 n 必为偶数, 与 n 为奇数矛盾. 因此奇数情形下至少有一人不中枪.

例题 4.37 (必要性探路与极端原理) 已知 $f(x) = e^x - ax$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围.

解 $f'(x) = e^x - a \geq 0$ 需在 $[0, +\infty)$ 上恒成立.e^x 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 故 $f'(x)$ 的最小值在左端点 $x = 0$ 处取得: $f'(0) = 1 - a$.

取极端元素, 即 $f'(x)$ 的最小值, 得到必要条件 $1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$. 当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) = e^x - a \geq e^0 - a = 1 - a \geq 0$, 条件也充分.

第1.15节 的“必要性探路”是极端原理在高考导数题中的运用, 取边界点或极值点这一极端元素, 从中读出参数的必要条件.

4.8.4 用抽屉原理证明存在性

抽屉原理说, 把 $n + 1$ 个物体放入 n 个抽屉, 至少有一个抽屉里有两个或更多物体. 这条计数事实是组合数学中最强的存在性证明工具, 它从数量直接读出必然有重合, 无需构造具体的重合对象.

例题 4.38 (五整数取三, 其和为三的倍数) 任意给定 5 个整数, 证明必能从中选出 3 个使其和为 3 的倍数.

解 每个整数按模 3 的余数 $0, 1, 2$ 归入三类. 若某类至少 3 个, 取同类的 3 个, 其和 $\equiv 3r \equiv 0 \pmod 3$. 若每类至多 2 个, 则 $5 = 2 + 2 + 1$, 三类各非空, 从每类各取一个, 和 $\equiv 0 + 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$. 两种情形都成立.

例题 4.39 (数列周期性与抽屉原理) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1 \pmod 7$. 证明 $\{a_n\}$ 是周期数列并求其周期.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 a_n 只取 $\{0,1,\ldots,6\}$ 中的值，共 7 个可能. 前 8 项中必有两项相等：$a_i = a_j$ $(i < j \le 8)$. 递推关系确定，从 a_i 起的序列与从 a_j 起的序列完全相同，故周期为 $j-i$.

直接计算：$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 1 = a_1$，周期为 3.

抽屉原理保证了周期性的存在，7 个抽屉装 8 个数，必有重合，而递推的确定性把重合转化为周期. 第二卷第 7.14 节对此有一般性论述.

例题 4.40 (六人相识或互不相识) 任取 6 个人，证明其中总能找到 3 个人两两相识，或者找到 3 个人两两不识.

解 把 6 个人画成 6 个点，两人相识就把相应两点连成红边，不识就连成蓝边，得到一个完全图 K_6 的红蓝二染色. 命题等价于，任意红蓝二染色之下都存在一个单色三角形.

任取一个顶点 P，从它引出 5 条边，只有红蓝两种颜色，由抽屉原理，把 5 条边放进两个抽屉，至少有一个抽屉装着 3 条或更多. 设 P 到 A,B,C 的三条边都是红色. 若 A,B,C 之间存在一条红边，它与 P 构成红色三角形；若 A,B,C 之间没有红边，则三条边全为蓝色，A,B,C 自身构成蓝色三角形. 两种情形都出现单色三角形.

6 是最小的数. 把 K_5 的边染成红蓝两色，让红边构成一个五边形，蓝边构成剩下的五条对角线，逐一检查全部十个三角形，没有一个是单色的. 记 $R(3,3) = 6$. 这类只保证模式存在而不管具体位置的结论属于拉姆齐理论，它的入口就是抽屉原理.

构造抽屉的关键，是把“存在性”翻译成“某类必有两个以上”. 模某数的余数是最常用的抽屉；第二卷第 7.14 节是用模 m 的 m^k 个状态作抽屉，证明了整数递推数列的最终周期性. 第4.6节 中“5 点放入边长 2 的正方形”一题，把正方形等分为 4 个小正方形作抽屉，也是同一手法.

知乎@余命数

4.8.5 用对称导出结论

对称是比前面几件工具更普遍的观念. 一个对象在某个变换下保持不变，就称它关于这个变换对称. 图形绕中心旋转半圈仍与原图重合，多项式对调两个字母形式不变，都是对称的具体形态. 对称有两种用法. 题面里已经含有对称时，把它直接读出来就能省掉大半计算；题面里看不出对称时，可以主动改造条件，造出一份对称来.

例题 4.41 (倒数方程) 解方程 $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 方程左端的系数正着读与倒着读相同, 这类方程称为倒数方程. 直接求根要处理四次式, 先把这份对称用出来. 注意 $x=0$ 不是方程的根, 两边同除以 x^2, 再按 x 的次数从高到低整理, 得

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

x^2 与 $\dfrac{1}{x^2}$ 成对出现, x 与 $\dfrac{1}{x}$ 也成对出现, 引入新变量 $y=x+\dfrac{1}{x}$, 此时

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2.$$

原方程化为 $y^2-2-4y+5=0$, 即 $y^2-4y+3=0$, 解得 $y=1$ 或 $y=3$.

换元把四次方程降成了二次, 但 y 还不是答案. 对实数 x, 由 $x+\dfrac{1}{x}=y$ 得 $x^2-yx+1=0$, 判别式 y^2-4 必须非负, 所以 $y=1$ 不合, 舍去. 对 $y=3$, 解 $x^2-3x+1=0$ 得

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

原方程共有四个根, 实根恰好是这两个, 它们互为倒数, 另外两个是复根.

除以 x^2 与换元 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 都是围绕 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 的对换造出来的对称. 换元之后还要用判别式核对新变量的允许范围, 这一步不能省, 漏掉它就会把 $y=1$ 也算进答案.

例题 4.42 (四只虫子) 正方形的四个顶点各有一只虫子, A 追 B, B 追 C, C 追 D, D 追 A, 每只都以 1 米每秒的速率朝自己目标当前的位置前进. 求四只虫子相遇所需的时间.

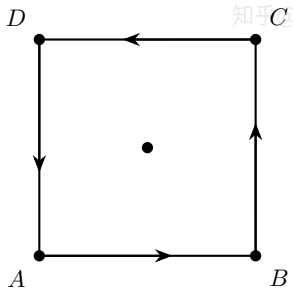


图 4.7 四只虫子沿各自的目标方向前进, 四条轨迹保持四重旋转对称, 正方形在收缩的同时整体转过相同的角度.

解 逐只跟踪轨迹要把位置写成时间的函数, 方程很快变得复杂. 换一个着眼点, 只看相邻两只虫子的距离.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

四只虫子的初始位置与运动规则在绕中心旋转 90° 的操作下完全不变, 只是四只虫子彼此换了名字. 这份整体对称保证四条轨迹在任一时刻仍是一个正方形, 各人的速度方向也与相邻两人的连线垂直. 于是 A 朝 B 的全速都用在缩短 AB 上, B 的运动方向与 AB 垂直, 不改变 AB 的长度.

AB 以速率 1 米每秒缩短, 初始长度就是正方形的边长 a 米, 相遇需要 a 秒. 若正方形边长为 1 米, 答案是 1 秒. 虫子们的坐标都在变化, 正方形的形状作为整体始终不变, 这份整体对称把逐点追踪的问题约化成一条直线上的追及.

相遇点在正方形中心. 相遇之前, 四只虫子的位置始终构成一个绕中心旋转并不断收缩的正方形, 中心是唯一在整场运动中不动的点.

例题 4.43 (储物柜) 1000 个储物柜排成一排, 编号 1 到 1000, 起初全部关着. 第一个人把编号为 2 的倍数的柜子全部打开, 第二个人改变编号为 3 的倍数的柜子的开合状态, 第三个人改变编号为 4 的倍数的柜子, 依次进行到没有柜子可改变为止. 最后哪些柜子是关着的?

解 直接跟踪一千个柜子的状态没有意义, 先把问题换成一句数论的话. 编号为 n 的柜子, 每有一个不小于 2 的因数 d, 它就在第 $d-1$ 个人经过时改变一次状态. 于是柜子 n 改变状态的次数等于 n 的正因数个数减 1. 与 第4.4节 的倒数第二步一样, 原问题被换成了一个更小也更清楚的问题.

只要比较因数个数的奇偶.n 的正因数可以按 d 与 $\dfrac{n}{d}$ 两两配对, 当 $d \neq \dfrac{n}{d}$ 时这一对是两个不同的数, 只有 $d = \dfrac{n}{d}$ 时它配不上对. 后者要求 n 是完全平方数. 所以 n 是完全平方数时因数个数为奇数, 改变状态的次数为偶数, 柜子保持关着; n 不是完全平方数时因数个数为偶数, 改变状态的次数为奇数, 柜子最终开着.

关着的柜子恰好是编号为完全平方数的那些, 即 $1^2, 2^2, \ldots, 31^2$ 这 31 个($31^2 = 961$, 而 $32^2 = 1024 > 1000$), 其余 969 个柜子都开着.

找对称也有次序可循. 代数式先看系数或形式的排布是否对称, 几何图形先看有没有在运动过程中保持不变的形状或变换, 计数对象先看能不能把自己的结构两两配对. 都不成立时, 再动手改造条件, 把题目改成对称的形状, 倒数方程里的除法与换元就是这样的改造.

4.8.6 归纳法与良序原理

第二卷第 7.1 节的数学归纳法证明命题 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立, 先验证 $P(1)$, 再证 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. 极端原理中的最小反例, 是同一条逻辑的另一面.

良序原理断言, 自然数的任一非空子集有最小元. 用它重读 例题 4.34. 假设存在不能分解为素数之积的整数, 取其中最小者 n, 良序原理保证了 n 的存在.n 不是素数, 故 $n = ab$ 且 $1 < a, b < n$; 由 n 的最小性, a, b 都能分解, 合起来给出 n 的分解, 矛盾.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

归纳法与最小反例是同一原理的两种表述. 归纳法说“没有反例”(从 1 起逐步排除);最小反例说“若有反例, 取最小的, 导出更小的反例, 矛盾”. 两者等价, 都建立在良序原理之上. 面对涉及自然数的命题, 归纳法给出正面推进的路径, 最小反例给出反面排除的路径, 择优使用.

例题 4.44 (数列通项的猜想与归纳证明) 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$. 猜想 a_n 的通项公式并用数学归纳法证明.

知乎@余命数

解 计算前几项:$a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{2}{5}$. 观察规律:$a_n = \dfrac{2}{n+1}$.

基础步:$n = 1$ 时, $\dfrac{2}{1+1} = 1 = a_1$, 成立.

归纳步:设 $a_k = \dfrac{2}{k+1}$, 则

$$a_{k+1} = \frac{2a_k}{a_k + 2} = \frac{2 \cdot \frac{2}{k+1}}{\frac{2}{k+1} + 2} = \frac{\frac{4}{k+1}}{\frac{2+2k+2}{k+1}} = \frac{4}{2k+4} = \frac{2}{k+2}.$$

故 $a_{k+1} = \frac{2}{(k+1)+1}$, 归纳完成.

从前几项猜想规律, 再用归纳法严格证明, 是高考数列题的标准路径. 归纳法把有限的观察推广为对所有自然数成立的结论.

4.8.7 这些原理如何组合

不变量、单调量、极端原理、抽屉原理与对称常与 第4.6节 的反证法和 第4.5节 的构造法组合使用, 形成完整的论证回路.

- **极端原理取极值元素**. 在有限或良序集合中取最大、最小、最近的元素, 为后续论证提供具有极端性质的对象, 如最小反例、最短点-线对.
- **不变量或单调量导出矛盾**. 用极值元素配合不变量或单调量, 推出与已知条件或极端性本身的矛盾, 从而否定假设.
- **抽屉原理读出存在性**. 从计数中直接得到“某类必有两个以上”, 无需构造具体对象.
- **对称化简计算**. 用保持不变的形状、变换或配对, 把待处理的对象减少到最小的一组.
- **构造法补充存在性**. 反证与极端只给出判定, 需要具体对象时再回到构造.

以 例题 4.34 为例. 极端原理取出最小反例 n, 反证法假设其存在, 组合后由 n 的分解把矛盾推回假设本身, 三者在同一道题里各司其职. 解操作类与过程类问题时, 依次检查四件事: 什么量不变, 什么量单调, 能否取极端, 能否构造抽屉; 再

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

看题目里有没有现成的对称. 这五件事问过之后, 往往比直接枚举所有状态高效得多.

4.9 谈谈二级结论

知乎@余命数

解题时常会遇到二级结论. 看清题目结构, 才能用好它们. 有些结论功能明确, 比如用顶点坐标的行列式求三角形面积, 它是坐标确定面积这一构造过程的快速算法, 可自然整合进解题流程, 作为计算捷径.

另一些结论的作用则显得较为晦涩. 例如, 等比数列的前 n 项和 S_n 满足“$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 成等比数列”. 不理解它的来源, 生搬硬套反而扰乱对问题结构的整体把握.

许多高阶的二级结论, 都是某种**视角的转换**或**变量的代换**. 它们将原问题中对某个数学对象 A 的约束条件, 翻译成了对另一个相关对象 B 的、形式上更简洁的约束条件. 洞察这一翻译过程, 使用这些结论简化计算时才不至于失去对题目结构的把握.

例题 4.45 (等比数列的打包重组) 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_5+a_6=16$, 且 $S_6=21$, 求 S_2.

此题若用基本量法(设 a_1, q)求解, 会面临求解高次方程的困境. 题目的条件 a_5+a_6 和 S_6 提示把数列的项**两两分组**. 这个洞察是解题的要点.

我们构造一个新数列来简化问题.

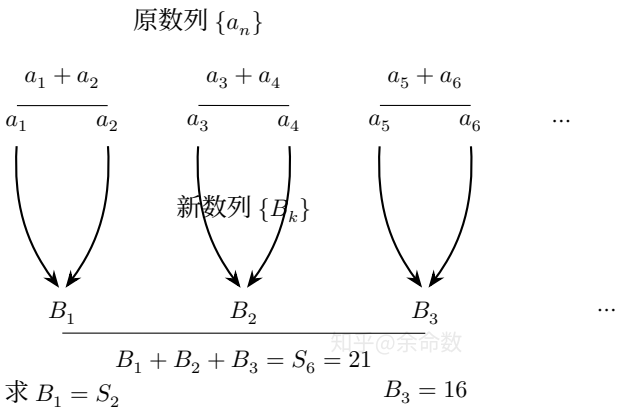


图 4.8　通过打包重组将数列 $\{a_n\}$ 映射为新数列 $\{B_k\}$

4.9.0.0.1　定义新变量, 翻译已知条件　将原数列 $\{a_n\}$ 的项两两打包, 定义新数列 $\{B_n\}$.

$$B_k=a_{2k-1}+a_{2k}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接着把原问题的所有信息用新数列的语言翻译.

- **已知条件一**.$a_5+a_6=16 \xrightarrow{\text{翻译}} B_3=16$.
- **已知条件二**.$S_6=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)=21 \xrightarrow{\text{翻译}} B_1+B_2+B_3=21$.
- **求解目标**.$S_2=a_1+a_2 \xrightarrow{\text{翻译}}$ 求B_1.

经翻译,原问题转化为一个关于新数列 $\{B_n\}$ 的问题. 已知数列 $\{B_n\}$ 满足 $B_3=16$ 且 $B_1+B_2+B_3=21$, 求 B_1. 仅凭这些条件尚不足, 还需翻译最重要的一个性质.

4.9.0.0.2 翻译关键性质, 说明新序列的规律 还未使用的关键条件是"$\{a_n\}$ 是等比数列". 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1, 公比为 q. 由于是正项数列, $a_1>0, q>0$. 考察 $\{B_n\}$ 的通项.

$$\begin{aligned} B_k &= a_{2k-1}+a_{2k}=a_1q^{2k-2}+a_1q^{2k-1} \\ &= a_1q^{2k-2}(1+q)=[a_1(1+q)]\cdot(q^2)^{k-1} \end{aligned}$$

这表明**新数列 $\{B_n\}$ 自身也是一个等比数列**, 首项为 $B_1=a_1(1+q)$, 公比为 $Q=q^2$. 由于 a_1, q 均为正, $\{B_n\}$ 也是正项数列. 打包重组的过程完整继承了等比的结构.

4.9.0.0.3 在新框架内解决问题 问题已经完全清晰. 已知一个正项等比数列 $\{B_n\}$, 其中 $B_3=16$ 且 $B_1+B_2+B_3=21$, 求 B_1. 由等比中项 $B_2^2=B_1B_3$ 及正项知 $B_2=4\sqrt{B_1}$, 代入和式

$$B_1+4\sqrt{B_1}+16=21$$

整理得关于 $\sqrt{B_1}$ 的一元二次方程

$$(\sqrt{B_1}-1)(\sqrt{B_1}+5)=0$$

$\sqrt{B_1}$ 必为正, 故 $\sqrt{B_1}+5\neq 0$、$\sqrt{B_1}=1$、$B_1=1$. 所求 $S_2=B_1=1$.

二级结论"$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \ldots$ 成等比数列"就是刚才打包重组的直接结果. 完成这一推导, 问题得以解决, 也理清了**构造新序列以简化问题内在结构**的思路.

二级结论是高效的翻译工具, 能把问题从一个变量体系转换到另一个更利于求解的体系. 遇到一个二级结论时, 我们追问三件事.

- **它在转换什么?** 从坐标到斜率, 还是从单项到数组?
- **它在翻译什么条件?** 点在曲线上, 还是数列成等比?
- **这个翻译是双向的吗?** 这决定了代换的完备性.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.10 二级结论的适用边界

第4.9节 把二级结论还原为视角转换与变量代换. 真正需要掌握的, 是**使用时机与适用边界**. 二级结论是对常见模式的凝练, 价值在于减少重复推导; 边界一旦模糊, 凝练就成了陷阱.

4.10.1 使用前的三项检验

套用一个二级结论之前, 须依次完成三项检验.

4.10.1.0.1　条件是否完全满足　每个二级结论都附带成立条件, 包括正负号、定义域、取等条件、几何位置. 结论的形式简洁, 条件却容易在题面里隐去. 条件缺一项, 结论就未必成立. 使用前先把条件逐条对照题目, 确认每一条都落到实处.

4.10.1.0.2　是否存在更直接的解法　二级结论是捷径, 捷径只有在原路更长时才有价值. 若直接展开、直接求导、直接代入比调用结论还省事, 套用结论反而引入额外负担. 用之前估一下直接解法的代价, 再决定是否走捷径.

4.10.1.0.3　结论能否现场重现　若一条结论能用一两行从基本定理重现, 其含义与条件也随之清晰; 若其推导本身需大段步骤, 则使用时更需留意其成立条件.

4.10.2 滥用的三种形态

例题 4.46 (对角线相等的误用) 平行四边形有结论“对角线平方和等于四边平方和”.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2).$$

有人据此在一般平行四边形中直接写对角线相等, 套用了矩形才有的性质.

解　对角线平方和的恒等式对一切平行四边形成立, 但对角线相等 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 等价于 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 即邻边垂直, 只对矩形成立. 把恒等式记成了相等关系, 等于偷偷加进了垂直这一条件. 在非矩形的菱形上使用, 结论失真. 几何二级结论的适用位置(矩形、菱形、一般平行四边形)必须与题目对象对齐.

例题 4.47 (均值不等式取等条件失效) 求 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x\in(0,1))$ 的最小值.

有人用均值不等式 $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$, 得最小值 2.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 均值不等式 $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ 的取等条件是 $x=\dfrac{1}{x}$, 即 $x=1$. 但 $x\in(0,1)$, $x=1$ 不在定义域内, 等号取不到. 函数在 $(0,1)$ 上单调递减, 最小值在 $x\to 1^-$ 时趋近 2 但达不到. 结论的形式正确, 定义域把取等点排除在外, 机械套用就给出错误的最小值. 定义域、整数性、开闭区间, 都是结论条件的一部分.

例题 4.48 (简单题套重型结论) 估计 $\ln(1.2)$ 的范围. 有人调用对数均值不等式

$$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}\leq\frac{x+y}{2}$$

代入 $x=1.2, y=1$ 求界.

解 对数均值不等式给出的是双向夹逼, 代入后还要解对 $\ln(1.2)$ 的不等式, 步骤不轻. 而题目只需粗估, 直接用 $\ln(1+x)\leq x(x>-1)$ 得 $\ln(1.2)\leq 0.2$, 一行即得所需上界. 重型结论在不需精细估计时反成负担. 精度需求与结论复杂度匹配, 才是用对二级结论.

4.10.3 理解推导, 把握场景

二级结论的可靠使用依赖两点. 其一, 清楚结论如何由基本定理推得, 既知其含义也知其条件; 其二, 清楚结论适用于哪类场景, 见到相应结构即可调用. 只记形式而不知来源, 一旦条件偏差便无从察觉; 只记公式而不知何处可用, 等于背了一串没有触发条件的符号.

用典型题时, 可把“这题把 X 翻译成了 Y”的表述连同其条件与方向一并记下, 这样的结论自然携带推导与适用场景.

4.11 换元法为何行之有效 *(选读)

无论把点的坐标转换为连线斜率, 还是把数列的单项组合为新序列, 用到的都是同一种**变量代换**, 我们称之为**换元法**. 换元法可靠而实用, 背后支撑它的数学原理是**映射**. 理解了映射, 就明白为何可以在新变量的体系中解决问题, 并得到原问题的正确答案.

每一次成功的换元都建立了一个从**原变量空间**到**新变量空间**的**映射关系**.

4.11.0.0.1 换元法的基本流程 换元法把一个不易处理的问题通过映射 f 投射到结构更清晰、更易于分析的新空间. 这个过程分解为以下步骤.

1. **建立映射**. 定义新变量, 明确其与旧变量的函数关系, 即 $y=f(x)$, 由此建立从原变量空间到新变量空间的映射.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **转化约束**. 将原问题中对旧变量 x 的约束条件全部翻译成对新变量 y 的约束条件, 精确描绘原问题解集在映射下的**像集**. 之前推导二级结论或新变量关系的努力, 正是在完成这一步.
3. **转化目标**. 将原问题的求解目标也用新变量 y 来表示.
4. **在新空间求解**. 在新变量的约束条件下, 完成对新目标的求解.

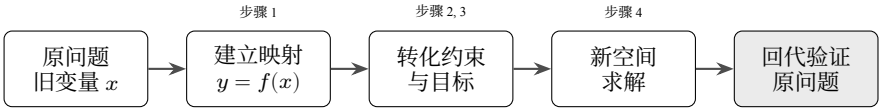


图 4.9　换元法的四步流程: 原问题经映射投到新空间, 在新空间求解后回代. 能否回代, 取决于映射的性质.

在新空间中得到的结果能否作为原问题的答案, 取决于映射 f 的性质, 以及所求解目标与这个映射的关系. 步骤 2 中的**像集**刻画尤为关键, 新变量的取值范围是旧变量经映射 f 后真正能到达的值的全体, 需要精确刻画. 像集刻画不完整, 等于在新空间里求解了一个比原问题更大的问题, 得到的解可能对原问题无效.

4.11.1 保证换元有效的两种典型情形

4.11.1.0.1　一一映射　当建立的映射 f 在我们关心的定义域和值域上是**一一对应**的, 即原变量空间中的每一个解都与新变量空间中的一个解恰好配对, 不多不少.

在这种情况下, 原问题和新问题在结构上**完全等价**. 它们就像同一本书的中文版和英文版, 语言(变量)不同, 讲述的故事在数学结构上完全一致. 在新变量空间中找到的任何解, 如最大值、最小值、特定值, 都唯一地对应着原变量空间中的一个解.

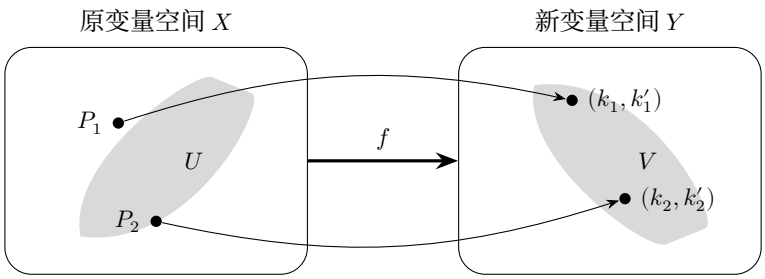


图 4.10　一一映射: 原解集 $U \subseteq X$ 中的每个元素, 如点 P 与像集 $V \subseteq Y$ 中的每个元素, 如斜率对 (k, k') 一一对应. 问题在结构上完全等价.

4.11.1.0.1.1　回顾椭圆问题　在 例题 4.24 中, 我们关注上半椭圆上 (除顶点外) 的点 $P(x_P, y_P)$. 对于每一个这样的点, 都唯一对应一对斜率 (k_{AP}, k_{BP}), 满足 $k_{AP} > 0, k_{BP} < 0$ 且 $k_{AP}k_{BP} = -3/4$. 反之, 每一对满足这些条件的斜率也唯一确定一个上半椭圆上的点 P.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

$$P(x_P, y_P) \quad \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \quad (k_{AP}, k_{BP})$$

因此, 从点到斜率的映射是**一一映射**. 求解关于 k_{AP}, k_{BP} 的表达式 $k_{AP} - 2k_{BP}$ 的最小值, 就完全等价于求解原问题. 在新空间中走到终点, 就意味着在原空间中也到达了终点.

4.11.1.0.2 多对一映射与不变量 在更多情况下, 我们建立的映射是**多对**一的, 即原变量空间中多个不同的对象被映射到新变量空间的同一个对象上. 此时, 换元法是否依然有效, 取决于一个关键条件. **所求解的目标必须是该映射下的一个不变量**.

不变量是指, 所有被映射到同一个像的那些原像, 在所关心的属性上完全一致. 所求的量其值只依赖于新变量的像, 而与它究竟来自哪个原像无关.

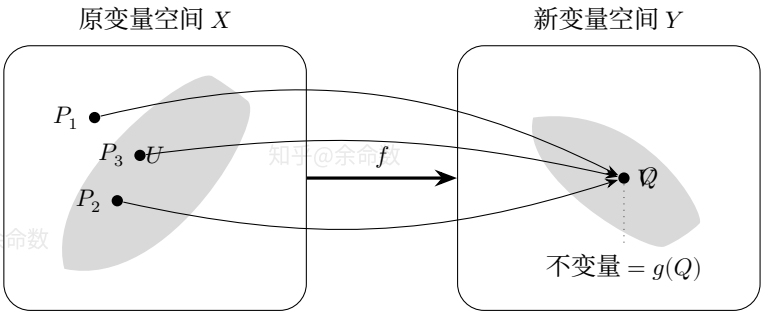


图 4.11 多对一映射: P_1, P_2, P_3 三个原像经 f 映到同一个像 Q. 若所求目标在 P_1, P_2, P_3 上取值相同, 即不变量, 则只需在 Q 处求值.

图 4.11 与 图 4.10 的对比, 概括了换元法的关键判断. 一一映射下, 所有问题都能回代; 多对一映射下, 只有不变量能回代. 动手换元之前先问清两件事: 建立的映射是几对几, 所求的量是否在合并的那些原像上取值一致.

4.11.1.0.2.1 回顾数列问题 将数列 $\{a_n\}$ 映射到新数列 $\{B_k\}$, 其中 $B_k = a_{2k-1} + a_{2k}$. 这个映射是多对一的, 不同的首项与公比组合 (a_1, q) 可能产生相同的新序列 $\{B_n\}$.

$$\{a_n\}^{(1)}, \{a_n\}^{(2)}, \ldots \quad \xrightarrow{\text{多对一映射}} \quad \{B_n\}$$

然而, 要求解的目标是 S_2. 换元时, 我们已将 S_2 与新变量直接挂钩.$S_2 = a_1 + a_2 = B_1$. 无论原空间中有多少个不同的数列 $\{a_n\}$ 能映射到同一个 $\{B_k\}$, 它们的前两项和 S_2 必定都等于这个像的第一项 B_1.S_2 的值是这个映射的**不变量**.

因此可以在新空间中放心求解 B_1. 一旦求出 $B_1 = 1$, 就知道所有满足题设条件的原数列 $\{a_n\}$, 其前两项和 S_2 必然等于 1.

4.11.1.0.2.2 倒数换元

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 4.49 ($x+\frac{1}{x}$ 型求值) 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$, 求 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 的值.

解 映射 $x \mapsto t = x+\dfrac{1}{x}$ 是典型的二**对**一映射.x 与 $\dfrac{1}{x}$ 被映到同一个 t(它们是方程 $u^2-tu+1=0$ 的两个根). 由 $t=3$ 反解 x, 会得到 $x^2-3x+1=0$ 的两个互为倒数的根, 原变量并未被唯一确定.

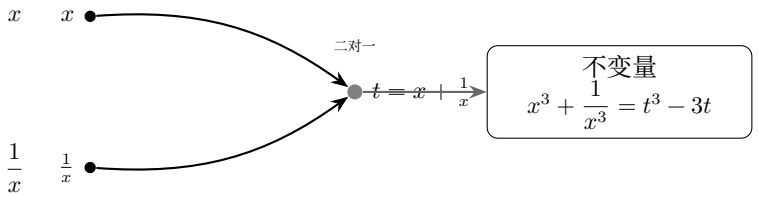


图 4.12　x 与 $1/x$ 映到同一个 t, 所求 x^3+1/x^3 在两者上取值相同, 是该映射的不变量.

但所求目标在原像对换 $x \leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ 下纹丝不动, 且可以只用 t 表达.

知乎@余命数

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^3-3t.$$

代入 $t=3$, 得 $27-9=18$.

目标是该映射下的不变量, 故换元有效, 甚至不必知道 x 究竟是哪一个根.

此例还能把不变量的边界照得更清楚. 若把目标换成 $x-\dfrac{1}{x}$, 它在 $x \leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ 下变号, 不是不变量; 此时仅凭 $t=3$ 无法确定其值(两个原像分别给出 $\pm\sqrt{5}$). **换元是否有效, 答案随目标而变**, 这正是动手之前就要问清的问题.

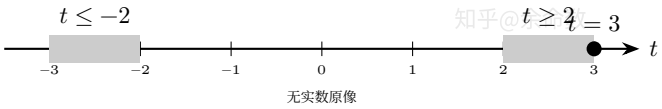


图 4.13　$t=x+1/x$ 的像集为 $|t|\ge 2$(阴影区域).$t=3$ 在像集内, 换元有效; 若题设给 $t=1$, 落在空白区域, 方程 $x^2-x+1=0$ 无实根, 换元失效.

像集的刻画在此例中同样是要务. 实数 x 经 $t=x+\dfrac{1}{x}$ 所得的像集是 $|t|\ge 2$(图 4.13); 若题设误给 $t=1$, 方程 $x^2-x+1=0$ 无实根, 一切关于实数 x 的推论都将落空. 这与 例题 4.25 中的完备性检查是同一条要求, 都要求新变量的取值范围恰好是原变量经映射能到达的全体.

换元法借助一次精心设计的映射, 把问题投到更易处理的空间, 图 4.9 画出了其中的四步.

换元之前, 逐条检验下面三件事.

1. **映射是否确定**. 新变量 $y=f(x)$ 与旧变量 x 之间的函数关系是否明确, 能否双向翻译约束与目标.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **像集是否完备**. 新变量的取值范围是否恰好是旧变量经映射后能到达的值的全体, 不多不少. 像集过宽, 会在新空间中引入原问题没有的解; 像集过窄, 会丢失原问题的解. 图 4.13 展示了 $t = x + 1/x$ 的像集 $|t| \geq 2$, 题设值落在像集外则换元失效.
3. **目标是否可回代**. 一一映射下一切目标可回代; 多对一映射下, 只有映射的不变量可回代.例题 4.49 中 $x^3 + 1/x^3$ 是不变量可回代, $x - 1/x$ 不是不变量不可回代, 同一映射下目标不同, 结论就不同.

三条标准对应换元法的三个环节: 建立映射、转化约束、回代验证. 任何一环出问题, 换元就会给出错误答案. 养成换元前逐条检查的习惯, 比事后纠错省力得多.

4.12 换元法的典型模式

第4.11节 从映射机理上说明了换元为何有效. 落到操作层面, 换元有六种典型模式, 每种针对一类结构. 识别出题目属于哪种模式, 换元就有了切入点.

4.12.1 对称式换元

当条件与目标关于若干变量对称时, 改用和与积, 或其他对称的初等对称多项式作为新变量, 往往能把多变量问题降为单变量.

例题 4.50 (对称式换元) 已知实数 x, y 满足 $x + y = 3$, 求 $x^2 + y^2$ 的最小值.

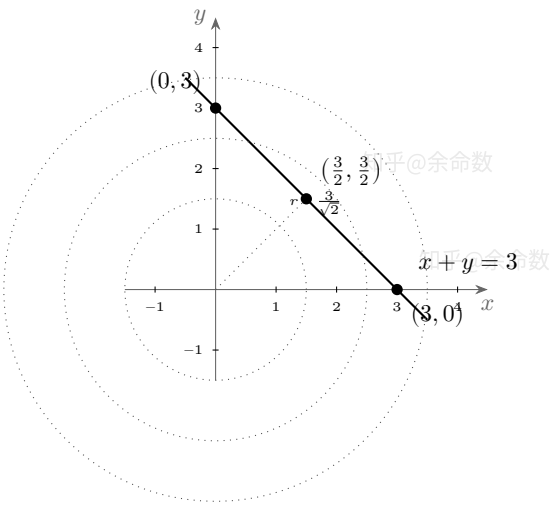


图 4.14 对称式换元, 直线 $x + y = 3$ 上离原点最近的点是 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 此处 $x^2 + y^2$ 取最小值 $\frac{9}{2}$. 同心圆表示 $x^2 + y^2 = r^2$ 的等值线, 与直线相切时 r 最小.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

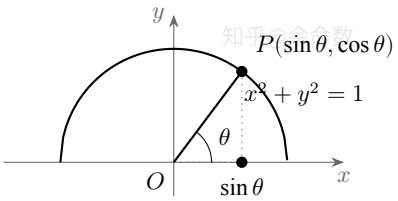
解 令 $s=x+y=3, p=xy$. 由 $x^2+y^2=s^2-2p=9-2p$, 最小化 x^2+y^2 即最大化 p. 实数 x,y 存在要求判别式 $s^2-4p\geq 0$, 即 $p\leq \dfrac{s^2}{4}=\dfrac{9}{4}$, 等号在 $x=y=\dfrac{3}{2}$ 取到. 故 $x^2+y^2\geq 9-2\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{2}$. 对称结构在 (s,p) 下变成单变量 p 的线性函数.

4.12.2 三角换元

当约束含 $\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{x^2+a^2}$ 或 $x^2+y^2=r^2$ 等结构时, 用三角恒等式 $\sin^2+\cos^2=1$ 或 $1+\tan^2=\sec^2$ 消去根号.

例题 4.51 (三角换元) 求 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}(|x|\leq 1)$ 的最大值.

知乎@余命数



令 $x=\sin\theta$, 则 $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$

图 4.15 三角换元, 令 $x=\sin\theta$ 把 $|x|\leq 1$ 上的根式 $\sqrt{1-x^2}$ 化为 $\cos\theta$. 点 P 在单位圆上半部分, 横坐标即 x, 纵坐标即 $\sqrt{1-x^2}$.

解 令 $x=\sin\theta$ ($\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 保证可逆), 则 $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$, $f=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\leq\dfrac{1}{2}$, 等号在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 取到. 三角换元把根式化为整式, 最值一眼可读.

4.12.3 整体换元

当某个复合式在题中重复出现, 把它整体设为新变量, 可降低嵌套层级.

例题 4.52 (整体换元) 解方程 $(x^2-3x)^2-4(x^2-3x)-12=0$.

解 令 $t=x^2-3x$, 原方程化为 $t^2-4t-12=0$, 即 $(t-6)(t+2)=0$, 故 $t=6$ 或 $t=-2$. 回代.$x^2-3x=6\implies x=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{2}$; $x^2-3x=-2\implies x=1$ 或 $x=2$. 四个解均经检验成立. 重复出现的 x^2-3x 被整体替换后, 四次方程降为二次.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.12.4 同构换元

当不等式或方程两端呈同构形式 $F(a)$ 与 $F(b)$ 时, 构造统一函数 F, 把比较两端归结为研究 F 的单调性.

例题 4.53 (同构换元) 设 $a>b>e$, 比较 a^b 与 b^a 的大小.

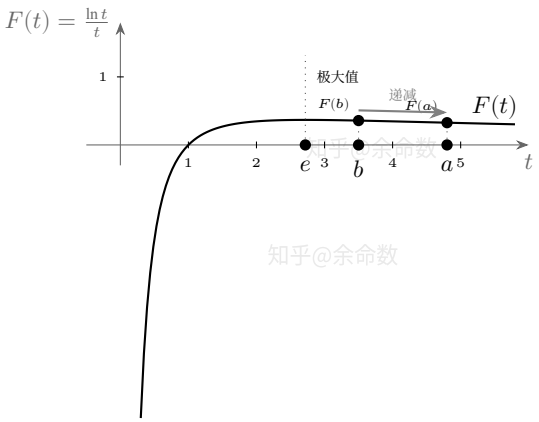


图 4.16 同构换元, 构造 $F(t)=\frac{\ln t}{t}$, 在 $t>e$ 处取极大值后严格递减.$a>b>e$ 时 $F(a)<F(b)$, 即 $\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$, 故 $a^b<b^a$.

解 两边取对数, 比较 $b\ln a$ 与 $a\ln b$, 即比较 $\dfrac{\ln a}{a}$ 与 $\dfrac{\ln b}{b}$. 构造同构函数 $F(t)=\dfrac{\ln t}{t}$, 则 $F'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$. 当 $t>e$ 时 $\ln t>1$、$F'(t)<0$、F 严格递减. 由 $a>b>e$ 得 $F(a)<F(b)$, 即 $\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{\ln b}{b}$, 亦即 $b\ln a<a\ln b$, 故 $a^b<b^a$. 两端的同构形式被统一函数 F 一并收纳, 比较化为单调性的直接应用.

4.12.5 参数化换元

当几何约束把对象限制在曲线上时, 用曲线的参数方程显式地把对象化为单参数, 把隐式约束化为参数的自然取值范围.

例题 4.54 (参数化换元) 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的点表为 $(2\cos t,\sin t)$, 求 $x+y$ 的取值范围.

解 $x+y=2\cos t+\sin t=\sqrt{5}\sin(t+\varphi)$, 其中 $\tan\varphi=2$. 由正弦的取值范围, $x+y\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$, 两端都能取到. 参数化把点在椭圆上这一隐式约束变成单参数 t 的自由取值, 目标式也随之化为标准振幅型.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

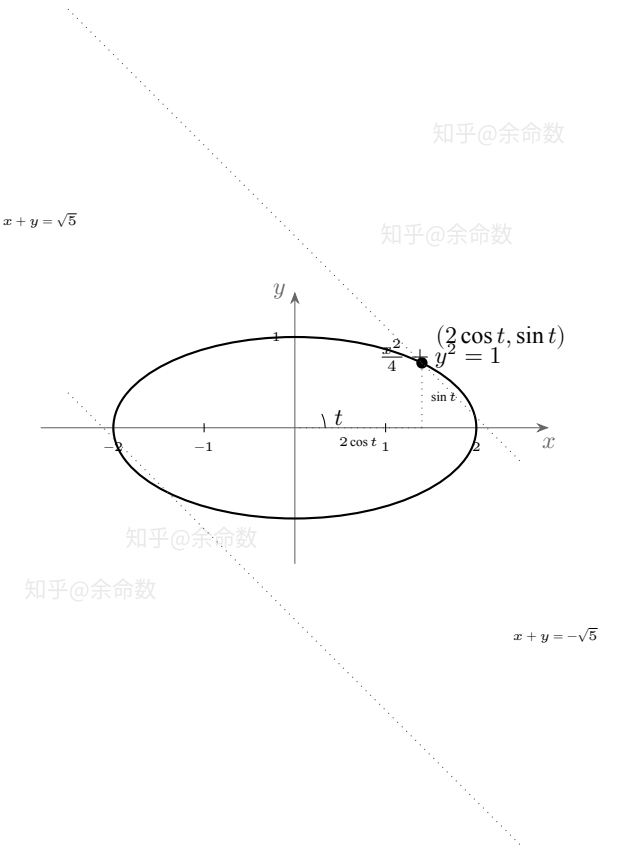


图 4.17　参数化换元, 椭圆上的点用参数 t 表示为 $(2\cos t, \sin t)$. 直线族 $x+y=c$ 与椭圆相切时取到极值 $c=\pm\sqrt{5}$, 对应 $x+y=\sqrt{5}\sin(t+\varphi)$ 的振幅.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.12.6 参考系换元

当题目里有两个以上的运动对象, 速度互相叠加时, 换一个参考系常常能让其中一个对象静止下来, 相对运动随之变成简单的追及或相遇.

例题 4.55 (漂流中的帽子) 一人沿河游泳, 逆流游了 30 分钟时发现帽子不见了, 帽子在他落水时就已掉入水中, 一直随水漂流. 他立即掉头顺流去追, 恰好在下游 1 千米处追上帽子. 设他在静水中的游速保持不变, 求水流速度.

解 以河岸为参考系, 人逆流时的速度是 $v-u$, 顺流时是 $v+u$, 帽子以 u 漂流. 三个速度纠缠在一起, 列方程解方程能把答案算出来, 计算量却不小.

改以河水为参考系, 帽子在这个参考系里始终静止不动. 人离开帽子的速率是静水游速 v, 追回来的速率也是 v, 来回路程相同, 所以去程与回程耗时相同. 去程用了 30 分钟, 回程也是 30 分钟, 从落水到追上总共 1 小时.

这一个小时里帽子相对河岸移动了 1 千米, 水流速度因此是 1 千米每小时. 答案与水速、游速的具体数值都无关, 只由漂流距离和总时间决定.

换参考系与 例题 4.42 中只盯住相邻两只虫子的距离, 做法是同一件事, 都是把不容易处理的绝对运动换成容易处理的相对运动.

4.12.7 换元后的三项检查

无论哪种模式, 换元落定后都要做三项检查.

新变量的范围. 新变量能取哪些值, 取决于原变量与映射的像集. 第4.11节 反复强调的完备性检查, 在这里就是确定新变量的定义域. 漏掉范围, 最值会错取在不可达的端点上, 见 例题 4.47.

可逆性. 若问题要求最终回到原变量, 如解方程要回代求原解, 换元映射必须在所关心范围内可逆; 多对一映射下, 一个新变量的值可能对应多个原变量的值, 回代时须全部找回, 不可只取其一.例题 4.49 中 x 与 $1/x$ 同映到一个 t, 若题目要的是 x 本身, 仅靠 t 就不够.

是否真正简化. 换元的目的是简化. 若新变量下的约束与目标反而更繁(根号换成三角却出现高次、整体换元后方程次数反升), 说明这次换元并不合适, 应换一种参数化或干脆回到原变量. 三角换元尤其要警惕. 消去根号的代价是引入三角恒等式, 只有当目标式能随之化为简洁振幅型或齐次型时才划算.

4.13 本章小结与习题

4.13.1 本章脉络

本章始终在讲同一件事, 即用条件去确定数学对象.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

第4.1节 把任何题目拆成研究对象、已知条件、待求目标三要素,区分显条件与隐条件、对象个体与对象族. 确定的程度决定问题的形态, 完全确定则求值, 部分确定则求范围、最值或轨迹.

第4.2节 用自由度计量这种确定. 完全确定一个对象所需的最少独立实数个数, 等于变量数减独立约束数. 设参数就是给自由度命名;过剩的参数不带来过剩的信息. 第4.3节 把自由度提升为解题判断工具, 自由度为零对应离散解, 为正对应一族解, 为负提示约束过强需先验相容.

第4.4节 先给出动手调查的四项动作, 即列举、缩小规模、幻想答案、例证与猜想, 再把条件分成构造式与满足式, 给出正向推进、反向分析(含倒数第二步)、双向夹击、模式识别四条基本路径, 并组装成可动态调整的解题框架. 第4.5节 处理纯构造式问题, 沿构造链步步确定对象;目标若能由已有对象直接组合, 便可越过中间对象, 这是设而不求的萌芽. 第4.6节 处理正面构造受阻时的反证法, 把结论的否定作为额外条件引入, 导出矛盾以判定存在性、唯一性或无穷性. 第4.7节 处理含满足式的问题, 把约束翻译成更好用的变量语言, 再在新语言中表达目标、求解;翻译必须完备, 像集要刻画清楚.

第4.8节 用不变量排除不可达状态, 染色法是其视觉化;用单调量证明过程终止;用极端原理取极值元素, 西尔维斯特问题即其一例;用抽屉原理从计数读出存在性;用对称化简计算;并以良序原理把归纳法与最小反例统一起来, 五者常与反证法、构造法配合.

第4.9节 把二级结论还原为视角转换与变量代换, 看清它在转换什么、翻译什么条件、是否双向,才能驾驭它. 第4.10节 把二级结论从记忆推进到使用,使用前检验条件是否齐备、有无更直接解法、能否当场推导;记推导与场景胜过记结论形式.

第4.11节 从映射的角度说明换元为何有效, 一一映射时新旧问题等价, 多对一映射时目标须为不变量. 第4.12节 给出对称式、三角、整体、同构、参数化、参考系六种换元模式, 以及换元后核范围、查可逆、验简化的三项检查.

本章的工具都在回答两个层次的问题. 一个层次是结论为什么成立, 它解释结构的来源,比如倒数方程同除以 x^2 之后四次式必然降为二次,再如 例题 4.40 中抽屉原理为什么恰好给出同色三角形. 另一个层次是步骤怎么走通, 它保证书写与计算的正确,比如倒数方程解出 y 之后还要回到 x,六人问题染色之后还要把三条边中是否有红边的两种情形都讨论到.

4.13.2 与前文的联系

本章的概念在全书各处都有对应的技术化身,回读时不妨对照.

映射的语言见 第一卷第 2.2 节, 它为 第4.11节 提供了底座. 为自由度命名的具体技术, 是 第三卷第 13.4 节至 第三卷第 13.7 节的设点法与设线法, 决策原则见 第三卷第 13.16 节. 欠定情形下的策略, 可回看 第1.15节 的必要性探路与端点分析. 用构造式条件锁定对象的典型例子,包括 第二卷第 7.9 节中“首项 + 递推确定数列”,以及 第一卷第 4.1 节中函数方程的赋值法. 第4.2节 的三次函数例所采用

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

的展开形式, 其思想来自 第1.13节(现并入 第1章)的泰勒公式. 极端原理与最小反例在 第二卷第 9 章的整除与计数讨论中多次出现. 第4.8节 的良序原理把最小反例与 第二卷第 7.1 节的数学归纳法统一为同一原理的两种表述; 抽屉原理在 第二卷第 7.14 节证明了整数递推数列的最终周期性.

知乎@余命数

习题

4.1. (三要素辨析)对 例题 4.1 的三个问法, 分别写出研究对象、已知条件、待求目标, 并说明三者在哪一步开始分叉.
提示: 对象与条件相同, 分叉发生在目标决定的方向上.

4.2. (自由度计数)确定下列对象各需几个自由度, 并说明理由. (1) 定圆的内接三角形, 三个顶点都在该圆上; (2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条切线; (3) 一个等差数列; (4) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$.
提示: 曲线上的一个动点只有 1 个自由度.

4.3. (条件分类与预判)对问题"已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, 且 a_3,a_5,a_8 成等比数列, 求其通项公式", 完成解题流水线的前三步: 清点对象、标注自由度、给条件分类, 并预判解的形态.
提示: 等差数列有 2 个自由度.

4.4. (三种形态)只考虑三角形的**形状**, 不计位置与朝向, 此时三角形有 3 个自由度, 判断下列各组条件确定三角形的形态(欠定 / 恰定 / 超定或不相容), 并说明理由. (1) 两角及一条边; (2) 满足三角不等式的三边; (3) 三个角; (4) 两边及其中一边的对角.
提示: (3) 确定的是相似一族; (4) 是恰定, 但离散解集可能有两解、一解或无解.

4.5. (框架实操)求过点 $P(2,3)$ 且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线方程.
提示: 用斜率参数化后, 务必检验被参数化排除在外的竖直直线; 本题恰有一解藏在其中.

4.6. (构造次序)求圆 $x^2+y^2=9$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=16$ 的公共弦所在直线的方程.
提示: 不必先求交点; 两方程之差即所求.

4.7. (反证法)用反证法证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数.
提示: 仿照 例题 4.20 中 $\sqrt{2}$ 的证明, 注意 $p^2=3q^2$ 推出 p 被 3 整除.

4.8. (反证法与单调量)证明方程 $x^5+x^3+x=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有 $x=0$ 一个解.
提示: 假设有两个不同实根, 用罗尔定理与 $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ 导出矛盾.

4.9. (满足式与完备性)设实数 x,y 满足 $x^2-xy+y^2=1$, 求 x^2+y^2 的最大值与最小值.
提示: 令 $s=x+y, p=xy$ 翻译约束与目标, 并用判别式刻画像集.

4.10. (不变量)8×8 棋盘去掉左上角与右下角两格, 两格同色, 能否用 31 块 1×2 多米诺骨牌铺满? 说明理由.
提示: 黑白相间染色下, 骨牌必覆盖一黑一白; 比较剩余的黑白格数.

4.11. (极端原理)证明每个大于 1 的整数要么是素数, 要么有不超过 $\sqrt{n}$ 的素因子.
提示: 设 n 为合数, $n=ab, 1<a\le b$, 则 $a\le\sqrt{n}$; a 的素因子即所求.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.12. (极端原理·西尔维斯特问题)平面上 5 个点不全共线, 用 例题 4.35 的方法证明存在一条直线恰好经过其中两个点.
提示: 取不在此直线上的一点与此直线的距离为最小的(点, 直线)对, 反证此直线上只有两个点.

4.13. (抽屉原理)任取 6 个整数, 证明必有两个之差为 5 的倍数.
提示: 按模 5 的余数分 5 个抽屉, 6 个数必有两个同余.

4.14. (抽屉原理)在边长为 1 的正三角形内任取 5 个点, 证明至少有两点距离不超过 $\frac{1}{2}$.
提示: 连接三边中点把正三角形分为 4 个边长 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形, 每个内两点距离 $\leq \frac{1}{2}$.

4.15. (归纳法与最小反例)用最小反例法证明: 对任意正整数 n, 3^n-1 能被 2 整除. 再与 第二卷第 7.1 节的数学归纳法证法对照, 体会两种表述的等价性.
提示: 假设存在不满足的正整数, 取最小者 n; $n \neq 1(3^1-1=2)$, 故 $n \geq 2$, $3^n-1 = 3\cdot 3^{n-1}-1 = 3(3^{n-1}-1)+2$.

4.16. (二级结论的翻译)设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=2$, $S_6=6$, 求 S_9.
提示: 把每三项打包为一组, 新数列仍成等比.

4.17. (适用边界)判断下列使用是否成立, 并指出错误所在. 求 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $x\in(0,1]$ 上的最小值, 用均值不等式得 $f(x)\geq 4$, 故最小值为 4.
提示: 检查取等条件 $x=\frac{4}{x}$ 即 $x=2$ 是否在定义域内.

4.18. (映射观点)已知 $x+\frac{1}{x}=-3$, 求 $x^5+\frac{1}{x^5}$ 的值.
提示: 记 $a_n=x^n+x^{-n}$, 则 $a_{n+1}=\left(x+\frac{1}{x}\right)a_n-a_{n-1}$; 目标是 $x\leftrightarrow\frac{1}{x}$ 下的不变量.

4.19. (不变量的边界)考虑换元 $(s,p)=(x+y,\,xy)$. 判断下列目标能否仅由 s,p 确定, 并说明理由. (1) x^2+y^2; (2) x^3y+xy^3; (3) $x-y$.
提示: 检验目标在对换 $x\leftrightarrow y$ 下是否不变, 以及能否用 s,p 表出.

4.20. (换元模式识别) 指出下列各题应优先采用哪种换元模式, 并写出换元. (1) 求 $y=x+\sqrt{1-x^2}$ 的最大值; (2) 解 $x^4-5x^2+4=0$; (3) 已知 $x+y=4$, 求 xy 的最大值; (4) 比较 e^{π} 与 π^e 的大小.
提示: 依次对应三角换元、整体换元、对称式换元、同构换元.

4.21. (开放回看)从 第三卷第 13 章或 第1章 中任选一道你完整做过的大题, 画出它的解题流水线, 写清对象清单、自由度标注、条件分类, 以及 m 与 n 的比较. 无标准答案, 完成即正确.

4.22. (动手列举·变体)三个正整数的乘积是 72, 它们之和是某人已知的门牌号. 该人知道门牌号后仍不能确定这三个数, 又被告知最大的数只有一个, 随即确定. 求这三个数与门牌号.
提示: 列出乘积为 72 的全部三元组, 重复出现的和数对应两组, 其中一组有两个数并列最大.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.23. (例证与猜想)验证 $P(n)=n^2+n+41$ 在 $n=0,1,\dots,39$ 时都取素数, 并说明 $n=40$ 时 $P(n)$ 是合数.

提示: $P(40)=40^2+40+41=41\times 41$.

4.24. (连续正整数之和)证明 1024 不能写成两个以上连续正整数之和, 并求 1 到 100 中不能这样写出的正整数.

提示: 由 例题 4.9 的结论, 不能写出的恰是 2 的幂.

4.25. (幻想答案)某书店出售单价 3 元与 5 元的两种练习册, 某人用 50 元恰好买了 12 本. 先用幻想答案法写一个答案再列方程检验, 求两种各买了多少本.

提示: 设 3 元本为 x 本, 则 $3x+5(12-x)=50$.

4.26. (不变量)一只杯子盛满水, 另一只盛满酒. 从水杯取一勺水倒入酒杯, 搅匀后再从酒杯取同容量的一勺混合液倒回水杯, 重复若干次. 证明水杯中的酒与酒杯中的水始终等量.

提示: 两次转移的容量相同, 交换就是等量的; 也可以用水的总量守恒来说明.

4.27. (奇偶传信·变体)帽子有红、黄、蓝三色, 每人只能说一个 0 到 2 的整数, 其余规则与 例题 4.29 相同. 证明除队尾外所有人都能保证说对.

提示: 把三种颜色依次编号 $0,1,2$, 队尾报出他看到的所有帽子编号之和模 3 的余数.

4.28. (对称·倒数方程)求方程 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ 的实根个数.

提示: 两边除以 x^2, 令 $y=x+\dfrac{1}{x}$, 方程化为 $y^2-y-1=0$; 两个根都满足 $|y|<2$.

4.29. (参考系换元)自动扶梯以恒定速率上行. 某人以每秒 1 级的速度向上走, 到顶时数得 20 级; 以每秒 2 级的速度向上走, 数得 32 级. 求扶梯静止时可见的级数.

提示: 设扶梯每秒上行 s 级, 行走时间为 $\dfrac{N}{v+s}$, 数得的级数是 $v\cdot\dfrac{N}{v+s}$; 两式消去 N 得 $s=3$, 再回代求 N.

4.30. (单调量·必胜策略)把 例题 4.33 的华夫饼换成 $m\times n$ 格, 说明胜负与两人的切法无关, 只由 $mn-1$ 的奇偶决定.

提示: 每刀使块数增加 1, 终局的块数恒为 mn.

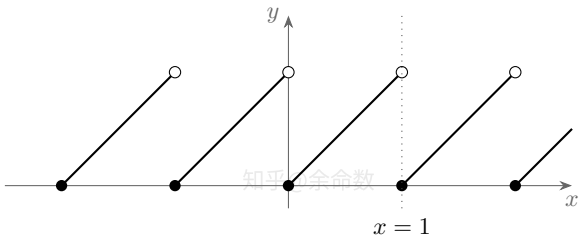
知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

习题解答

第 1 章极限与导数

1.1. **解** 先题

函数 $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的小数部分. 为了判断在 $x=1$ 处的极限是否存在, 我们分别考察其左极限与右极限.



当 x 从右侧趋近于 1 时, 记作 $x\to 1^+$. 此时 x 的取值略大于 1, 例如 $1.1, 1.01, \ldots$. 对于这些 x 值, $\lfloor x\rfloor=1$. 因此右极限为

$$\lim_{x\to 1^+}(x-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0$$

当 x 从左侧趋近于 1 时, 记作 $x\to 1^-$. 此时 x 的取值略小于 1, 例如 $0.9, 0.99, \ldots$. 对于这些 x 值, $\lfloor x\rfloor=0$. 因此左极限为

$$\lim_{x\to 1^-}(x-\lfloor x\rfloor)=\lim_{x\to 1^-}(x-0)=1-0=1$$

由于左极限与右极限存在但不相等 $(0\neq 1)$, 根据极限存在的充要条件, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限不存在.

1.2. **解** 再题

按 $\varepsilon-\delta$ 定义, 我们需对任意 $\varepsilon>0$ 找到 $\delta>0$, 使当 $0<|x-c|<\delta$ 时恒有 $|(ax+b)-(ac+b)|<\varepsilon$. 将目标式化简, 可知误差仅由 $|x-c|$ 决定.

$$|(ax+b)-(ac+b)|=|a(x-c)|=|a|\cdot|x-c|.$$

因 $a\neq 0$, $|a|>0$, 两边除以 $|a|$ 即得 $|x-c|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}$, 这给出了 δ 的选取.

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$. 由 $\varepsilon>0$ 且 $|a|>0$ 知 $\delta>0$. 当 $0<|x-c|<\delta$ 时, $|x-c|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}$, 两边乘 $|a|$ 得

$$|a|\cdot|x-c|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad |(ax+b)-(ac+b)|<\varepsilon,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此即所需不等式. 由定义, $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=ac+b$.

1.3. **解** 接着题

按 $\varepsilon-\delta$ 定义, 我们需对任意 $\varepsilon>0$ 找到 $\delta>0$, 使当 $0<|x-c|<\delta$ 时恒有 $|\sqrt{x}-\sqrt{c}|<\varepsilon$. 对目标式有理化, 把它与可控的 $|x-c|$ 相联系.

$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|=\left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right|=\frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}.$$

分母中的 $\sqrt{x}$ 非常数, 但因 x 趋近于 c, 我们先限制 x 的范围以获取分母下界. 预先要求 $\delta\leq c/2$. 若 $|x-c|<c/2$, 则 $x>c/2$, 从而 $\sqrt{x}>\sqrt{c/2}$, 故 $\sqrt{x}+\sqrt{c}>\sqrt{c}$ (取此宽松下界以简化估计). 于是

$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|=\frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}<\frac{|x-c|}{\sqrt{c}},$$

要其小于 ε, 只需 $|x-c|\leq\varepsilon\sqrt{c}$. 合并两个约束, 取 $\delta=\min\{c/2,\,\varepsilon\sqrt{c}\}$.

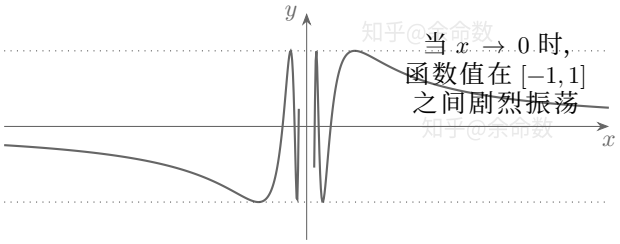
对任意 $\varepsilon>0$, 取上述 δ. 由 $c>0,\varepsilon>0$ 知 $\delta>0$. 当 $0<|x-c|<\delta$ 时, 同时有 $|x-c|<c/2$ 与 $|x-c|<\varepsilon\sqrt{c}$. 由前者得 $x>c/2$, 故 $\sqrt{x}+\sqrt{c}>\sqrt{c}$, 从而

$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|=\frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}<\frac{|x-c|}{\sqrt{c}}<\frac{\varepsilon\sqrt{c}}{\sqrt{c}}=\varepsilon.$$

由定义, $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$.

1.4. **解** 最后题

函数 $g(x)=\sin(1/x)$ 在 $x\to0$ 时的极限不存在. 我们构造两个都趋近于 0 的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使对应的函数值序列 $\{g(x_n)\}$ 和 $\{g(y_n)\}$ 收敛到不同的极限.



先构造函数值始终为 1 的序列. 令 $\frac{1}{x_n}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 其中 n 为正整数. 则 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$. 由 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$ 知, 当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to0$. 对应的函数值为

$$g(x_n)=\sin(2n\pi+\pi/2)=\sin(\pi/2)=1$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=1$.

知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再构造函数值始终为 0 的序列. 令 $\frac{1}{y_n} = n\pi$, 其中 n 为正整数. 则 $y_n = \dfrac{1}{n\pi}$. 由 $y_n = \dfrac{1}{n\pi}$ 知, 当 $n \to \infty$ 时 $y_n \to 0$. 对应的函数值为

$$g(y_n) = \sin(n\pi) = 0$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = 0$.

我们找到了两条趋近于 0 的路径, 对应的函数值分别趋于 1 和 0. 因此 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 时没有确定的极限. 故 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 不存在.

1.5. **解** 第五题

我们需找到一个 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 恒有 $|x^3 - 8| < 0.1$.

先分析不等式 $|x^3 - 8| < 0.1$.

知乎@余命数

$$|x^3 - 8| = |(x-2)(x^2+2x+4)| = |x-2| \cdot |x^2+2x+4|$$

知乎@余命数 知乎@余命数

我们希望这个乘积小于 0.1.

能直接控制的项是 $|x-2|$. 麻烦在于 $|x^2+2x+4|$ 随 x 变化. 但 x 在 2 附近, 我们预先限制 δ 的范围即可框住 $|x^2+2x+4|$ 的大小.

为限定范围, 先取 $\delta \le 1$. 若 $|x-2| < 1$, 则 $1 < x < 3$. 在此范围内, 我们估计 $|x^2+2x+4|$ 的上界. 由于 $x^2, 2x, 4$ 在此区间均为正的增函数, 故其和在 $x = 3$ 处取最大值.

$$|x^2+2x+4| < 3^2 + 2(3) + 4 = 9 + 6 + 4 = 19$$

知乎@余命数

结合该上界, 不等式变为

$$|x^3 - 8| = |x-2| \cdot |x^2+2x+4| < \delta \cdot 19$$

为了满足 $|x^3 - 8| < 0.1$, 只需要 $19\delta \le 0.1$. 这要求 $\delta \le \dfrac{0.1}{19}$.

于是 δ 需同时满足 $\delta \le 1$ 和 $\delta \le \frac{0.1}{19}$. 为同时满足, 取二者中较小的一个即可. 因为 $\frac{0.1}{19} < 1$, 故可取 $\delta = \frac{0.1}{19}$.

例如, 取 $\delta = \frac{0.1}{19} \approx 0.00526$. 这是一个满足条件的具体正数.

1.6. **解** 第六题

知乎@余命数

我们采用反证法. 假设极限存在但不唯一, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$, 其中 $L_1 \ne L_2$.

由 $L_1 \ne L_2$ 知, $|L_1 - L_2|$ 是一个正数. 选取 $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$. 由 $|L_1 - L_2| > 0$ 知 $\varepsilon > 0$.

由极限的定义可知, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, 所以对上述 ε, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_2$,所以对同一个 ε,也存在 $\delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x)-L_2|<\varepsilon$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 这是一个正数. 当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,上述两个关于 $f(x)$ 的不等式将同时成立.

对于这样的 x,我们考察 $|L_1-L_2|$,并拆项.

$$\begin{aligned}|L_1-L_2| &= |(L_1-f(x))+(f(x)-L_2)|\\ &\le |L_1-f(x)|+|f(x)-L_2| \quad (\text{三角不等式})\\ &= |f(x)-L_1|+|f(x)-L_2|\\ &< \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

将 $\varepsilon=\dfrac{|L_1-L_2|}{2}$ 代入上式,得到

$$|L_1-L_2|<2\cdot\frac{|L_1-L_2|}{2}=|L_1-L_2|$$

我们得到一个严格的不等式 $|L_1-L_2|<|L_1-L_2|$. 这个矛盾源于最初假设 $L_1\neq L_2$. 因此该假设必定是错误的.

故必有 $L_1=L_2$. 极限的唯一性得证.

1.7. 解 第七题

按 $\varepsilon-\delta$ 定义,我们需对任意 $\varepsilon>0$ 找到 $\delta>0$,使当 $0<|x|<\delta$ 时恒有 $|x\sin\frac{1}{x}|<\varepsilon$. 我们对振荡因子 $\sin\frac{1}{x}$ 用一致界 $|\sin u|\le 1$ 放缩,把估计归结为 $|x|$.

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|\cdot 1=|x|.$$

故只要保证 $|x|<\varepsilon$ 即可,这给出 δ 的直接选取.

对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,由 $\varepsilon>0$ 知 $\delta>0$. 当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|<\varepsilon.$$

由定义,$\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

1.8. 解 第八题

如果 $f(x)$ 的极限为正数,那么它在 c 的某个去心邻域内恒为正.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

已知 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ 且 $L > 0$. 由 $\varepsilon - \delta$ 定义, 对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - c| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - L| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$, 则相应存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - c| < \delta$ 时

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}.$$

将该绝对值不等式展开并在两边同加 L、化简, 得

$$\begin{aligned} -\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2} &\iff L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2} \quad \text{(两边加 } L\text{)} \\ &\iff \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

知乎@余命数

由其左半部分得 $f(x) > \dfrac{L}{2}$. 因 $L > 0$, $\dfrac{L}{2}$ 亦为正数, 故对所有满足 $0 < |x - c| < \delta$ 的 x 都有 $f(x) > 0$.

因此存在正数 δ, 使在 c 的去心邻域 $U^{\circ}(c, \delta)$ 内 $f(x)$ 恒为正. 证毕.

1.9. **解** 先题

设 x_0 为定义域内任意正实数. 需计算曲线在点 $P(x_0, \sqrt{x_0})$ 处的切线斜率.

根据切线斜率的定义, 我们考察连接点 P 与邻近动点 $Q(x_0 + \Delta x, \sqrt{x_0 + \Delta x})$ 的割线斜率, 并令 $\Delta x \to 0$.

$$k_{PQ} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

知乎@余命数

此为 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 为消去不定性, 我们对分子乘以共轭表达式

$$\begin{aligned} k_{PQ} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \\ &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \end{aligned}$$

当 $\Delta x \neq 0$ 时约去公因子 Δx, 得 $k_{PQ} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$. 令 $\Delta x \to 0$, 由 $\sqrt{x}$ 在 x_0 处的连续性(根函数在正数处连续), 得

$$k_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + 0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

此结论对于任意 $x_0 > 0$ 均成立. 证毕.

1.10. **解** 再题

所求切线的切点位于曲线外, 因此我们先设切点为曲线上的点 $P(x_0, x_0^2)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

曲线 $y=x^2$ 在点 P 处的切线斜率为 $2x_0$. 于是过点 P 的切线方程为

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$$

整理得

$$y=2x_0x-x_0^2$$

知乎@余命数

此切线过点 $A(1,-3)$, 于是点 A 的坐标满足该方程

知乎@余命数

$$-3=2x_0(1)-x_0^2$$

得到关于 x_0 的一个二次方程

$$x_0^2-2x_0-3=0$$ 知乎@余命数

因式分解得 $(x_0-3)(x_0+1)=0$, 解得 $x_0=3$ 或 $x_0=-1$.

即存在两条满足条件的切线.

当 $x_0=3$ 时, 切点为 $(3,9)$, 切线斜率为 $2(3)=6$. 切线方程为

$$y-9=6(x-3)\quad 即\quad y=6x-9$$

当 $x_0=-1$ 时, 切点为 $(-1,1)$, 切线斜率为 $2(-1)=-2$. 切线方程为

$$y-1=-2(x-(-1))\quad 即\quad y=-2x-1$$

知乎@余命数

故所求的切线方程为 $y=6x-9$ 与 $y=-2x-1$.

1.11. **解** 接着题

函数 $h(x)=|x^2-4|$ 可写为分段函数

$$h(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\le -2\text{ 或}x\ge 2\\ -(x^2-4), & -2<x<2\end{cases}$$

切线存在的充分必要条件是定义切线斜率的极限存在. 这要求割线斜率的左、右极限均存在且相等. 我们需在点 $x=2$ 处分别考察其左、右两侧割线斜率的极限, 其中分子里的 $h(2)=|2^2-4|=0$.

知乎@余命数

从右侧考察, 当 $x\to 2^+$ 时, $x>2$, 此时 $h(x)=x^2-4$.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

从左侧考察, 当 $x \to 2^-$ 时, $x < 2$, 此时 $h(x) = -(x^2-4)$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x^2-4)-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$$

知乎@余命数

由于左、右极限不相等 ($4 \neq -4$), 因此函数在点 $x = 2$ 处割线斜率的极限 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2}$ 不存在.

所以函数 $h(x) = |x^2-4|$ 在点 $x = 2$ 处不存在切线. 其代数原因为割线斜率的左、右极限不一致; 几何原因为该点是一个尖点, 曲线在此处方向发生剧烈转折, 无法用唯一的直线进行线性近似.

1.12. **解** 最后题

两条曲线在某点相切, 要求它们在该点有共同的函数值和切线斜率. 设切点为 $P(x_0, y_0), x_0 > 0$.

知乎@余命数

函数值相等给出 $ax_0^2 = \ln x_0 \quad (1)$. 切线斜率亦须相等. 对于 $y = ax^2$, 在 x_0 处的斜率为

$$k_1 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a(x_0+\Delta x)^2 - ax_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a(2x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} a(2x_0+\Delta x) = 2ax_0$$

对于 $y = \ln x$, 在 x_0 处的斜率为(此过程依赖重要极限 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$)

知乎@余命数

$$k_2 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x_0+\Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x_0+\Delta x}{x_0}\right)$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) = \ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x_0}}\right]$$
$$= \ln(e^{1/x_0}) = \frac{1}{x_0}$$

令斜率相等, 则 $2ax_0 = \frac{1}{x_0} \quad (2)$.

从 (2) 解得 $a = \frac{1}{2x_0^2}$. 代入 (1) 得

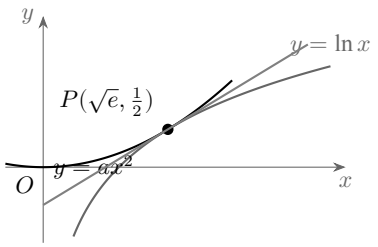
知乎@余命数

$$\left(\frac{1}{2x_0^2}\right) x_0^2 = \ln x_0 \implies \frac{1}{2} = \ln x_0$$

解得切点横坐标 $x_0 = e^{1/2} = \sqrt{e}$. 将 x_0 代回 a 的表达式: $a = \frac{1}{2(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$. 故所求参数 $a = \frac{1}{2e}$.

1.13. **解** 第五题

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



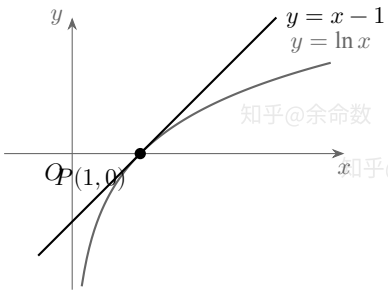
若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$, 则在切点处二者斜率相等. 直线 $y=x+b$ 的斜率恒为 1. 曲线 $y=\ln x$ 在点 x_0 处的斜率已在上一题中通过极限定义求得, 为 $1/x_0$. 令两斜率相等, 得

$$1=\frac{1}{x_0} \implies x_0=1$$

由此确定切点的横坐标为 $x_0=1$. 在该点两曲线的函数值相等, 因此

$$y_0=1+b \quad \text{且} \quad y_0=\ln(1)=0$$

联立可得 $1+b=0$, 解得 $b=-1$. 故当 $b=-1$ 时, 直线 $y=x-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处相切.



1.14. **解** 第六题

法线是与切线在切点处相互垂直的直线. 设切点为 $P(x_0,x_0^2-1)$. 我们先计算抛物线 $y=x^2-1$ 在点 P 处的切线斜率

$$k_{\text{tan}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{((x_0+\Delta x)^2-1)-(x_0^2-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0$$

当 $x_0\neq 0$ 时, 法线的斜率 $k_{\text{norm}}=-\dfrac{1}{k_{\text{tan}}}=-\dfrac{1}{2x_0}$. 过点 P 的法线方程为

$$y-(x_0^2-1)=-\frac{1}{2x_0}(x-x_0)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此法线通过原点 $(0,0)$, 于是其坐标满足

$$0-(x_0^2-1)=-\frac{1}{2x_0}(0-x_0) \implies -(x_0^2-1)=\frac{1}{2}$$

解得 $x_0^2=1/2$, 即 $x_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 对应的点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$ 和 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$.

当 $x_0=0$ 时, 切线斜率为 0(水平线), 法线为竖直直线 $x=0$. 此法线通过原点. 此时切点为 $(0,-1)$.

故存在三个满足条件的点: $(0,-1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$ 和 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$.

1.15. 解 第七题

我们从切线的角度证明这个不等式. 先验证直线 $y=x+1$ 是曲线 $y=e^x$ 的切线. 在 $x=0$ 处, $e^0=1$, 直线 $y=0+1=1$, 故点 $(0,1)$ 是公共点. 曲线 $y=e^x$ 在 $x=0$ 的切线斜率(依赖重要极限 $\lim\limits_{h\to0}(e^h-1)/h=1$)为

$$k=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{0+\Delta x}-e^0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$$

直线 $y=x+1$ 的斜率也是 1. 故 $y=x+1$ 是 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 的切线.

为了证明不等式, 我们构造辅助函数 $g(x)=e^x-(x+1)$. 原不等式等价于证明 $g(x)\geq0$ 恒成立. 我们考察函数 $g(x)$ 在任意点 x 处的斜率

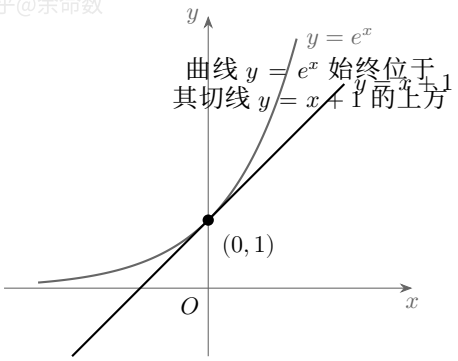
$$\begin{aligned}
k_g(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(e^{x+\Delta x}-(x+\Delta x+1))-(e^x-(x+1))}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)-\Delta x}{\Delta x}\\
&=e^x\left(\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)-\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\\
&=e^x\cdot1-1=e^x-1
\end{aligned}$$

令此斜率为 0, 即 $e^x-1=0$, 解得 $x=0$. 当 $x<0$ 时, $e^x<1$, 故斜率 $k_g(x)<0$, 函数 $g(x)$ 在此区间减小. 当 $x>0$ 时, $e^x>1$, 故斜率 $k_g(x)>0$, 函数 $g(x)$ 在此区间增加.

因此, 函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得唯一的全局最小值. 该最小值为 $g(0)=e^0-(0+1)=1-1=0$. 函数的最小值是 0, 于是对任意实数 x, 都有 $g(x)\geq0$, 即 $e^x\geq x+1$. 证毕.

1.16. 解 第八题

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



设 $P(x_0, 1/x_0)$ 为双曲线上 $x > 0$ 分支的任意一点. 我们先计算曲线 $y = 1/x$ 在点 P 处的切线斜率, 得

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2}$$

过点 P 的切线方程为

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

令 $x = 0$, 得 y 轴截距 $y = \frac{2}{x_0}$. 截点为 $A(0, 2/x_0)$. 令 $y = 0$, 得 x 轴截距 $x = 2x_0$. 截点为 $B(2x_0, 0)$.

所求三角形是由原点 $O(0, 0)$、点 A 和点 B 构成的直角三角形. 其面积为

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{2}{x_0}\right| \cdot |2x_0|$$

由于 $x_0 > 0$(第一象限),

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x_0} \cdot 2x_0 = 2$$

此面积值是一个常数 2, 与切点 x_0 的选取无关. 证毕.

1.17. **解** 第 1 题

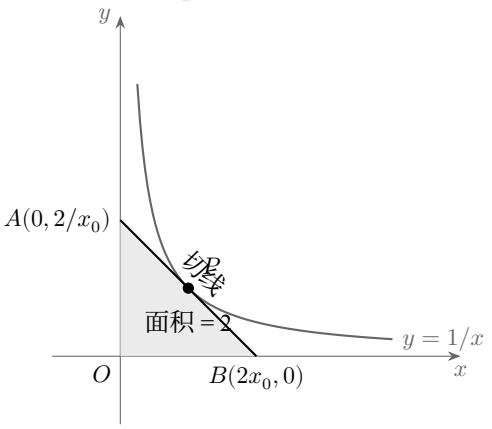
当 $x \to 2$ 时, 分母 $x^2 - 4 \to 0$, 分子 $x^3 - x^2 - x - 2 \to 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$.

这是一个 $\frac{0}{0}$ 型不定式极限. 因此分子与分母都含有因子 $(x - 2)$, 需用因式分解消去这个不定形式.

分母的因式分解是直接的.$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

知乎@余命数 知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数



对于分子, 由于 $x=2$ 是其根, 由多项式除法或综合除法得 $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$. 于是

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+2)}.$$

知乎@余命数

当 $x\to 2$ 时 $x\neq 2$, 故可约去公因子 $(x-2)$, 得到 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$. 此时分母的极限不再为零, 直接代入 $x=2$ 得 $\dfrac{2^2+2+1}{2+2}=\dfrac{7}{4}$.

1.18. **解** 第 2 题

当 $x\to 1$ 时, 这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 分子与分母都含有无理式, 需分别进行有理化.

对于分子的平方根, 我们乘以它的共轭表达式 $\sqrt{x+3}+2$.

对于分母的立方根, 我们利用立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, 乘以 $(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}&=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right]\\&=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+3)-4}{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}\right]\\&=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}\right]\end{aligned}$$

约去因子 $(x-1)$ 后, 直接代入 $x=1$ 求值, 得到

$$\frac{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1+1+1}{2+2}=\frac{3}{4}$$

1.19. **解** 第 3 题

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

当 $x \to +\infty$ 时, 这是一个 $\infty - \infty$ 型不定式. 我们用分子有理化来转化它.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}) \\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} \\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+ax)-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} \\
&\quad=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-b)x}{\sqrt{x^2(1+a/x)}+\sqrt{x^2(1+b/x)}}
\end{aligned}$$

由于 $x \to +\infty$, x 为正, 故 $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$\begin{aligned}
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-b)x}{x\sqrt{1+a/x}+x\sqrt{1+b/x}} \\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+a/x}+\sqrt{1+b/x}}
\end{aligned}$$

当 $x \to +\infty$ 时, $a/x \to 0$ 且 $b/x \to 0$.

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{a-b}{2}$$

1.20. **解** 第 4 题

这里 $x \to -\infty$, 因此 x 是绝对值很大的负数.

当 $x < 0$ 时, 根据绝对值的定义, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

我们将分子与分母同时除以 x.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x}$$

由于 $x < 0$, $|x| = -x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

当 $x \to -\infty$ 时, $1/x^2 \to 0$.

$$-\sqrt{1+0}=-1$$

1.21. **解** 第 5 题

当 $x \to 2$ 时, 分母 $x - 2 \to 0$.

由于极限值为有限数 5, 分子在 $x \to 2$ 时也必须趋于 0, 否则整个分式的极限将是无穷大.

于是第一个条件是 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于多项式函数是连续的, 直接代入可得

$$2^2 + a(2) + b = 0 \implies 4 + 2a + b = 0 \quad (1)$$

由这个条件解出 $b = -2a - 4$. 将它代回原极限表达式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x - 2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 4) + a(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2) + a(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} (x + 2 + a)\end{aligned}$$

这个极限的值为 $2 + 2 + a = 4 + a$. 根据题设, 它等于 5.

$$4 + a = 5 \implies a = 1$$

知乎@余命数

将 $a = 1$ 代入 (1) 式, 得到 $4 + 2(1) + b = 0 \implies b = -6$.

因此所求常数为 $a = 1, b = -6$.

1.22. **解** 第 6 题

函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处连续的定义是 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

根据函数的定义, $f(1) = k$. 我们先计算 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$$

这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 为了利用重要极限 $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, 我们进行变量代换.

令 $u = x - 1$, 则 $x = u + 1$. 当 $x \to 1$ 时, $u \to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi(u + 1))}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u + \pi)}{u} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{-\sin(\pi u)}{u}\end{aligned}$$

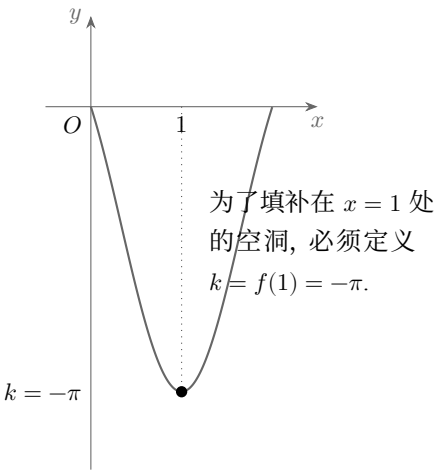
为了凑出重要极限的形式, 我们对分母进行调整.

$$\lim_{u\to 0} \left(-\pi \cdot \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) = -\pi \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = -\pi \cdot 1 = -\pi$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\pi$.

要使函数连续, 必须有 $k = -\pi$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

1.23. **解** 第 7 题

由于绝对值函数的存在, 我们分别考察 x 从 1 的左侧和右侧趋近时的极限.

当 $x\to 1^+$ 时, $x>1$, 故 $x-1>0$, 此时 $|x-1|=x-1$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

当 $x\to 1^-$ 时, $x<1$, 故 $x-1<0$, 此时 $|x-1|=-(x-1)$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

由于左极限与右极限不相等,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

根据极限存在的充要条件, 该极限不存在.

1.24. **解** 第 8 题

我们先对括号内的表达式通分, 把它化为单一的有理分式.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b&=\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}\\&=\frac{x^2+1-(ax^2+ax+bx+b)}{x+1}\\&=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}\end{aligned}$$

我们要求这个分式在 $x\to+\infty$ 时的极限为 0.

这是有理分式在无穷远处的极限问题, 分母的最高次幂为 1.

要使极限为 0, 分子的次数必须严格小于分母的次数.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此分子中 x^2 的系数必须为零.

$$1-a=0 \implies a=1$$

当 $a=1$ 时, 表达式变为 $\dfrac{-(1+b)x+(1-b)}{x+1}$.

此时分子与分母的最高次幂都是 1. 根据有理函数在无穷远处的极限法则, 其极限等于最高次项系数之比.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-(1+b)x+(1-b)}{x+1}=\frac{-(1+b)}{1}=-1-b$$

根据题设, 此极限为 0.

$$-1-b=0 \implies b=-1$$

因此所求常数为 $a=1, b=-1$.

1.25. **解** 第 9 题

知乎@余命数

我们求这个极限时用到第二个重要极限 $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{1/u}=e$ 及其推论.

利用对数与指数的互逆关系, 我们把表达式重写为

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x}$$

这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式.

通过如下恒等变形, 我们凑出已知的极限形式, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}\cdot\frac{a\ln(1+x)}{x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}a\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\end{aligned}$$

对于第一个极限, 令 $u=a\ln(1+x)$. 当 $x\to0$ 时, $u\to0$, 因此该极限为 $\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1$.

对于第二个极限,

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}a\frac{\ln(1+x)}{x}&=a\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{1/x}=a\ln\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}\right)\\&=a\ln(e)=a\cdot1=a\end{aligned}$$

因此, 原极限的值为 $1\cdot a=a$.

1.26. **解** 第 10 题

这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式, 涉及三角函数. 我们利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

先对分子进行三角恒等变形.

$$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\sin x\frac{1-\cos x}{\cos x}$$

利用恒等式 $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

$$\tan x-\sin x=\sin x\frac{2\sin^2(x/2)}{\cos x}$$

代回原极限表达式, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2(x/2)}{x^3\cos x}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{\cos x}\cdot\frac{\sin^2(x/2)}{x^2}\right)\\&=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{2}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/2)}{x^2}\right)\end{aligned}$$

第一个极限为 1, 第二个极限为 $\frac{2}{1}=2$.

对于第三个极限, 我们凑形式如下.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{1}{4}$$

将各部分结果相乘, 得到

$$\text{原极限}=1\cdot2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

1.27. **解** 第 11 题

函数 $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ 的定义域由 $x^2+3x\geq0$ 给出,即 $x\in(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$.

垂直渐近线. 函数在其定义域内连续, 因此不存在垂直渐近线.

水平或斜渐近线. 我们分别考察 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况.

当 $x\to+\infty$ 时. 我们先计算斜渐近线 $y=mx+b$ 的斜率 m, 得到

$$\begin{aligned}m&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+3/x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+3/x}}{x}=1\end{aligned}$$

接着计算截距 b, 得到

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+3/x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} = \frac{3}{2}$$

因此, 当 $x \to +\infty$ 时, 函数有一条斜渐近线 $y = x + \frac{3}{2}$.

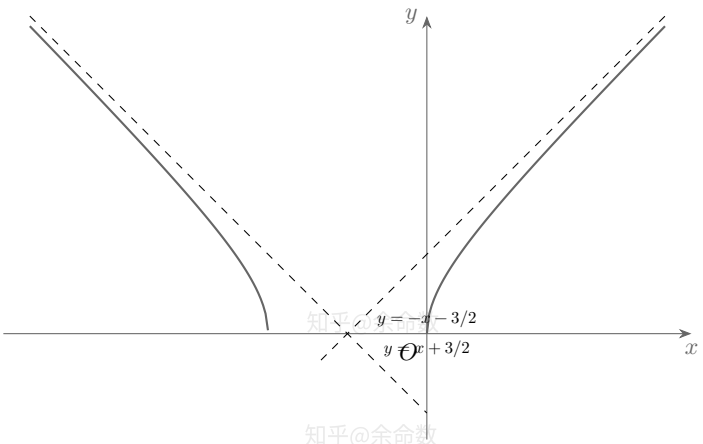
当 $x \to -\infty$ 时.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+3/x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+3/x}}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x} - (-1)x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x} + x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2(1+3/x)}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{|x|\sqrt{1+3/x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{1+3/x}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-\sqrt{1+3/x}-1} = \frac{3}{-1-1} = -\frac{3}{2}$$

因此, 当 $x \to -\infty$ 时, 函数有一条斜渐近线 $y = -x - \frac{3}{2}$.

故函数有两条渐近线.$y = x + \frac{3}{2}$ 和 $y = -x - \frac{3}{2}$.



1.28. **解** 第 12 题

我们计算 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x^2)}{\sin^2 x}$.

这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 我们通过代数变形, 凑出已知的极限形式 $\lim\limits_{u\to0} \frac{f(u)}{u} = L$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

我们把表达式改写为

$$\frac{f(x^2)}{\sin^2 x} = \frac{f(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{f(x^2)}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

根据极限的乘法法则, 我们可以分别计算每一部分的极限.

对于第一部分 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x^2}$, 我们作变量代换. 令 $u = x^2$. 当 $x \to 0$ 时, 有 $u \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = L$$

对于第二部分 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2$, 我们利用重要极限.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1$$

将两部分极限值相乘, 得到最终结果.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{\sin^2 x} = L \cdot 1 = L$$

1.29. **解** 第 13 题

函数 $f(x)$ 用极限定义, 其具体表达式依赖于 x 的取值. 我们分情况讨论 $|x|$ 与 1 的关系.

当 $|x| < 1$ 时. 当 $n \to \infty$ 时, $x^{2n} \to 0$ 且 $x^{2n-1} \to 0$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + ax}{x^{2n} + 1} = \frac{0 + ax}{0 + 1} = ax$$

当 $|x| > 1$ 时.$x^{2n} \to \infty$. 我们将分子与分母同除以最高次项 x^{2n}.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}} + \frac{ax}{x^{2n}}}{\frac{x^{2n}}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{ax}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{\frac{1}{x} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{x}$$

当 $x = 1$ 时,

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^{2n-1} + a(1)}{1^{2n} + 1} = \frac{1 + a}{1 + 1} = \frac{1 + a}{2}$$

当 $x = -1$ 时,

$$f(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n-1} + a(-1)}{(-1)^{2n} + 1} = \frac{-1 - a}{1 + 1} = \frac{-1 - a}{2}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是得到 $f(x)$ 的分段表达式.

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x<-1\\ (-1-a)/2, & x=-1\\ ax, & -1<x<1\\ (1+a)/2, & x=1\\ 1/x, & x>1\end{cases}$$

要使 $f(x)$ 为连续函数, $f(x)$ 必须在分界点 $x=1$ 和 $x=-1$ 处连续.

在 $x=1$ 处连续, 要求左极限、右极限与函数值相等.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax)=a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1/x)=1$$

$$f(1)=(1+a)/2$$

因此必须有 $a=1=(1+a)/2$. 解得 $a=1$.

在 $x=-1$ 处连续, 要求左极限、右极限与函数值相等.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1/x)=-1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(ax)=-a$$

$$f(-1)=(-1-a)/2$$

因此必须有 $-1=-a=(-1-a)/2$. 解得 $a=1$.

两个条件给出相同的 a 值. 因此当 $a=1$ 时, $f(x)$ 是连续函数.

1.30. **解** 第 14 题

我们用零点存在性定理证明.

设 $f(x)=x^3-3x+1$. 这是多项式函数, 在实数域上连续, 特别地在闭区间 $[0,1]$ 上连续. 其端点值为

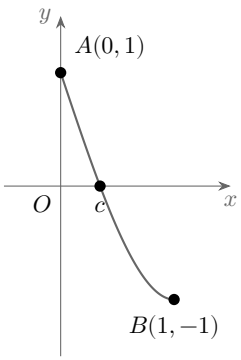
$$f(0)=0^3-3(0)+1=1,\qquad f(1)=1^3-3(1)+1=-1,$$

二者异号($f(0)>0$ 且 $f(1)<0$).

根据零点存在性定理, 若一个函数在闭区间上连续, 且在端点处函数值异号, 则其图像必在该开区间内至少穿越 x 轴一次. 因此在开区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实数 c, 使得 $f(c)=0$.

于是方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实数根.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

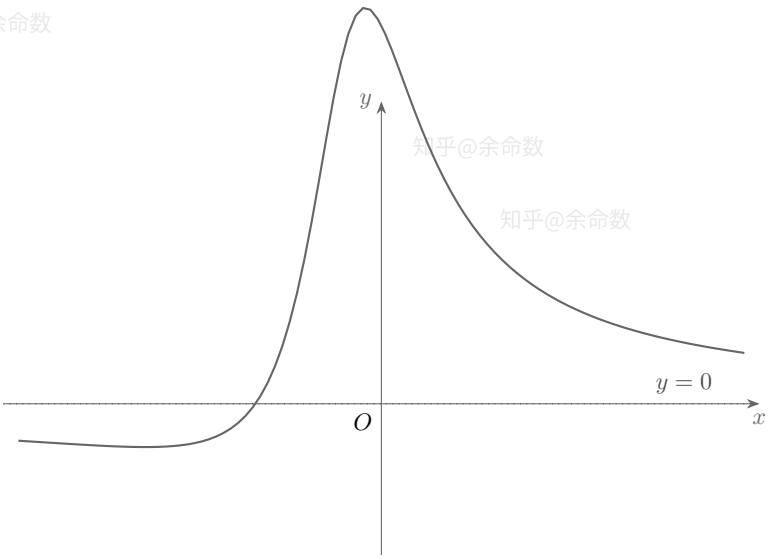


1.31. **解** 第 1 题

函数 $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2+x+1}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,因为分母 $x^2+x+1=(x+1/2)^2+3/4>0$ 恒成立. 考察 $x\to+\infty$ 时的极限. 分子的最高次幂为 1, 分母的最高次幂为 2. 由于分子次数严格小于分母次数, 故极限为 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3/x+5/x^2}{1+1/x+1/x^2}=\frac{0+0}{1+0+0}=0$$

即直线 $y=0$, 即 x 轴是函数图像的水平渐近线.



1.32. **解** 第 2 题

函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2-1}$ 的定义域为 $x\neq\pm1$.

水平渐近线: 考察 $x\to+\infty$. 分子与分母的最高次幂均为 2. 极限值为最高次项系数之比.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3/x}{1-1/x^2}=2$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故 $y=2$ 为水平渐近线.

垂直渐近线: 考察分母为零的点 $x=\pm1$.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x(2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1(-1)}{0^+\cdot2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x(2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1(-1)}{0^-\cdot2}=+\infty$$

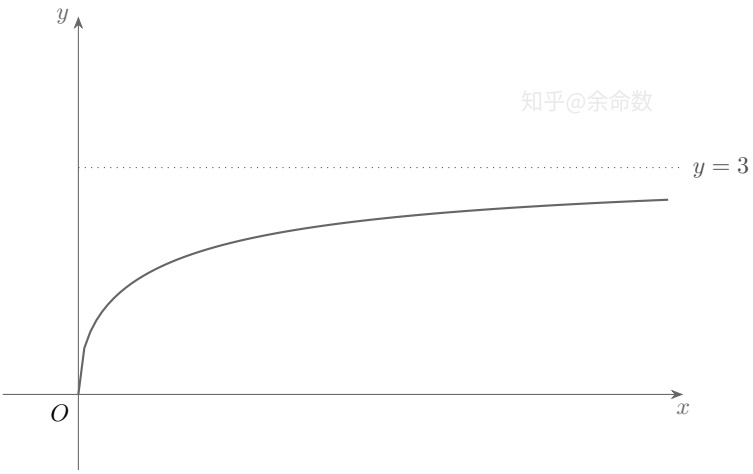
故 $x=1$ 为垂直渐近线. 同理可分析 $x=-1$ 亦为垂直渐近线.

1.33. **解** 第 3 题

当 $x\to+\infty$ 时, 这是一个 $\infty-\infty$ 型的不定式. 采用分子有理化的方法.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)(\sqrt{x^2+6x}+x)}{\sqrt{x^2+6x}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+6x)-x^2}{\sqrt{x^2(1+6/x)}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x\sqrt{1+6/x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{1+6/x}+1}\\&=\frac{6}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{6}{2}=3\end{aligned}$$

此极限的几何意义是, 当 x 趋于正无穷时, 函数 $f(x)$ 的图像无限趋近于直线 $y=3$. 故 $y=3$ 是函数在正无穷方向的水平渐近线.



1.34. **解** 第 4 题

当 $x\to-\infty$ 时, 这依然是 $\infty-\infty$ 型的不定式. 令 $t=-x$, 则当 $x\to-\infty$ 时, $t\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+6x}+x)=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{(-t)^2+6(-t)}+(-t))$$

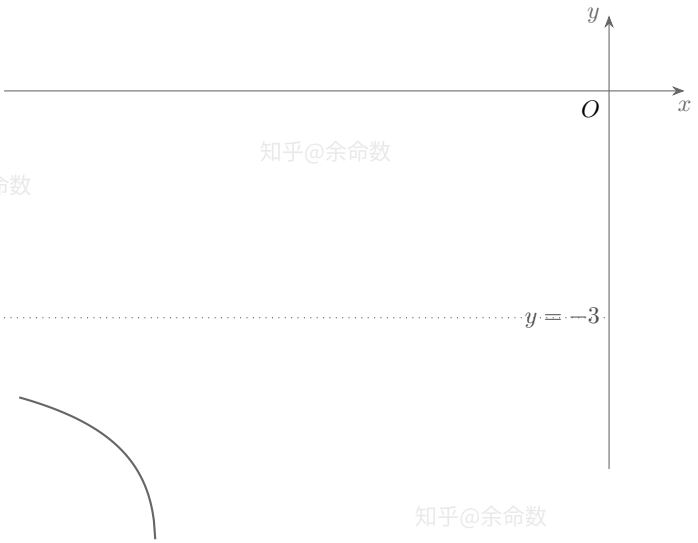
知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= \lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t^2-6t}-t)$$

接着对此 t 的极限表达式进行有理化.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\frac{(t^2-6t)-t^2}{\sqrt{t^2-6t}+t} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{-6t}{\sqrt{t^2(1-6/t)}+t}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{-6t}{t\sqrt{1-6/t}+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{1-6/t}+1}\\ &= \frac{-6}{\sqrt{1-0}+1} = \frac{-6}{2} = -3\end{aligned}$$

此极限的几何意义是，当 x 趋于负无穷时，函数 $f(x)$ 的图像无限趋近于直线 $y=-3$. 故 $y=-3$ 是函数在负无穷方向的水平渐近线.



知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

1.35. **解** 第 5 题

函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 定义域为 $x\neq 1$. **垂直渐近线**: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$. 故 $x=1$ 是垂直渐近线.

斜渐近线：分子次数比分母次数高一，存在斜渐近线 $y=mx+b$. $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$.

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2\end{aligned}$$

故斜渐近线为 $y = x + 2$.

1.36. **解** 第 6 题

函数 $f(x) = \dfrac{x^2 + \cos x}{2x^2 - \sin x}$ 的分子分母中均含有振荡项. 然而, 当 $x \to +\infty$ 时, x^2 是无穷大, 而 $\cos x$ 与 $\sin x$ 均是有界函数. 将分子分母同除以最高次项 x^2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \cos x}{2x^2 - \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x^2}}{2 - \frac{\sin x}{x^2}}$$

根据夹逼定理, 因为 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 有 $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. 当 $x \to +\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\pm\frac{1}{x^2}) = 0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$. 同理 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$. 因此, 原极限为.

$$\frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

函数有水平渐近线 $y = \frac{1}{2}$.

1.37. **解** 第 7 题

知乎@余命数

当 $x \to +\infty$ 时: $e^{-x} \to 0$. 将分子分母同除以 e^x.

知乎@余命数

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

知乎@余命数

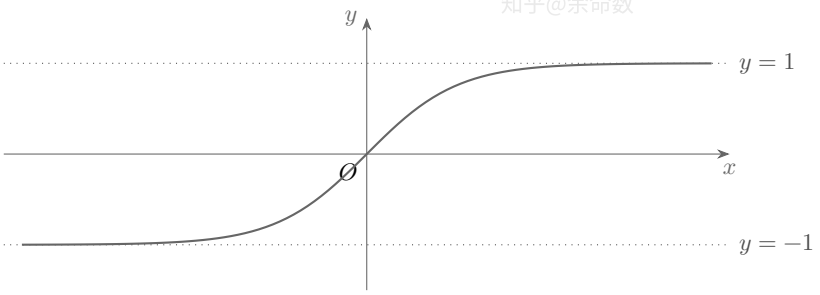
故 $y = 1$ 为正无穷方向的水平渐近线.

当 $x \to -\infty$ 时: $e^x \to 0$. 将分子分母同除以 e^{-x}.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

故 $y = -1$ 为负无穷方向的水平渐近线.

知乎@余命数



1.38. **解** 第 8 题

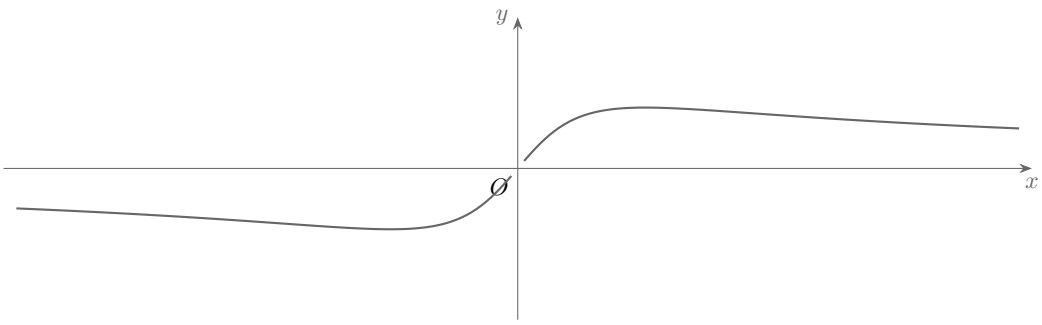
知乎@余命数

函数 $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ 定义域为 $x \neq 0$. 考察 $x \to +\infty$ 时的极限. 这是一个 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 根据函数增长阶梯, 幂函数 x 的增长速度快于对数函数 $\ln(x^2+1)$. 因此, 极限值为 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故 $y=0$ 是函数的水平渐近线.



知乎@余命数

1.39. **解** 第 9 题

考察 $x\to+\infty$ 时的极限, 以确定水平渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1)$$

令 $t=1/x$, 当 $x\to+\infty$ 时, $t\to 0$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^t-1)=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$$

这是一个重要的极限, 其值为 1. 故函数存在水平渐近线 $y=1$.

1.40. **解** 第 10 题

此极限是重要极限 $\lim\limits_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u=e$ 的变形. 可将其重写为.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2\\&=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2\\&=e^2\end{aligned}$$

故函数存在水平渐近线 $y=e^2\approx 7.389$.

1.41. **解** 第 11 题

函数 $f(x)=x+\arctan x$ 的渐近行为在正负无穷方向不同.

当 $x\to+\infty$ **时**: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{\arctan x}{x})=1+0=1$. $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\arctan x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. 故有斜渐近线 $y=x+\frac{\pi}{2}$.

当 $x\to-\infty$ **时**: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=1$. $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\arctan x-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$. 故有斜渐近线 $y=x-\frac{\pi}{2}$.

1.42. **解** 第 12 题

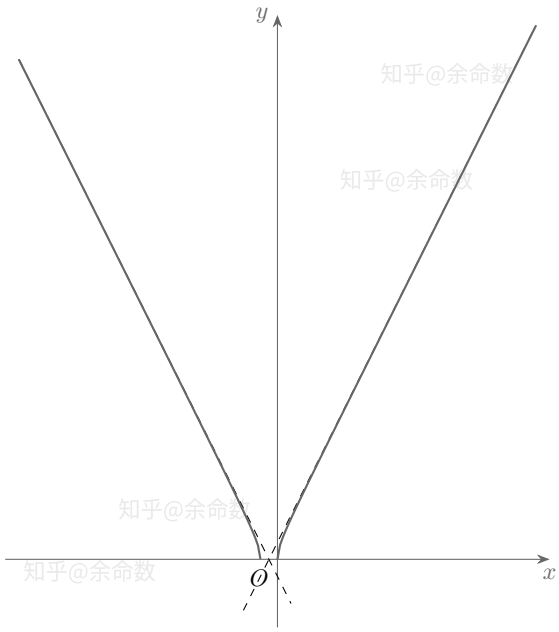
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

函数 $f(x)=\sqrt{4x^2+x}$ 定义域为 $x(4x+1)\geq 0$, 即 $(-\infty,-1/4]\cup[0,\infty)$.

当 $x\to+\infty$ 时: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+1/x}}{x}=\sqrt{4}=2$. $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x(\sqrt{4+1/x}+2)}=\frac{1}{4}$. 故斜渐近线为 $y=2x+\frac{1}{4}$.

当 $x\to-\infty$ 时: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+1/x}}{x}=-2$. $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}+2x)$. 令 $t=-x, t\to+\infty$. $b=\lim\limits_{t\to+\infty}(\sqrt{4t^2-t}-2t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{4t^2-t-4t^2}{\sqrt{4t^2-t}+2t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-t}{t(\sqrt{4-1/t}+2)}=-\frac{1}{4}$. 故斜渐近线为 $y=-2x-\frac{1}{4}$.

知乎@余命数



1.43. **解** 第 13 题

分析极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx}-ax+1\right)=3$. 这是一个 $\infty-\infty$ 型不定式.

首先, 为使极限为一个有限数, 两部分的无穷大必须是同阶的, 且能够相互抵消. $\sqrt{4x^2+bx}\sim\sqrt{4x^2}=2x$(当 $x\to+\infty$). $ax-1\sim ax$. 为使它们能够抵消, 必须有 $ax=2x$, 故 $a=2$.

当 $a=2$ 时, 极限变为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+bx}-(2x-1))=3$. 对此表达式进行有理化.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2+bx)-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+bx}+(2x-1)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+bx-(4x^2-4x+1)}{\sqrt{4x^2+bx}+2x-1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(b+4)x-1}{\sqrt{4x^2+bx}+2x-1}\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这是一个有理分式形式,分子分母的最高次幂均为 1. 其极限为最高次项系数之比.

$$\frac{b+4}{\sqrt{4}+2}=\frac{b+4}{4}$$

根据题设, 此极限为 3.

$$\frac{b+4}{4}=3 \implies b+4=12 \implies b=8$$

知乎@余命数

故所求常数为 $a=2, b=8$.

1.44. **解** 第 14 题

函数表达式依赖于 x 的取值, 需分情况讨论 $|x|$ 与 1 的关系.

当 $|x|<1$ **时**: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$.

$$f(x)=\frac{0+2x}{0+1}=2x$$

当 $|x|>1$ **时**: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$. 将分子分母同除以 x^{2n}.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+2x/x^{2n}}{1+1/x^{2n}}=\frac{x+0}{1+0}=x$$

当 $x=1$ **时**:

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}+2(1)}{1^{2n}+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

当 $x=-1$ **时**:

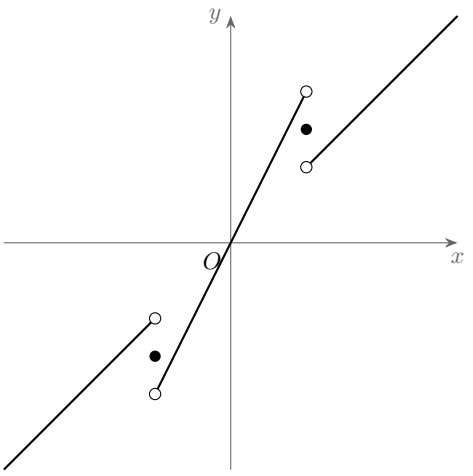
$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}+2(-1)}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1-2}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

故 $f(x)$ 的分段表达式为.

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<-1\\ -3/2, & x=-1\\ 2x, & -1<x<1\\ 3/2, & x=1\\ x, & x>1\end{cases}$$

间断点为 $x=1$ 和 $x=-1$.

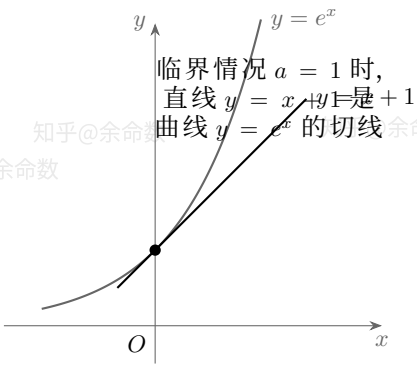
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

1.45. **解** 先题

原不等式等价于 $e^x-ax-1\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立. 构造 $g(x)=e^x-ax-1$, 则 $g(0)=0$, 属端点值为零的恒成立问题. $g'(x)=e^x-a$, $g''(x)=e^x>0$ 于 $(0,+\infty)$, 故 g' 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增, 端点分析法适用. 于是 $g\geq 0$ 恒成立当且仅当 $g'(0)\geq 0$, 即 $1-a\geq 0$, $a\leq 1$. 所求范围为 $(-\infty,1]$.



1.46. **解** 再题

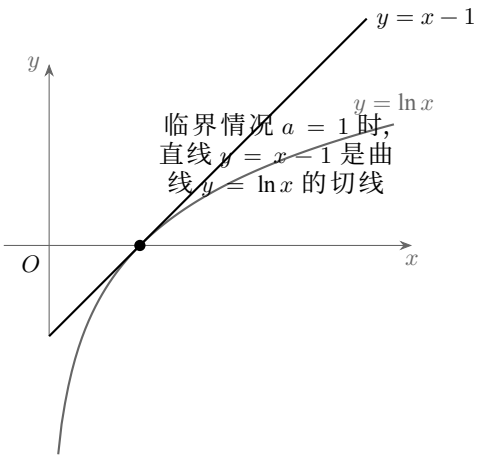
原不等式等价于 $a(x-1)-\ln x\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立. 构造 $g(x)=a(x-1)-\ln x$, 则 $g(1)=0$. $g'(x)=a-\frac{1}{x}$, $g''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ 于 $(1,+\infty)$, 故 g' 严格递增, 端点分析法适用. $g\geq 0$ 恒成立当且仅当 $g'(1)=a-1\geq 0$, 即 $a\geq 1$. 所求范围为 $[1,+\infty)$.

1.47. **解** 接着题

原不等式等价于 $ax-\sin x\geq 0$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立. 构造 $g(x)=ax-\sin x$, 则 $g(0)=0$. $g'(x)=a-\cos x$, $g''(x)=\sin x>0$ 于 $(0,\frac{\pi}{2})$, 故 g' 严格递增, 端点分析法适用. $g\geq 0$ 恒成立当且仅当 $g'(0)=a-1\geq 0$, 即 $a\geq 1$. 参数分离亦可验证: $x>0$ 时 $a\geq\frac{\sin x}{x}$, 而 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上递减, 上确界为 1, 故同样得 $a\geq 1$. 所求范围为 $[1,+\infty)$.

1.48. **解** 最后题

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

不等式 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 取 $g = f$, 则 $g(0) = 0$、$g'(x) = e^x - x - a$、$g''(x) = e^x - 1 > 0$ 于 $(0, +\infty)$, 故 g' 严格递增, 端点分析法适用. $g \geq 0$ 恒成立当且仅当 $g'(0) = 1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$. 所求范围为 $(-\infty, 1]$.

1.49. **解** 第五题

原不等式 $x^3 - 3x^2 + ax \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 构造 $g(x) = x^3 - 3x^2 + ax$, 则 $g(0) = 0$. $g'(x) = 3x^2 - 6x + a$, $g''(x) = 6(x - 1)$, 在 $(0, 1)$ 上 $g'' < 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $g'' > 0$, 故 g' 不单调, **端点分析法失效**. $g'(0) = a \geq 0$ 仅为必要条件. 例如 $a = 2$ 时 $g(x) = x(x - 1)(x - 2)$, 在 $(1, 2)$ 上取负, 说明条件不充分.

因 $x \geq 0$, 原不等式等价于 $h(x) = x^2 - 3x + a \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. h 开口向上, 对称轴 $x = \frac{3}{2}$ 落在区间内, 最小值在顶点处取得,

$$h\Big(\frac{3}{2}\Big) = a - \frac{9}{4}.$$

需 $a - \frac{9}{4} \geq 0$, 即 $a \geq \frac{9}{4}$.

所求实数 a 的取值范围是 $[\frac{9}{4}, +\infty)$.

1.50. **解** 第六题

原不等式等价于 $e^x + ax^2 - x - \frac{1}{2}x^3 - 1 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 构造 $g(x) = e^x + ax^2 - x - \frac{1}{2}x^3 - 1$, 则 $g(0) = 0$, $g'(x) = e^x + 2ax - 1 - \frac{3}{2}x^2$, 且 $g'(0) = 0$ 对一切 a 成立, 必要条件不给出关于 a 的约束. 当 $x > 0$ 时, 不等式等价于

$$a \geq A(x) := \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^3 - e^x}{x^2},$$

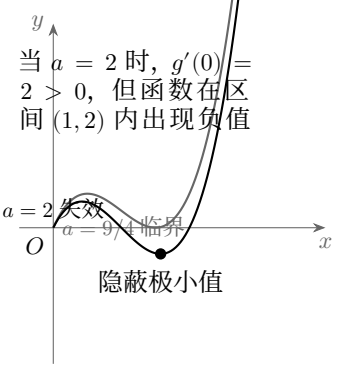
故 a 须不小于 A 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

对 $A(x)$ 求导, 得

$$A'(x) = \frac{N(x)}{x^3}, \qquad N(x) = (2 - x)e^x + \frac{1}{2}x^3 - x - 2.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数



知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

继续求导得 知乎@余命数

$$N'(x) = (1-x)e^x + \frac{3}{2}x^2 - 1, \qquad N''(x) = x(3-e^x).$$

因此 $N''(x) > 0$ 在 $(0, \ln 3)$ 上成立, $N''(x) < 0$ 在 $(\ln 3, +\infty)$ 上成立, 所以 $N'(x)$ 先增后减. 又 $N'(0) = 0$、$N'(1) = \frac{1}{2} > 0$、$N'(2) = 5 - e^2 < 0$, 故 $N'(x)$ 在 $(\ln 3, 2)$ 内有唯一零点. 于是 $N(x)$ 先增后减. 结合 $N(0) = 0$ 与 $N(2) = 0$, 可得 $N(x) > 0$ 在 $(0, 2)$ 上成立, $N(x) < 0$ 在 $(2, +\infty)$ 上成立.

所以 $A(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减, 最大值为

$$A(2) = \frac{7 - e^2}{4}.$$

综合充分性与必要性, 所求 a 的取值范围是 $[\frac{7-e^2}{4}, +\infty)$.

知乎@余命数

第 3 章微分方程初步

3.1. **解** 设 $x(t) = x_0 e^{-kt}$.$x(8) = 0.3x_0$ 给出 $8k = \ln\frac{10}{3}$. 半衰期 $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{8\ln 2}{\ln(10/3)} \approx \frac{8\times 0.6931}{1.2040} \approx 4.6$ 天.

3.2. **解** 温差 $\theta = T - 4$ 按指数衰减.$\theta(0) = 21$, $\theta(40) = 6$, 故 $e^{-40k} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. 降到 6 °C 即 $\theta = 2$, 需 $e^{-kt} = \frac{2}{21}$, 于是 $t = 40\,\frac{\ln(21/2)}{\ln(7/2)} \approx 40 \times \frac{2.3499}{1.2528} \approx 75.0$ 分钟, 还需约 35 分钟.

3.3. **解** 由式 (3-11), $T \propto \sqrt{a}$, 故 $\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$. 摆长应变为原来的 2.25 倍.

知乎@余命数

PROJECT AKARI

AKARI

内容简介

《中学数学之旅》把初等数学当作一个完整的体系，从初中运算的起点一路讲到大学数学的门口. 全书五卷按数学自身的生长顺序编排，从代数语言与函数出发，经周期、离散与随机，走过几何主干，拧成极限、导数与积分的分析主干，最后扩到复数、空间与线性结构. 每条结论尽量给出推导；高考与竞赛的主干题材全部覆盖，取舍只看一条，它在数学结构里是否承重.

无论你是准备升学的学生、带学生的老师，还是想把数学重新学一遍的人，这本书都用得上.

本系列分卷

第 1 卷：预备知识、集合与映射、函数、函数方程、不等式
第 2 卷：三角函数、数列、统计、计数原理、概率
第 3 卷：平面向量、解三角形、解析几何、极坐标与参数方程、射影几何
第 4 卷：极限与导数、简单的积分、微分方程初步、数学思想浅谈
第 5 卷：复数、立体几何、矩阵与行列式、连分数、常数 e、π 与 γ、无穷乘积

公开版 • 10 月 7 日

Project Akari