PROJECT AKARI

AKARI

知乎 @ 余命数（水无月零）

中学数学之旅

第五卷·扩展与线性结构

Volume V · EXTENSIONS

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

公开版 · 10 月 5 日

Project Akari

余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

中学数学之旅

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

rikka.moe

知乎@余命数

余命数 (Midnight Forever)
知乎 @ 余命数
https://rikka.moe

知乎@余命数

中学数学之旅
An Excursion through Secondary School Mathematics
最后更新：October 7, 2026

知乎@余命数

© 2026 余命数
保留所有权利. 书稿版本，禁止修改、倒卖等任何侵犯作者著作权的行为.

知乎@余命数

知乎@余命数

书稿声明

Draft Notice

本书目前为**书稿状态**，意味着：

- 内容尚未完整，部分章节可能缺失或正在编写中
- 文中可能存在笔误、排版错误或数学推导疏漏
- 章节结构与内容安排可能在后续版本中调整
- 习题答案与索引等附录内容可能尚未完善

若您在阅读过程中发现任何错误或有改进建议，
欢迎通过以下方式联系作者：

个人网站：https://rikka.moe

电子邮箱：me@rikka.moe

书籍主页：https://rikka.moe/books

当前版本：Draft October 7, 2026

知乎@余命数

献词

Dedication

谨以此书

献给过去
愿来时的每一步崎岖，都成为此刻脚下的基石

每一个未曾舞蹈的日子
都是对生命的一种辜负

„Und verloren sei uns der Tag,
wo nicht ein Mal getanzt wurde!"

— 弗里德里希·尼采
Friedrich Nietzsche

— 2026 —

知乎@余命数

关于作者

余命数



Project Akari ·Midnight Forever

2025 届广西新高考二卷考生, 政史地组合, 数学 139 分.

这套书整理自我中学阶段学习数学时的笔记与讲义. 我按一条理想的阅读骨架把代数、离散与随机、几何、分析、线性结构依次铺开, 每条结论都给出推导路径, 把概念彼此生长的过程摊开在纸面上. 愿它陪你走完一段中学数学的旅程.

书籍主页

https://rikka.moe/books

更多信息、勘误表、联系方式等均可在此查看

交流与联系

在线平台

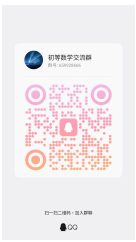
个人主页	`https://rikka.moe`
书籍主页	`https://rikka.moe/books`
知乎	@ 余命数
爱发电	`https://afdian.com/a/writeamathbook`

即时通讯

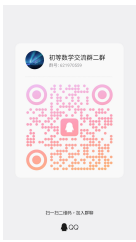
QQ	`2454167821`
交流群	`659928666`
邮箱	`me@rikka.moe`



扫码添加好友



交流群一



交流群二



爱发电赞助

知乎@余命数

欢迎通过以上方式与我交流讨论

知乎@余命数

前言

如果你基于本书制作修改版 PDF, 请保留这里的前言与声明, 谢谢. 想了解更多, 请访问我的主页https://rikka.moe

推动我写这套书的最主要动因是贫穷. 我高中就读于一所普通的省重点, 家里没钱给我补习, 能找到的老师水平也一般.

好在我有一台能联网的手机和一颗热爱学习的心, 于是便用互联网找学习资源, 听网课、看电子书.

这个过程里我攒下大量笔记, 大多记在 Obsidian 上. 高考结束后的 2025 年暑假, 我把这些笔记整理成册, 发到几个群里反响不错, 于是继续写了下去.

我也希望这本书能集百家之长. 市面上的资料和教辅很多, 我想读一本成体系、又贴合自己阅读习惯的书, 于是干脆自己动手写, 权当半个教科书.

这本书花了我不少时间. 如果你觉得有帮助, 欢迎去爱发电https://afdian.com/a/writeamathbook支持一下, 请我吃一碗拼好饭也可以. 书中的疑问或错误, 欢迎随时联系, 邮件 me@rikka.moe、QQ2454167821, 或加入 QQ 群 659928666.

知乎@余命数

吊诡的是, 我觉得教辅太贵, 所以都看电子版.

Obsidian 是一款很好用的笔记软件, 用好了可以打造属于自己的知识库.

关于联系与提问

本人经常在外打工兼职或忙别的事, QQ 私聊不一定看得到, 重要的事情请发知乎私信. 已经写清楚的问题我一般不再重复, 比如分卷本与合订本的区别、各版本之间的区别.

学习方法我也说不出什么有用的. 你观察过学得好的同学就会发现, 无论被谁请上台分享经验, 大多只能说些政治正确的话, 扎实基础、回归课本、多跟老师. 这怪不得他们, 真正掌握一项技能后, 就很难想象不懂它是什么感觉, 一项已经内化的能力, 很难再拆开讲给你听.

即便方法就是“极度的自律、极高的抗挫折能力、成百上千小时的枯燥重复”, 即便有些人同时有智商与基因、家庭托底和超强的专注力与抗挫折力, 学习也没有廉价速成的魔法. 每次有人问我, 我也只能给出和所有人一样的回答, 巩固基础、回归课本、多跟老师、总结错题.

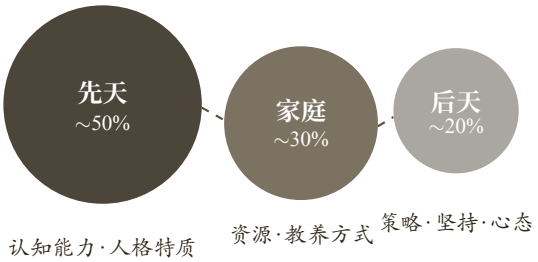
用卖课的人的话说, 就是欢迎多多支持我的项目和电子书. 所以这方面的问题, 就不必再问了.

不过, 考虑到还是有人想知道学习方法. 很好, 下面从比较科学的角度出发, 拒绝政治正确和哔哩哔哩经典学长或学姐分享学习方法的套话, 来说说好的学习方法.

学习成绩的好坏可以认为取决于三大类因素: 先天禀赋、家庭条件和后天努力. 下图用圆的大小表示各自的影响占比, 圆越大代表该因素对成绩差异的解释份额越多.

占比数据综合自 Silventoinen et al. (2020) 在 Scientific Reports 上发表的 28 国双胞胎整合分析(遗传力约 40%–70%, 共享环境约 20%–40%)与 de Zeeuw et al. (2015) 的荷兰双胞胎元分析; 本文取中位数附近的近似值.

知乎@余命数



知乎@余命数

图中三个圆分别代表：

- **先天**，约占一半：认知加工速度、工作记忆容量等人脑硬件参数，以及尽责性、抗压性等人格倾向. 这部分相对稳定，但并非锁死. 早期营养、睡眠和运动会影响其发挥. 有些人的确在某些方面的所谓的感觉更好，又或者说，假如你在婴幼儿时期，甚至还没出生的时候，就接受到了一些对神经系统不太好的物质，这都是实打实的.
- **家庭**，约占三成：家里的藏书量、父母的词汇量和教育期望、能否提供安静的学习环境与课外资源. 家庭条件好在早期尤为关键，随着年级升高其权重逐渐下降. 这里也比较显然，如果家庭是那种书香家庭，父母都是文化人，或者都是中产阶级甚至是富人阶级，请得起清华北大的私教一对一，买学区房、上重高等等，获取好的成绩的概率更大、更轻松. 如果家庭是那种一天到晚都在吵架、家庭暴力、父母没文化而且也不怎么有钱（遗憾的是编者的家庭都是如此，因此我付出了很大的努力），很大概率最后都是成绩一般甚至很差，成为混混或其他.
- **后天**，约占两成：学习方法是否科学、能不能坚持、面对难题时的心态. 虽然占比最小，却是个人最能把控的部分，也是拉开同等条件下人与人差距的主战场. 这也就是唯一可以努力的地方，除非你是家长，否则对于学生，也就是我们而言，只有此路！

虚线表示三类因素之间存在交互，即先天禀赋需要在合适的家庭环境中才能充分发挥，而后天努力的效率又受限于先天的认知基础和家庭提供的资源.

把可控因素提炼出来，成绩的近似模型可以写成：

$$\text{成绩} \approx \underbrace{(\text{认知基础} + \text{尽责性})}_{\text{较稳定}} \times \underbrace{(\text{科学策略} + \text{自我调节})}_{\text{高度可控}} + \underbrace{\text{家庭支持} + \text{教学质量}}_{\text{环境系数}} \tag{0-1}$$

说说，公式里用的是乘法和加法，含义各有侧重.“较稳定”部分与“高度可控”部分之间是乘号，即便先天基础只有六七分，只要方法和自律跟上，乘积依然可观；反过来基础再好，方法为零则乘积也为零. 加在最外面的“环境系数”是加分项，好的家庭和老师能把整体水平往上抬一截，但它们替代不了主体部分的乘积.

Poropat (2009) 的元分析，样本逾七万人，显示尽责性是大五人格中对学业成绩最强的非智力预测因子，其对大学成绩的预测效力与智力相当.

ACE 模型源自行为遗传学经典范式：A 为加性遗传，C 为共享环境，E 为非共享环境.Lee et al. (2018) 在 Nature Genetics 上发表了百万级样本的 GWAS，其多基因评分解释受教育年限约 11%–13% 的变异.

Hart & Risley (1995) 在 Meaningful Differences 中跟踪观测了 42 户家庭三年，发现专业人员家庭幼儿在三岁前累计听到约 3000 万词，领取福利金的家庭约 1000 万词，“三千万词鸿沟”由此得名；后续研究对其取样和方法有争议，但方向一致.

Duckworth & Seligman (2005) 在 Psychological Science 上对八年级生的纵向研究中发现，自控力对期末成绩的方差解释量约为 IQ 的两倍有余.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

“科学策略”指的是有实证支撑的学习技术. 合上书本逼自己回忆的主动检索, 以及在快要忘记时复习的间隔重复, 其效果远大于被动重读和划重点.“自我调节”涵盖制定计划、监控进度和在出错时及时纠正方向的能力.

先天和家庭设定了起跑线和跑道状况, 后天的高质量努力决定你能在这条道上跑多远.

所以, 动用你聪明的小脑袋瓜, 评估自身的情况, 决定从何入手, 别去问别人的学习方法. 你首先是你自己的, 如果你自己都不知道自己要做什么, 就不要偷懒问别人了.Like WTF, 如果你是个普通家庭, 你去问一个有钱人出身的竞赛背景的学霸, 问学习方法, 这本身就荒谬.

当然, 还有一个很好的学习习惯, 那就是去爱发电支持作者:), 推出更多的学习资源, 助你一臂之力.

Dunlosky et al. (2013) 在 Psychological Science in the Public Interest 上评定了十种常用学习技术, practice testing 与 distributed practice 获评高效用, rereading 与 highlighting 获评低效用.

知乎@余命数

如何获取无水印版

本书的基础版本， 含水印免费开放， 任何人都可以在我的主页`https://rikka.moe/books`下载. 如果你想获取无水印版, 可以在爱发电上支持本项目:

1. 打开爱发电页面:`https://afdian.com/a/writeamathbook`
2. 选择对应的赞助档位(通常会标注“无水印版”或“完整版”), 完成赞助
3. 赞助后在爱发电的消息里会收到无水印版 PDF 的下载链接; 如果没有收到, 请发邮件或在知乎私信告诉我你的爱发电昵称

无水印版与免费下载版的**内容完全一致**, 差别只在水印. 你不花钱也能读到一模一样的数学内容;付费只是为了去掉水印、支持项目运转.

既然可以免费下到, 为什么要花钱买?

我一直用中世纪或文艺复兴时期王公贵族资助艺术家来比喻这种捐赠的模式, 或者更恰当的, 是 18-19 世纪文人的集资预订, 又或者是数字公共品理论。

许多高中生(包括我)因为高中的时候穷, 没钱, 所以喜欢白漂电子书资料。毕竟在我那时候, 任何没有 DRM(数字版权管理技术)的电子书都能被随意复制粘贴和传播, 盗版网课也有很多。很多时候不是不想支持正版, 而是没钱。与其到处找资源, 不如加成千上万个资料群, 去点那些夸克网盘(天下没有免费的午餐, 夸克网盘对分享资料的人也是有利可图的), 下一堆资料。虽然下了或者存了以后, 可能没有时间看或者基本不看, 但至少满足了收集欲, 以及一种“我在学习”的感觉。

但是, 与其在网盘里存 500G 的名师网课和状元笔记, 或者花重金买各种名师的网课和资料, 不如把钱留给真正对你有用的东西。如果你觉得 “这本书确实对我有用”、写得好, 或者在其他方面给你带来了价值, 不妨去我的爱发电`https://afdian.com/a/writeamathbook`花 10～30 块来支持我, 并获得无水印版。

其实 10 块钱，吃一次拼好饭差不多就花完了。所以我想了一句广告语：用一次拼好饭的钱，来支持下一位创作者。即使实际上你可以白漂（毕竟这是公共品，一个人的占用不会导致另一个人占用的减少），但你的支持，能让互联网上的创作者感到生活更加美好。

更重要的是，你今天怎么对待创作者，就是你希望将来别人怎么对待你。总有一天，你也会在网上创作：可能是一篇文章，一门课。到那时你会明白，被人认可的感觉有多重要，哪怕对方只付了一次拼好饭的钱。

公共品之所以能一直存在，是因为总有一些人，在可以不付钱的时候，仍然愿意为自己认可的东西付一点点。创作者因此能继续创作，受众也因此能继续读到好东西，这才是真正的双赢。而你今天的这一点点，就是在把这个循环往下传。

知乎 知乎@余命数

试用 Akari Web 平台

知乎@余命数

除了纸质书之外，Project Akari 还在做一套在线学习工具，即 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）.

Project Akari 是一项旨在结合人工智能教育、教育数据挖掘、学习分析，并基于认知心理学的研究成果，搭建一款旨在帮助学生高效地学习数学和计算机科学方面知识的智能辅导系统，或称为学习引擎.

余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

因此，我们的目的就是，尽可能量化学生的知识状态，并结合算法，智能评价和判断学生目前的学习状态，辅助其真正习得和掌握一样东西.

我们的哲学是，让用户用效率最高的方式学到知识，为此我们开发了一整套配合的算法，并在课程等设计上尝试最小化认知负担，采取更互动的方式以激发主动性. 量化学习的一切，并且优化，便是一切的出发点和落脚点.

知乎@余命数

这本书写给谁

知乎@余命数

本书的目标读者有三类：

- **在校高中生**：跟着课堂教学同步使用，课上没听懂的章节回来对着书再看一遍推导. 标题带 $*$ 的选读内容可以先跳过，等基础扎实了再回头啃.
- **复读生或自学备考者**：按目录顺序系统过一遍，重点关注每节的例题和章末习题. 如果你的时间紧张，优先读函数、三角、数列和解三角形四章，即高考分值密集的区域.
- **想重温数学的成年人**：你可能忘了大半高中内容但又不想从初中补起. 挑感兴趣的章节直接读就好，遇到前置知识不清楚的地方顺着交叉引用回去翻.

不管你是哪种读者，建议的做法都一样，先看正文搞懂逻辑链，再做例题（盖上解答自己想），最后做章末习题检验. 光看不练等于白看.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

本书的结构

各卷可独立阅读，也可合订通读. 分卷本在文前附有本卷的分册前言与本卷导读；合订本在每卷分隔页之后给出本卷导读，便于按卷回看. 标题中带 * 的章节多为选读或拓展，初读时可略，需要时再补.

关于版本与系列

本书目前仍是书稿，个别地方尚未完整，可能存在笔误或疏漏，若发现错误或有建议，欢迎联系作者. 本版本是 2026 年按学习路径重排的重要更新，调整了五卷章序，把数列章尾的分析内容并入极限与导数，把平面向量提到解三角形之前.

本书属于 Project Akari 系列.Akari 取自日文“あかり”，意为光，寓意是让好的学习材料更容易被找到、更容易被用起来.

Project Akari 的另一部书稿《函数与导数》将函数、极限与导数相关内容单独成书，系统展开. 两本书可以独立阅读，也可以互相参照. 配套的 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）提供笔记、记忆卡片和在线练习，与书稿配合使用.

本系列的基础版本免费开放，完整版本以极低价格提供. 知识不应该是奢侈品，这是我做这件事的底线.

从写作、排版到软件开发，Project Akari 的每一步都是我一个人完成的. 服务器和运营成本靠书的销售收入以及我个人的工作收入来覆盖. 这个项目既是学习方法的实践，也是工程能力的验证.

发现错误怎么办

一个人的精力和眼力终究有限，书里难免有笔误、推导疏漏乃至概念性错误. 如果你发现了，请按以下方式反馈，我能更快地定位和修正：

1. 说明在哪一卷、哪一章、哪一节，或直接给页码和小标题
2. 引用书中的原文或公式编号
3. 写出你认为正确的版本或质疑的理由

最快的渠道是知乎私信 `https://www.zhihu.com/people/yushumi-shu`，其次是邮件 `me@rikka.moe`. 有价值纠错的读者名字会列入后续版本的鸣谢名单.

致谢

这本书能走到今天，离不开很多人的帮助.

首先要感谢每一位读过草稿、提出意见的同学和朋友. 你们在群里随手指出的一道错题、一处不通顺的表达，聚沙成塔地把这本书往前推了一步.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

感谢爱发电上的赞助者们. 你们的每一笔支持都实实在在地变成了服务器费用和我碗里的拼好饭, 让我能在打工之余腾出手来继续写.

感谢家人容忍我把无数个周末和假期耗在了电脑屏幕前. 虽然你们不完全理解我在做什么, 但从没拦过我.

最后感谢你, 正在读这段字的陌生人. 一本书的价值在被翻开的那一刻才算兑现.

版权与授权

本系列的基础版本依据**知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际协议**(CC BY-NC-ND 4.0) 开放给个人学习者免费使用. 完整版本以极低价格提供, 销售收入用于覆盖服务器与运营成本. 商业使用、机构采购或翻译授权请联系作者.

防盗版与使用声明

本书为 Project Akari 系列出版物. 本 PDF 仅供合法获取者个人学习使用, 禁止以下行为:

- 将本 PDF 或其任何部分上传至任何公开网络平台、网盘、论坛或即时通讯群组;
- 对本 PDF 进行二次售卖、捆绑销售或用于任何商业用途(已获作者书面授权者除外);
- 将本书内容用作机器学习或人工智能训练语料;
- 移除、涂改或遮盖本书的水印、版权信息、读者指纹或页脚标识;
- 修改 PDF 元数据后以原书名、作者名重新分发.

如发现盗版或侵权行为, 欢迎通过以下渠道举报:

- 书籍主页:https://rikka.moe/books
- 邮箱:me@rikka.moe

版本指纹(用于溯源与正版核验):

读者标识 DRAFT-REVIEW

文档哈希 DRAFT-REVIEW

编译日期 October 7, 2026

关于修改与再分发的声明

本书由作者独自维护并发布, 是本项目唯一的**权威正版来源**. 任何对本 PDF 或其源文件的内容、水印、版权信息、读者指纹、PDF 元数据的删改、涂改或遮盖, 均视为对本声明与著作权法的违反.

修改后的版本**不得**保留以下任一标识并以任何形式分发, 否则视为侵权:

- 书名《中学数学之旅》及 Project Akari 系列名称;
- 作者署名"余命数"及相关社交账号;
- 版权页、前言中任何声明性文字;
- 页脚隐性指纹与页面水印.

欢迎读者基于本书内容做学习笔记与摘录，但请在分发时注明来源与原作者. 如需做系统性改编，如翻译、缩写、教材化使用，请先联系作者取得书面授权.

正版核验与联系方式见版权页，或访问 https://rikka.moe/books.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

分册前言

第五卷是我整理笔记时最没有把握的一卷. 复数还相对熟; 立体几何是高考选必争之地, 套路确定; 矩阵与行列式在国内高中里因教材版本而异, 内容深浅不一, 把它写进中学视野要拿捏分寸.

知乎@余命数

复数把数从实轴扩展到平面, 使二次方程与若干代数结构获得更完备的表述, 并赋予运算以几何意义. 立体几何把公理体系从平面扩展到空间, 先完成平行与垂直的判定与证明, 再用空间向量与坐标法处理夹角、距离与体积, 并简介球. 矩阵与行列式分节推进, 从运算、行列式到线性变换、逆与克拉默, 再到秩与消元, 使批量线性关系成为可运算的对象; 圆锥曲线的二次型分类可作为回看解析几何的高观点.

写矩阵这一章时我反复纠结抽象定义会不会引入过早. 最后还是先按其在解方程组中的实际用途引入消元法, 再逐步引出行列式与线性变换.

读完本卷, 中学视野应能看见大学数学门口的几级台阶. 编书时我尽量给出证明或推导路径, 让每个公式都有来处.

矩阵与行列式章末的二次型分类 (圆锥曲线高观点) 建议学完第三卷解析几何与第四卷分析后再回看; 复数与立体几何可按本卷顺序直接阅读.

本书为书稿状态, 内容尚不完善, 可能存在笔误或疏漏. 如有问题或建议, 欢迎联系作者 `https://rikka.moe`, 或发送邮件至 `me@rikka.moe`.

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

本卷导读

本卷线索

第五卷在几何与分析的底座之上扩展研究对象，数系向复数延伸，几何从平面进入空间，矩阵与行列式则把线性结构纳入统一的处理框架. 末三章转入数论与常数，连分数给出最佳有理逼近的判据，e、π、γ 三个常数借级数与积分登场，无穷乘积把乘法版的收敛理论接到 ζ 函数与素数上.

章节地图

- ▷ **复数**　从代数形式与四则运算讲起，继而在复平面上给出几何意义，三角形式把复数乘法与旋转、角的加法统一起来，最后抵达代数基本定理.
- ▷ **立体几何**　以空间中直线与平面的位置关系为主干，从公理出发建立平行与垂直的判定和性质，再引入空间向量与坐标法，处理距离、角度与体积等度量问题.
- ▷ **矩阵与行列式**　沿运算、行列式、线性变换、逆矩阵与克拉默法则、秩与消元法逐节推进，最终以二次型统一圆锥曲线的分类.
- ▷ **连分数**　从辗转相除法的商序列出发，建立有限与无限连分数的表示与收敛理论，给出最佳有理逼近的判据，并以黄金比说明收敛最慢的极端情形.
- ▷ **常数 e、π 与 γ**　用级数与积分工具处理三个著名常数：e 的无理性、Niven 对 π 无理性的初等证明，以及欧拉常数 γ 的基本性质与仍未解决的问题，末节回到巴塞尔问题.
- ▷ **无穷乘积**　把级数收敛理论搬到无穷乘积，依次讨论 Wallis 乘积、Vieta 公式与欧拉乘积，让 ζ 函数与素数的分布进入视野.

向后展望

至此，函数、几何、分析与线性结构这些中学数学的主要对象连成一张可导航的地图，大学课程将在这些门口继续深入.

知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

目录

关于作者 i

前言 iii

分册前言 xi

本卷导读·第五卷 xiii

第一章 复数 2

1.1 复数的概念与几何意义 . . . 3
1.2 复数的运算 . . . 7
1.3 二次方程的复数解 . . . 8
1.4 复数运算的几何意义 * . . . 10
1.5 代数基本定理 * . . . 16
1.6 曲线方程的复数表示 * . . . 17
1.7 本章小结与思想方法 . . . 24

第二章 立体几何 28

2.1 基本公理与空间元素 . . . 28
2.2 证明线线平行的基本策略 . . . 34
2.3 空间中的平行关系 . . . 48
2.4 空间中的垂直关系 . . . 54
2.5 空间向量与坐标法 . . . 59
2.6 空间中的度量 . . . 65
2.7 三面角与四面体 . . . 71
2.8 球 . . . 75

第三章 矩阵与行列式 88

3.1 向量 . . . 89
3.2 矩阵的定义与运算 . . . 92
3.3 行列式 . . . 104
3.4 线性变换与几何应用 . . . 120
3.5 逆矩阵与克拉默法则 . . . 135
3.6 秩与高斯消元 . . . 140

第四章 连分数 148

4.1 辗转相除法与连分数 . . . 148

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.2 有限连分数与有理数 151
4.3 无限连分数与无理数 154
4.4 最佳有理逼近 156
4.5 黄金比 158
4.6 逼近的阶 162

第五章 常数 e、π 与 γ 170
5.1 自然常数 e 170
5.2 π 的无理性 175
5.3 欧拉常数 γ 177
5.4 巴塞尔问题 179

第六章 无穷乘积 182
6.1 无穷乘积的收敛性 182
6.2 Wallis 乘积 184
6.3 Vieta 公式 186
6.4 欧拉乘积 188

习题解答 191
第 2 章立体几何 191
第 4 章连分数 194

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

第 1 章

复数

基础语言

「几何无王者之路。」

——欧几里得

第一章 复数

数系的每一次扩充都由同一个问题驱动. 某种运算在原有体系内无解, 我们就把体系扩大, 使它有解. 从自然数 $\mathbb{N}$ 到整数 $\mathbb{Z}$, 是为了让减法封闭; 从整数 $\mathbb{Z}$ 到有理数 $\mathbb{Q}$, 是为了让除法封闭; 从有理数 $\mathbb{Q}$ 到实数 $\mathbb{R}$, 是为了让开方与极限封闭.

然而, 即便是实数集 $\mathbb{R}$ 中, 一个最基础的代数方程仍然说明了它的局限性.

$$x^2 = -1$$

在实数范围内, 任何数的平方都非负, 因此该方程无解. 这解释了求根公式在判别式 $\Delta < 0$ 时失效的原因, 也说明实数系在代数完备性上存在根本缺陷. 为了弥合这一缺陷, 数学家们必须探寻对数这一概念的再次延拓.

暂时搁置纯粹的代数求解, 从几何视角看数的运算. 在实数轴上, 乘以 -1 对应着一个明确的几何变换, 即以原点为中心旋转 180°. 例如, $2 \times (-1) = -2$, 点 $(2, 0)$ 旋转 180° 到达点 $(-2, 0)$. 一个根本问题由此产生, 是否存在一种运算, 当它连续作用两次后, 其效果恰好等同于“旋转 180°”, 又能否为“旋转 90°”这一几何变换, 寻找到一个对应的代数实体.

这个几何问题提供一条构造性的路径. 若要将代表 1 的点进行 90° 的旋转, 其像必然会脱离一维的实数轴, 而进入一个二维的平面. 我们不妨将这个“逆时针旋转 90°”的算子记为 i. 那么, 从 1 出发, 施以 i 的运算就意味着将点 $(1, 0)$ 旋转至新位置. 再施以一次 i 的运算, 即连续旋转两次 90°, 就等同于旋转 180°, 最终到达 -1 的位置.

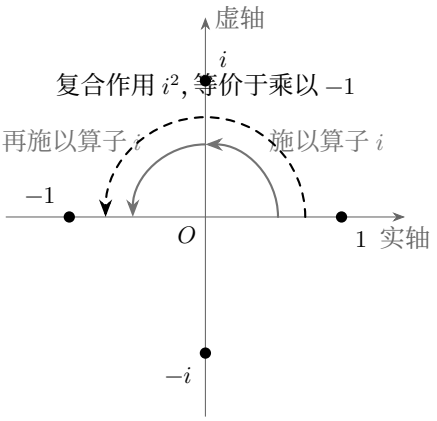


图 1.1 从代数到几何的统一: $i^2 = -1$

这一过程说明了代数结构与几何变换之间内在的对应关系. 我们为“逆时针旋转 90°”这一几何变换所寻找的代数算子 i, 其二次幂 (i^2) 的代数效果, 必然等同

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于乘以 -1. 这便导出了新数系的核心定义, 它同时满足了代数与几何的双重逻辑要求.

$$i^2 = -1$$

因此, 复数的概念是代数需求与几何直观内在统一的必然结果. 它将对数的认知从一维的数轴拓展至二维的平面.

1.1 复数的概念与几何意义

知乎@余命数

1.1.1 复数概念

定义 1.1 (复数) 我们定义形如 $z = a + bi$ 的数称为**复数**, 其中 a, b 均为实数 ($\mathbb{R}$), i 称为**虚数单位**, 它满足 $i^2 = -1$.

- a 称为复数 z 的**实部**, 记作 $\mathrm{Re}(z) = a$.
- b 称为复数 z 的**虚部**, 记作 $\mathrm{Im}(z) = b$.

所有复数构成的集合称为**复数集**, 记作 $\mathbb{C}$.

实部与虚部也可记作 $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$.

性质 (复数的分类) 设复数 $z = a + bi$, 得

- 当 $b = 0$ 时, $z = a$ 是一个**实数**.
- 当 $b \neq 0$ 时, z 称为**虚数**.
- 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, $z = bi$ 称为**纯虚数**.

两个复数相等, 当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ 且 } b = d$$

证明 前三条分类直接来自虚部 b 是否为 0 以及实部 a 是否为 0 的定义. 对相等判定, 若 $a = c$ 且 $b = d$, 则显然 $a + bi = c + di$. 反过来, 若 $a + bi = c + di$, 则 $(a - c) + (b - d)i = 0 = 0 + 0i$. 由复数代数形式的唯一性, 得 $a - c = 0$ 且 $b - d = 0$, 即 $a = c$ 且 $b = d$. □

知乎@余命数

1.1.2 复数的几何表示

定义 1.2 (复平面) 建立了直角坐标系来表示复数的平面, 称为**复平面**或**阿尔冈图**.

- x 轴称为**实轴**.
- y 轴称为**虚轴**.

复数 $z = a + bi$ 与复平面上的点 $Z(a, b)$ 以及从原点指向点 Z 的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的. 这种对应关系是数形结合思想在复数中的基石.

复平面给出复数的几何位置, 模与共轭则刻画其长度与对称关系.

定义 1.3 (模与共轭) 设复数 $z = a + bi$.

- **模**: 复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度, 记作 $|z|$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- **共轭复数**: 实部相等, 虚部互为相反数的两个复数. z 的共轭复数记作 $\bar{z}$.

$$\bar{z} = a - bi$$

在复平面上, 共轭复数对应的点关于实轴对称.

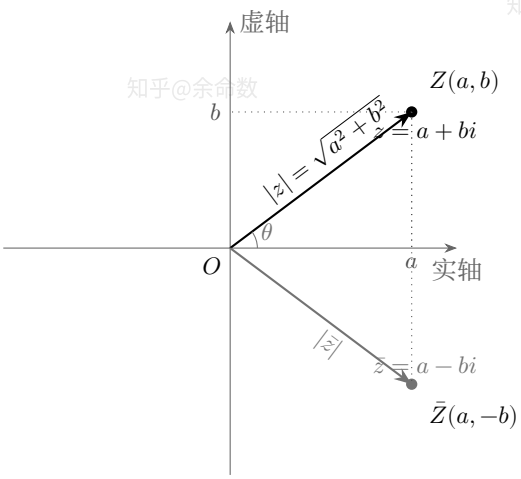


图 1.2 复数、模与共轭的几何意义

知乎@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

性质 (模与共轭的性质) 设 $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 得

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. 此式连接代数运算与几何模长.
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\quad |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$.
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$. 共轭运算对加减法可分配.
4. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}$, $\quad \overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$. 共轭运算对乘除法亦可分配.

知乎@余命数

证明

1. 设 $z = a + bi$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $\bar{z} = a - bi$. 展开得

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 && \text{(平方差公式)} \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) && (i^2 = -1) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

   又 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, 故 $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$, 与上式比较即得 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

2. 设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, 则 $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, 进而

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z_1|^2|z_2|^2. \end{aligned}$$

   复数的模为非负实数, $|z_1 z_2|$ 与 $|z_1||z_2|$ 均非负, 两边取非负平方根即得 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

   当 $z_2 \neq 0$ 时, 令 $w = \frac{z_1}{z_2}$, 则 $z_1 = w z_2$, 由已证乘法性质得 $|z_1| = |w||z_2|$. 又 $z_2 \neq 0$ 蕴含 $|z_2| > 0$, 因此 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |w| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

3. 设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. 以加法为例, 比较等式两边

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i,$$

$$\bar{z_1} + \bar{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a+c) - (b+d)i,$$

   两边相同, 故 $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$. 减法同理.

4. 设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. 比较乘法等式两边

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i,$$

$$\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=(a-bi)(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i,$$

两边相同, 故 $\overline{z_1z_2}=\bar{z_1}\bar{z_2}$.

除法可由乘法结论转化. 令 $w=\frac{z_1}{z_2}$, 则 $z_1=w\cdot z_2$, 两边取共轭得 $\bar{z_1}=\overline{w\cdot z_2}$. 由已证的乘法性质, $\bar{z_1}=\bar{w}\cdot\bar{z_2}.z_2\neq 0$ 蕴含 $\bar{z_2}\neq 0$, 解得 $\bar{w}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$. 将 $w=\frac{z_1}{z_2}$ 代回, 即 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$.

□

例题 1.1 已知复数 z,w 均不为 0, 则下列结论正确的是( )

A. $z^2=|z|^2$

B. $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$

D. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

解 四个选项均围绕恒等式 $|z|^2=z\bar{z}$ 展开, 逐一判定.

选项 A 错误. 取 $z=i$, 左边 $z^2=i^2=-1$, 右边 $|z|^2=|i|^2=1$, 两边不等.

选项 B 正确. 由 $|z|^2=z\bar{z}$,

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z}{\bar{z}}\cdot\frac{z}{z}=\frac{z\cdot z}{\bar{z}\cdot z}=\frac{z^2}{z\bar{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}.$$

选项 C 正确. 设 $z=a+bi, w=c+di$, 比较两边

$$\overline{z-w}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i,$$
$$\bar{z}-\bar{w}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i,$$

两边相等.

选项 D 正确. 由 $|u|^2=u\bar{u}$ 与 $\overline{(u/v)}=\bar{u}/\bar{v}$,

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2=\left(\frac{z}{w}\right)\cdot\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{z}{w}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{w}}=\frac{z\bar{z}}{w\bar{w}}=\frac{|z|^2}{|w|^2}.$$

模为非负数, 两边开方得 $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$.

故正确的选项为 B、C、D.

注 1.1 (经验总结)

四个选项围绕恒等式 $|z|^2=z\bar{z}$ 展开, 它连接复数 z、共轭 $\bar{z}$ 与模 $|z|$.

- B 通过构造 $z\bar{z}$ 得到分母 $|z|^2$; D 对模取平方后归约为同一恒等式.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- $|z|^2 = z\bar{z}$ 是处理复数恒等变换的常用入口.

1.2 复数的运算

1.2.1 代数运算

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$.

- **加法/减法**:

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

几何意义:遵循向量加/减法的平行四边形/三角形法则.

- **乘法**:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(像多项式一样展开,然后用 $i^2 = -1$ 化简)

- **除法**:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

分子分母同乘以分母的共轭复数,实现分母实数化.

例题 1.2 (复数四则运算) 计算 $z = \frac{(1-2i)^2}{2+i} + i^{2023}$.

解 按先乘方、后除法、再加法的顺序计算,并利用 i 的周期性.

先化简分子 $(1-2i)^2$,由平方展开得

$$(1-2i)^2 = 1^2 - 2(1)(2i) + (2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$$

将其代入除法,分子分母同乘分母的共轭 $2 - i$ 实现分母实数化:

$$\begin{aligned}
\frac{-3-4i}{2+i} &= \frac{(-3-4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\
&= \frac{-6+3i-8i+4i^2}{4+1} \qquad (i^2 = -1) \\
&= \frac{-6-5i-4}{5} \\
&= \frac{-10-5i}{5} = -2 - i
\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再处理 i 的高次幂.i 的幂周期为 4,

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

由 $2023 = 4 \times 505 + 3$ 得 $i^{2023} = i^3 = -i$.

两部分相加得 $z = (-2 - i) + (-i) = -2 - 2i$.

1.3 二次方程的复数解

知乎@余命数

复数系的代数框架已经建立,现在可以求解最初激发这一理论发展的问题,即实数域 $\mathbb{R}$ 内无解的二次方程.

知乎@余命数

1.3.0.1 负实数的平方根

实数系中, 形如 $x^2 = -p\ (p > 0)$ 的方程无解, 原因在于没有实数的平方为负数. 虚数单位 i 由 $i^2 = -1$ 定义, 正为此提供了代数基础.

据此, 对任意正实数 p, $-p$ 的平方根可定义:

$$\sqrt{-p} = \sqrt{p \cdot (-1)} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{-1}$$

将 i 视作 $\sqrt{-1}$ 的代数记号, 则

知乎@余命数

$$\sqrt{-p} = \sqrt{p}\, i$$

例如:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\, i = 2i$$

知乎@余命数

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16}\, i = 4i$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\, i$$

有了这一定义, 求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 可推广至判别式 $\Delta < 0$ 的情形.

1.3.0.2 求根公式的应用

例题 1.3 解方程 $x^2 + 1 = 0$.

解 方程 $x^2 + 1 = 0$ 即 $x^2 + 0x + 1 = 0$. 其判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(1) = -4$, 故 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = 2i$. 代入求根公式得

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm 2i}{2(1)} = \pm i$$

该方程在复数集 $\mathbb{C}$ 内的解为 $x_1 = i$ 和 $x_2 = -i$, 是一对共轭的纯虚数.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入验证：当 $x = i$ 时，$x^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$；当 $x = -i$ 时，$x^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. 两根均满足原方程.

例题 1.4 解方程 $x^2 - 2x + 5 = 0$.

解 方程 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 的判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$，故 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = 4i$. 代入求根公式得

$$x = \frac{-(-2) \pm 4i}{2(1)} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

方程的两个解为 $x_1 = 1 + 2i$ 和 $x_2 = 1 - 2i$, 是一对共轭复数.

1.3.0.3 一般性结论

上述例子蕴含一个普遍规律, 归结为下述定理, 将一元二次方程的求根理论在复数集 $\mathbb{C}$ 内补全.

定理 1.1 (实系数二次方程的共轭虚根) 对于任意实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, 当其判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程在复数集 $\mathbb{C}$ 内有两个共轭的虚数根.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}\, i}{2a} \tag{1-1}$$

证明 由配方法,

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac = \Delta.$$

当 $\Delta < 0$ 时, 记 $|\Delta| = -\Delta > 0$. 因为 $i^2 = -1$, 所以

$$\left(\sqrt{|\Delta|}\, i\right)^2 = -|\Delta| = \Delta.$$

因而 $(2ax + b)^2 = \Delta$ 的两个解由

$$2ax + b = \pm\sqrt{|\Delta|}\, i$$

给出, 即

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}\, i}{2a}.$$

由于 a, b, c 为实数且 $\sqrt{|\Delta|} \neq 0$, 这两个根虚部非零且互为共轭. □

此定理表明, 复数域中任何实系数一元二次方程皆有解. 引入复数后, 此类方程在复数域内总能求解.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.4 复数运算的几何意义 *

复数的代数形式 $z=a+bi$ 处理加减法时, 几何意义与向量的平行四边形法则完全对应. 乘除法则不然, 代数形式 $(ac-bd)+(ad+bc)i$ 难以显露其几何意义. 为探明乘除法在复平面上对应的几何变换, 我们引入复数的三角形式.

定义 1.4 (三角形式与辐角) 任何一个非零复数 $z=a+bi$ 都可以表示为.

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 是复数的**模**, θ 是以实轴正半轴为始边, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 为终边的角, 称为**辐角**, 记作 $\mathrm{Arg}(z)$.
在所有可能的辐角中, 我们通常选取满足 $0\le\theta<2\pi$ (或 $-\pi<\theta\le\pi$) 的唯一值, 称之为**辐角主值**, 记作 $\arg(z)$.

三角形式把复数分解为模与辐角, 乘除法在此形式下有简洁的几何法则.

定理 1.2 (乘除法的三角表示) 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 为非零复数.

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\ \frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \end{aligned}$$

该定理给出了复数乘除法的几何含义, 两条法则:

- **复数相乘: 模相乘, 辐角相加.**
- **复数相除: 模相除, 辐角相减.**

从几何变换看, 用复数 z_2 乘 z_1, 相当于把代表 z_1 的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的长度变为原来的 r_2 倍, 再逆时针旋转 θ_2 角.

证明 以乘法为例, 除法类似. 将 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 与 $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 直接相乘.

$$\begin{aligned} z_1z_2&=[r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)]\cdot[r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

展开并利用 $i^2=-1$:

$$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

知乎@余命数

括号内的实部与虚部恰是和角公式:

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

乘法法则得证.

对于除法法则, 需有 $z_2\neq 0$, 即 $r_2>0$. 先注意到

$$\frac{1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}=\cos\theta_2-i\sin\theta_2=\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2),$$

因为两者相乘为 $\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2=1$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

其中最后一步使用已证的乘法法则. 除法法则得证. □

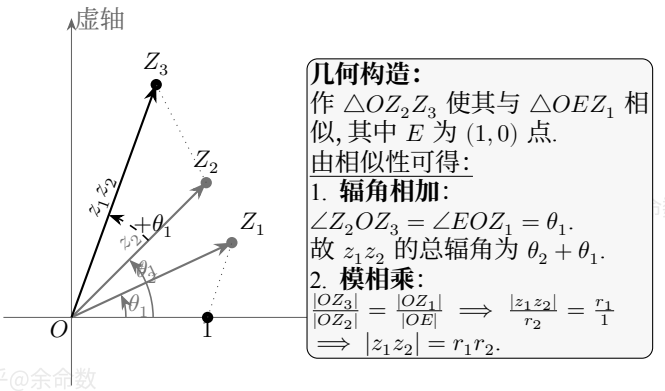


图 1.3　复数乘法的几何意义

例题 1.5　已知平面直角坐标系中的点 A 的坐标为 (x,y). 将点 A 绕原点 O 逆时针旋转 90° 得到点 B, 将点 A 绕原点 O 顺时针旋转 90° 得到点 C, 请求出点 B 和点 C 的坐标.

解　平面上的点用复数表示, 绕原点的旋转对应于乘以一个模为 1 的复数.

点 $A(x,y)$ 对应复数 $z_A=x+yi$.

将一个复数乘以 $\cos\theta+i\sin\theta$, 即把对应向量绕原点逆时针旋转 θ 角.

点 B 由 A 绕原点逆时针旋转 90° 得到, 对应算子

$$\cos(90^\circ)+i\sin(90^\circ)=0+1\cdot i=i$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故

$$\begin{aligned} z_B &= z_A \cdot i \\ &= (x+yi)i \\ &= xi + yi^2 = -y + xi \end{aligned}$$

点 B 的坐标为 $(-y, x)$.

点 C 由 A 绕原点顺时针旋转 90°, 即逆时针旋转 -90°, 对应算子

$$\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ) = 0 - 1 \cdot i = -i$$

故

$$\begin{aligned} z_C &= z_A \cdot (-i) \\ &= (x+yi)(-i) \\ &= -xi - yi^2 = y - xi \end{aligned}$$

点 C 的坐标为 $(y, -x)$.

点 B 的坐标为 $(-y, x)$, 点 C 的坐标为 $(y, -x)$.

本例展示了复数的一项应用, **将几何变换代数化**. 由此直接得到平面点绕原点旋转的坐标公式.

- 点 (x, y) 绕原点逆时针旋转 90° 后的坐标为 $(-y, x)$.
- 点 (x, y) 绕原点顺时针旋转 90° 后的坐标为 $(y, -x)$.

其代数根源在于复数乘法的几何意义. 复数把旋转、伸缩等几何变换归结为乘法运算.

复数乘法法则的一个直接推论是关于乘方运算的棣莫弗公式.

定理 1.3 (棣莫弗公式) 对于任意整数 n 和任意正实数 r,

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

证明 以 n 为正整数为例, 用数学归纳法证明, 实为多次应用模相乘, 辐角相加法则.

当 $n = 1$ 时, 左边 $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 右边 $= r^1(\cos(1\theta) + i\sin(1\theta))$, 等式成立.

设 $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 时命题成立, 即 $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^k = r^k[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]$. 往证 $n = k+1$ 时亦成立:

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{k+1} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^k \cdot [r(\cos\theta + i\sin\theta)]$$

知乎@余命数

$$\overset{\text{归纳假设}}{=} (r^k[\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)])\cdot(r[\cos\theta+i\sin\theta])$$

$$\overset{\text{乘法法则}}{=} (r^k\cdot r)[\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)]$$

$$= r^{k+1}[\cos((k+1)\theta)+i\sin((k+1)\theta)]$$

故 $n=k+1$ 时命题也成立.

由数学归纳法, 公式对所有正整数 n 成立. 当 $n=0$ 时两边均为 1; 当 $n<0$ 时, 令 $m=-n>0$. 由除法三角表示知

$$z^{-1}=r^{-1}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)).$$

于是

$$z^n=(z^{-1})^m=r^{-m}[\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)]=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)].$$

故公式对所有整数 n 成立. □

例题 1.6 (棣莫弗公式的应用) 计算 $(1+i)^{16}$.

解 直接代数展开繁琐, 改用棣莫弗公式, 先把底数化为三角形式.

设 $z=1+i$. 其模 $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; 又 z 对应点 $(1,1)$, 位于第一象限, 由 $\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得辐角主值 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 故 $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

应用棣莫弗公式并化简得

$$\begin{aligned}(1+i)^{16}&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{16}\\&=(\sqrt{2})^{16}\left[\cos\left(16\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(16\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=(2^{1/2})^{16}[\cos(4\pi)+i\sin(4\pi)]\\&=2^8[1+i\cdot 0]\\&=256\end{aligned}$$

即 $(1+i)^{16}=256$.

例题 1.7 利用复数方法, 将 $\cos(3\theta)$ 和 $\sin(3\theta)$ 表示为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多项式.

解 对复数 $(\cos\theta+i\sin\theta)^3$ 做两次计算, 一次用棣莫弗公式, 一次用二项式定理展开. 比较两次结果的实部与虚部, 即得所需三角恒等式.

知乎@余命数　知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

据棣莫弗公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) \tag{1-2}$$

另一方面, 用二项式定理展开 $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \binom{3}{0}\cos^3\theta + \binom{3}{1}\cos^2\theta(i\sin\theta) \\ &\quad + \binom{3}{2}\cos\theta(i\sin\theta)^2 + \binom{3}{3}(i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3\cos\theta(i^2\sin^2\theta) + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\end{aligned}$$

(此处利用 $i^2 = -1$ 与 $i^3 = -i$.)

整理其实部与虚部得

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \tag{1-3}$$

比较 (1-2) 与 (1-3) 的实部与虚部, 即得

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

为得到只含 $\cos\theta$ 的 $\cos(3\theta)$ 表达式, 代入 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

同理, 为得到只含 $\sin\theta$ 的 $\sin(3\theta)$ 表达式, 代入 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

于是所求三角恒等式为

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

棣莫弗公式处理复数高次幂与开方, 把多项式形式的**代数乘方运算**归约为**模的实数乘方**与**辐角的线性数乘**.

知乎@余命数

1.4.1 历史纵横

棣莫弗公式 $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$ 看似只是计算技巧, 其背后另有深意.

公式以法国数学家亚伯拉罕·棣莫弗命名. 他长期客居英国, 与牛顿、哈雷交往密切, 在概率论和解析几何领域贡献卓著. 约 1707 年他最早注意到复数与三角函数之间的这种关系, 并就正整数次幂作了阐述. 其后 **莱昂哈德·欧拉**在 1748 年提出**欧拉公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1-4}$$

后, 棣莫弗公式便有了解释, 它实为 $(a^x)^y=a^{xy}$ 的自然推论:

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=(re^{i\theta})^n=r^n(e^{i\theta})^n=r^ne^{i(n\theta)}=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

棣莫弗发现了现象, 欧拉给出了根本解释.

棣莫弗公式的主要用途如下. 最直接的应用, 是把涉及二项式展开的**乘方运算**转化为**辐角乘法**. 除求高次幂外, 它还是**复数开方**, 例如 $z^n=c$ 的理论基础.

棣莫弗公式可推导任意倍角的三角函数公式. 例如推导 $\cos(2\theta)$ 与 $\sin(2\theta)$, 只需展开 $(\cos\theta+i\sin\theta)^2$:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$$

另一方面, 按二项式展开:

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^2&=\cos^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta+(i\sin\theta)^2\\&=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i(2\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

比较两式的实部和虚部:

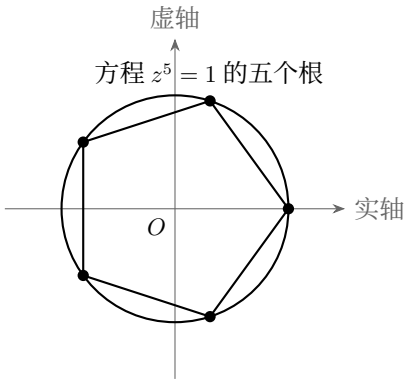
$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta\quad\text{且}\quad\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$

这给出了不依赖几何法、纯代数推导三角恒等式的途径.

模相乘, 辐角相加这一法则精确刻画了几何上的**旋转与伸缩**. 求解方程 $z^n=1$ (单位根)时, 棣莫弗公式表明其 n 个解均匀分布在复平面的单位圆上, 构成**正 n 边形**的顶点.

1. 已知复数 $z=3-4i$, 求它的共轭复数 $\bar{z}$ 和模 $|z|$. 并在复平面内指出 z 和 $\bar{z}$ 对应的点的位置.
2. 计算.(1) $(2-i)(1+3i)-4i$　(2) $\frac{1+i}{1-i}+i^5$.
3. 设复数 $z=(m^2-1)+(m-1)i$, 其中 $m\in\mathbb{R}$. 分别求当 m 取何值时. (1) z 是实数; (2) z 是虚数; (3) z 是纯虚数; (4) z 对应的点在第四象限.
4. 若复数 z 满足 $(1+i)z=2-4i$, 求复数 z.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



1.5 代数基本定理 *

已看到, 复数域 $\mathbb{C}$ 中所有实系数一元二次方程都有解. 对更高次的方程, 例如 $z^3-2z+5=0$ 或 $z^5+iz^2-(3+i)=0$, 复数系已足以应对.

无需为此再发明新的数.

定理 1.4 (代数基本定理) 任何一个次数 $n\geq 1$ 的复系数多项式方程

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

(其中系数 $a_k\in\mathbb{C}$ 且 $a_n\neq 0$)在复数集 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根.

由代数基本定理, 经因式分解得到一个更强的推论:

推论 1.1 任何一个 n 次复系数多项式在复数集 $\mathbb{C}$ 中恰好有 n 个根(计入重数). 即, 任何复系数多项式都可以被完全分解为 n 个一次因式的乘积.

$$P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$$

其中 $z_1,z_2,\dots,z_n$ 是 $P(z)=0$ 的 n 个复数根.

注 1.2 (证明说明) 代数基本定理的严格证明需要复分析、拓扑或高等代数工具, 例如刘维尔定理或绕数思想. 本书把它作为引用定理使用.

证明 对次数 n 作归纳. 当 $n=1$ 时, 一次多项式 a_1z+a_0 的唯一根为 $z=-a_0/a_1$, 结论成立.

假设次数小于 n 的复系数多项式均可完全分解. 对 n 次多项式 $P(z)$, 由代数基本定理, 存在 $z_1\in\mathbb{C}$ 使 $P(z_1)=0$. 由因式定理, $z-z_1$ 整除 $P(z)$, 因而存在一个 $n-1$ 次复系数多项式 $Q(z)$, 使得

$$P(z)=(z-z_1)Q(z).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由归纳假设, $Q(z)$ 可分解为 $a_n(z-z_2)\cdots(z-z_n)$. 于是

$$P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n).$$

因式分解中的每个一次因式给出一个根, 重复因式按出现次数计入重数, 总数正好为 n. □

回顾数系扩张的历程, 每一步都是为了让某种方程有解.

- 为了解 $x+5=2$, 将自然数 $\mathbb{N}$ 扩展到整数 $\mathbb{Z}$.
- 为了解 $3x=2$, 将整数 $\mathbb{Z}$ 扩展到有理数 $\mathbb{Q}$.
- 为了解 $x^2=2$, 将有理数 $\mathbb{Q}$ 扩展到实数 $\mathbb{R}$.
- 为了解 $x^2=-1$, 将实数 $\mathbb{R}$ 扩展到复数 $\mathbb{C}$.

代数基本定理表明, 为求解**多项式方程**而扩张数系的旅程, 到复数 $\mathbb{C}$ 即告终结. 不必再为任何多项式方程发明新的数. 因此复数集 $\mathbb{C}$ 是**代数封闭**的.

代数基本定理关于**实系数**多项式的一个推论如下.

性质 (实系数多项式的虚根成对定理) 若实系数多项式 $P(z)$ 有一个虚数根 $z_0=a+bi\ (b\neq 0)$, 则其共轭复数 $\bar{z_0}=a-bi$ 也必是它的一个根.

证明 设实系数多项式 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, 所有系数 a_k 为实数. 已知 z_0 是 $P(z)$ 的根, 即 $P(z_0)=a_nz_0^n+a_{n-1}z_0^{n-1}+\cdots+a_1z_0+a_0=0$. 对该等式两边取共轭, 逐项应用共轭对加减、乘法可分配的性质 ($\overline{u\pm v}=\bar{u}\pm\bar{v}$, $\overline{uv}=\bar{u}\,\bar{v}$, 故 $\overline{a_kz_0^k}=\overline{a_k}(\bar{z}_0)^k$), 得

$$\begin{aligned}
0=\overline{P(z_0)}&=\overline{a_nz_0^n}+\overline{a_{n-1}z_0^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1z_0}+\overline{a_0} && \text{(共轭对加法可分配)}\\
&=\overline{a_n}(\bar{z}_0)^n+\overline{a_{n-1}}(\bar{z}_0)^{n-1}+\cdots+\overline{a_1}\,\bar{z}_0+\overline{a_0} && \text{(共轭对乘法可分配)}\\
&=a_n(\bar{z}_0)^n+a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1}+\cdots+a_1\bar{z}_0+a_0 && (a_k\in\mathbb{R},\overline{a_k}=a_k).
\end{aligned}$$

末行恰是把 $\bar{z}_0$ 代入 $P(z)$ 所得, 即 $P(\bar{z}_0)=0$, 故 $\bar{z}_0$ 也是 $P(z)$ 的根. □

虚根成对定理解释了实系数一元二次方程判别式为负时,两虚根恒为共轭,例如 $1\pm 2i$, 此即实系数多项式根的共轭对称性.

1.6 曲线方程的复数表示 *

复数模的几何意义提供了一种简洁描述平面上几何轨迹的方式. 其依据是:

$$\text{复数}z_1\text{与}z_2\text{所对应点之间的距离}=|z_1-z_2|$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

据此, 许多基于距离定义的几何图形可直接翻译为复数方程. 设变量 z 对应轨迹上任意一点 P, 而 z_0, z_1, z_2 等对应平面上的定点.

- **圆**:
  几何定义: 平面上到定点 $C(z_0)$ 的距离等于定长 r 的所有点 $P(z)$ 的集合.
  这一关系可以直接表述为 $PC = r$, 即.

$$|z - z_0| = r \quad (r > 0)$$

  其中, z_0 是圆心对应的复数, r 是圆的半径.

- **线段的中垂线**:
  几何定义: 平面上到两个定点 $A(z_1)$ 和 $B(z_2)$ 距离相等的所有点 $P(z)$ 的集合.
  该定义等价于 $PA = PB$, 即.

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

- **椭圆**:
  几何定义: 平面上到两个定点(焦点) $F_1(z_1)$ 和 $F_2(z_2)$ 的距离之和为常数 $2a$ 的所有点 $P(z)$ 的集合, 其中该常数大于两焦点间的距离.
  此定义可直接翻译为 $PF_1 + PF_2 = 2a$, 即.

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \quad (2a > |z_1 - z_2|)$$

- **双曲线**:
  几何定义: 平面上到两个定点(焦点) $F_1(z_1)$ 和 $F_2(z_2)$ 的距离之差的绝对值为常数 $2a$ 的所有点 $P(z)$ 的集合, 其中该常数小于两焦点间的距离.
  此定义可翻译为 $|PF_1 - PF_2| = 2a$, 即.

$$\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a \quad (0 < 2a < |z_1 - z_2|)$$

  若去掉外层的绝对值, 方程 $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ 仅表示双曲线靠近 z_2 的一支.

  这种表示在处理涉及这些曲线的几何问题时, 把几何关系转化为代数运算.

1.6.0.1 有趣的应用

看一些有趣的应用.

例题 1.8 已知复数 z 满足方程 $|z - (4 + 3i)| = 1$. 求 $|z|$ 的最大值与最小值.

解 问题归于复数模的几何意义: 方程 $|z - z_0| = r$ 描述以 z_0 为圆心、半径为 r 的圆, 而 $|z|$ 表示点 z 到原点的距离, 故需在已知圆上求到原点距离最大与最小的点.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这里方程 $|z-(4+3i)|=1$ 表示复平面上以 $C(4,3)$(对应 $z_0=4+3i$)为圆心、半径 $r=1$ 的圆.

连接原点 O 与圆心 C, 该连线与圆交于两点, 据几何直观距原点最近和最远的点必在此连线上, 即到原点的最小距离为 $|OC|-r$, 最大距离为 $|OC|+r$. 又圆心到原点的距离

$$|z_0|=|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

为严格化此估计, 对复数模用反向三角不等式 $||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|$, 取 $z_2=z_0$ 得 $||z|-|z_0||\le|z-z_0|$. 代入 $|z-z_0|=1$ 与 $|z_0|=5$, 得

$$\begin{aligned}||z|-5|&\le 1,\\ -1\le|z|-5&\le 1,\\ 4\le|z|&\le 6.\end{aligned}$$

两个端点恰在连线 OC 与圆的交点处取得, 故 $|z|$ 的最小值为 4, 最大值为 6.

例题 1.9 在复平面内, 复数 z 满足方程 $|z-(1+2i)|=|z-(3-i)|$. (1) 描述该方程所表示的几何图形. (2) 求该图形的直角坐标方程.

解 把复数模的几何意义直接翻译: $|z-z_1|=|z-z_2|$ 对应到两定点距离相等的点的集合, 即线段的中垂线.

(1) 令 $z_1=1+2i$, $z_2=3-i$, 在复平面上对应点 $A(1,2)$ 与 $B(3,-1)$. 方程 $|z-z_1|=|z-z_2|$ 表示点 $P(z)$ 到 A 的距离等于到 B 的距离, 轨迹是线段 AB 的中垂线.

(2) 设 $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, 代入原方程得 $|(x-1)+(y-2)i|=|(x-3)+(y+1)i|$. 由复数模的定义两边平方并展开化简

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2&=(x-3)^2+(y+1)^2,\\ x^2-2x+1+y^2-4y+4&=x^2-6x+9+y^2+2y+1,\\ -2x-4y+5&=-6x+2y+10,\\ 4x-6y-5&=0,\end{aligned}$$

即线段 AB 的中垂线直角坐标方程为 $4x-6y-5=0$.

例题 1.10 (阿波罗尼斯圆) 求复数 z 满足方程 $|z-1|=2|z+1|$ 时, 其在复平面上形成的轨迹.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 形如 $|z-z_1|=k|z-z_2|\ (k>0,k\neq 1)$ 的方程定义阿波罗尼斯圆, 即到两定点距离之比为常数的点的轨迹. 通过代数方法化为直角坐标方程, 圆心与半径便一目了然.

设 $z=x+yi$, 代入得 $|(x-1)+yi|=2|(x+1)+yi|$. 两边平方去根号后展开整理

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2+y^2&=4[(x+1)^2+y^2],\\
x^2-2x+1+y^2&=4(x^2+2x+1+y^2),\\
x^2-2x+1+y^2&=4x^2+8x+4+4y^2,\\
3x^2+10x+3y^2+3&=0.
\end{aligned}
$$

两边除以 3 并配方, 化为圆的标准方程

$$
\begin{aligned}
x^2+\frac{10}{3}x+y^2+1&=0,\\
\left(x^2+\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)+y^2&=-1+\left(\frac{5}{3}\right)^2,\\
\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2&=-1+\frac{25}{9}=\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2.
\end{aligned}
$$

轨迹是以 $(-\frac{5}{3},0)$ 为圆心、半径 $\frac{4}{3}$ 的圆.

例题 1.11 已知复数 z 满足 $|z-3|+|z+3|=10$. 求 $|z|$ 的最大值和最小值.

解 先识别复数方程的几何图形. 方程 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ 是椭圆的标准复数形式, 问题化为求椭圆上点到原点距离的最值.

方程 $|z-3|+|z+3|=10$ 表示点 z 到定点 $F_1(3,0)$ 与 $F_2(-3,0)$ 的距离之和为 10, 两定点分别对应复数 3 与 -3.

这是以 F_1,F_2 为焦点的椭圆. 由定义焦距 $2c=|3-(-3)|=6$, 故 $c=3$; 长轴长 $2a=10$, 故 $a=5$; 短半轴 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$.

椭圆中心在原点, 焦点在实轴上, 直角坐标方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

求 $|z|$ 的最值, 即椭圆上点到原点 $(0,0)$ 距离的最值. 因椭圆中心即原点, 直接考察长半轴与短半轴, 即点 z 位于长轴顶点 $(\pm5,0)$ 时距原点最远, $|z|=5$; 位于短轴顶点 $(0,\pm4)$ 时距原点最近, $|z|=4$.

故 $|z|$ 的最大值为 5, 最小值为 4.

例题 1.12 在复平面上, 点 z 满足方程 $z\bar{z}+i(z-\bar{z})-2=0$. 求点 z 的轨迹.

知乎@余命数 知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 复数方程同时含 z 与 $\bar{z}$ 时，用 $z=x+yi$，$\bar{z}=x-yi$ 代换，转化为关于 x,y 的直角坐标方程.

由 $z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$ 及 $z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)=2yi$，代入原方程 $z\bar{z}+i(z-\bar{z})-2=0$ 得

$$(x^2+y^2)+i(2yi)-2=0,$$

$$x^2+y^2+2yi^2-2=0,$$

$$x^2+y^2-2y-2=0.$$

对 y 配方化为圆的标准方程

$$x^2+(y^2-2y)=2,$$

$$x^2+(y^2-2y+1)=2+1,$$

$$x^2+(y-1)^2=3.$$

点 z 的轨迹是以 $(0,1)$ 为圆心、半径 $\sqrt{3}$ 的圆.

1.6.0.2 复数和平面几何

复数方法可为一些平面几何定理提供简洁的代数证明.

例题 1.13 设复平面上的三点 A,B,C 对应的复数分别为 a,b,c，且 A,B,C 构成非退化三角形. 证明 $\triangle ABC$ 为正三角形的充要条件是

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

证明 把正三角形的几何性质，即一个顶点可由另一顶点绕第三个顶点旋转 $\pm 60^\circ$ 得到，转为代数运算. 旋转 60° 对应乘以复数 $e^{i\pi/3}$.

$\triangle ABC$ 为正三角形，等价于其内角均为 60°，即向量 $\overrightarrow{AC}$ 可由向量 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 旋转 $\pm 60^\circ$ 得到.

$\overrightarrow{AB}$ 对应复数 $b-a$，$\overrightarrow{AC}$ 对应复数 $c-a$. 旋转 $\pm 60^\circ$ 的算子为 $\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

故 $\triangle ABC$ 为正三角形的充要条件是

$$c-a=(b-a)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\quad 或\quad c-a=(b-a)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

即 $\frac{c-a}{b-a} \in \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$, 二者恰为二次方程 $x^2-x+1=0$ 的两根(两根之和为 1, 两根之积为 $\frac{1-i^2(3)}{4}=1$). 于是该几何条件等价于

$$\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2-\left(\frac{c-a}{b-a}\right)+1=0.$$

知乎@余命数

因 A,B,C 构成非退化三角形, $b\neq a$, 两边同乘 $(b-a)^2$ 去分母得 $(c-a)^2-(c-a)(b-a)+(b-a)^2=0$. 将其展开并合并同类项

$$(c^2-2ac+a^2)-(bc-ac-ab+a^2)+(b^2-2ab+a^2)=0,$$

$$c^2-2ac+a^2-bc+ac+ab-a^2+b^2-2ab+a^2=0,$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0,$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

非退化前提下上述每一步可逆, 故此代数条件是 $\triangle ABC$ 为正三角形的充要条件. □

例题 1.14 (拿破仑定理) 在任意 $\triangle ABC$ 的三边外侧分别作等边三角形 $\triangle BCD$, $\triangle CAE$, $\triangle ABF$. 设这三个等边三角形的中心分别为 P,Q,R. 证明 $\triangle PQR$ 是等边三角形.

知乎@余命数 知乎@余命数

证明 将正三角形的旋转关系转为复数乘法, 以三次单位根 $\omega=e^{i2\pi/3}$ 简化表示, 证明 P,Q,R 满足等边三角形的代数充要条件.

设点 A,B,C 对应复数 a,b,c. 设 $A\to B\to C$ 为顺时针方向; 若为逆时针, 下文只需将 ω 与 ω^2 对换, 证明相同. 设点 P,Q,R 对应复数 p,q,r. 令 $\omega=e^{i2\pi/3}=\cos(120^\circ)+i\sin(120^\circ)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, 满足 $\omega^3=1$ 与 $1+\omega+\omega^2=0$.

考虑边 BC 外侧的等边 $\triangle BCD$, 顶点顺序 $B\to C\to D$ 逆时针. 向量 $\overrightarrow{BD}$ 由 $\overrightarrow{BC}$ 逆时针旋转 60° 得到. 旋转 60° 的算子 $e^{i\pi/3}=\cos(60^\circ)+i\sin(60^\circ)=-\omega^2$. 点 D 对应复数 d 满足:

$$d-b=(c-b)(-\omega^2)\implies d=b-\omega^2(c-b)$$

中心 P 是 $\triangle BCD$ 的重心, 故

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{3}(b+c+d)\\&=\frac{1}{3}(b+c+b-\omega^2(c-b))\\&=\frac{1}{3}(2b+c-\omega^2c+\omega^2b)\end{aligned}$$

知乎@余命数 知乎@余命数

$$= \frac{1}{3}(b(2+\omega^2)+c(1-\omega^2))$$

由 $1+\omega+\omega^2=0, 2+\omega^2=1+(1+\omega^2)=1-\omega$, 故

$$p = \frac{1}{3}(b(1-\omega)+c(1-\omega^2))$$

同理, 对 CA 边外侧的 $\triangle CAE$, 顶点 $C\to A\to E$ 逆时针, 中心 Q:

$$q = \frac{1}{3}(c(1-\omega)+a(1-\omega^2))$$

对 AB 边外侧的 $\triangle ABF$, 顶点 $A\to B\to F$ 逆时针, 中心 R:

$$r = \frac{1}{3}(a(1-\omega)+b(1-\omega^2))$$

由复数 p,q,r 表示的三角形为正三角形, 充要条件是 $p^2+q^2+r^2=pq+qr+rp$, 等价地 $p+\omega q+\omega^2 r=0$ ($P\to Q\to R$ 逆时针) 或 $p+\omega^2 q+\omega r=0$. 检验第二个条件.

$$\begin{aligned}
&3(p+\omega^2 q+\omega r)\\
&=[b(1-\omega)+c(1-\omega^2)]+\omega^2[c(1-\omega)+a(1-\omega^2)]\\
&\quad+\omega[a(1-\omega)+b(1-\omega^2)]\\
&=b(1-\omega)+c(1-\omega^2)+c(\omega^2-\omega^3)\\
&\quad+a(\omega^2-\omega^4)+a(\omega-\omega^2)+b(\omega-\omega^3)
\end{aligned}$$

由 $\omega^3=1$ 与 $\omega^4=\omega$:

$$\begin{aligned}
&=b(1-\omega)+c(1-\omega^2)+c(\omega^2-1)+a(\omega^2-\omega)+a(\omega-\omega^2)+b(\omega-1)\\
&=a(\omega^2-\omega+\omega-\omega^2)+b(1-\omega+\omega-1)+c(1-\omega^2+\omega^2-1)\\
&=a(0)+b(0)+c(0)\\
&=0
\end{aligned}$$

由 $p+\omega^2 q+\omega r=0$, 三点 P,Q,R 构成正三角形. □

拿破仑定理的复数证明展示了几何问题如何代数化, 它把涉及多重几何构造的命题归约为一次代数验算.

整个构型译为复数语言后, 点 A,B,C 由复数 a,b,c 标识, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 由复数之差 $b-a$ 表示, 而等边三角形的构造即一次旋转. 在逆时针方向的 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AC}$ 即 $\overrightarrow{AB}$ 绕 A 逆时针旋转 60° 的结果, 对应于乘以 $e^{i\pi/3}$. 直接用 $e^{i\pi/3}$ 亦可, 但引入三

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

次单位根 $\omega = e^{i2\pi/3}$ 更为简洁, 其满足 $\omega^3 = 1$ 与 $1+\omega+\omega^2 = 0$, 处理正三角形对称性时不断消项; 旋转 60° 的算子写作 $-\omega^2$, 化简时反复用 $1+\omega+\omega^2 = 0$ 消去项, 避开三角函数的纠缠.

化简结果恒为零, 且与 a, b, c 的选取无关, 故无论 $\triangle ABC$ 形状如何, 其外侧等边三角形的中心必构成新等边三角形. 一个几何定理由此化为关于任意复数的代数恒等式, 显出几何图形背后的代数结构.

知乎@余命数

1.7 本章小结与思想方法

知乎@余命数

注 1.3 (本章知识网络)

- **概念与代数形式**
  - **定义**: $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, 虚数单位 i 满足 $i^2 = -1$.
  - **分类**: 实数 $(b = 0)$, 虚数 $(b \neq 0)$, 纯虚数 $(a = 0, b \neq 0)$.
  - **相等**: $a + bi = c + di \iff a = c, b = d$.
  - **共轭**: $\bar{z} = a - bi$.
  - **模**: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. 重要性质: $z\bar{z} = |z|^2$.
- **复数运算**
  - **加/减法**: $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$.(几何上遵循向量法则)
  - **乘法**: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
  - **除法**: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$.(要点是分母实数化)
  - i **的周期性**: $i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, i^{4k} = 1$.
- **几何意义与三角形式**
  - **复平面**: 实轴与虚轴, 复数 $z \leftrightarrow$ 点 $Z(a, b) \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OZ}$.
  - **三角形式**: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$、$r = |z|$、$\theta = \arg(z)$.
  - **乘除运算**: $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.(模相乘, 辐角相加)
  - **棣莫弗公式**: $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$.
  - **几何方程**: 圆 $|z - z_0| = r$, 直线 $|z - z_1| = |z - z_2|$.

注 1.4 (本章思想方法)

- **数形结合思想**: 贯穿本章. 复数把代数与几何联系起来.
  - **表示的结合**: 复数 $\leftrightarrow$ 点 $\leftrightarrow$ 向量, 模 $|z| \leftrightarrow$ 点到原点距离, 辐角 $\arg(z) \leftrightarrow$ 向量与实轴正向夹角.
  - **运算的结合**: 复数加减 $\leftrightarrow$ 向量平行四边形/三角形法则; 复数乘除 $\leftrightarrow$ 旋转与伸缩.
  - **问题的结合**: 许多代数问题, 如求模的最值, 可化为几何问题, 如求点到点或线的距离最值; 反之亦然, 如求轨迹方程.

知乎@余命数

- **分类讨论思想**：用于含参复数问题. 按题设条件对参数讨论，确定复数是实数、虚数还是纯虚数，或确定其在复平面上的位置. 讨论须不重不漏.
- **转化与化归思想**：解决复杂问题的入口.
  - **形式转化**：代数形式与三角形式，或指数形式相互转化. 高次幂运算优先化为三角形式；加减或求轨迹时代数形式往往更方便.
  - **问题转化**：复数除法通过乘以共轭化为乘法；复数高次幂通过棣莫弗公式化为实数乘法.
  - **领域转化**：三角函数恒等式的代数证明化为复数乘方问题；代数方程求根化为几何图形顶点问题.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 2 章

立体几何



基础语言

「数学的本质在于其自由。」

——康托尔

第二章 立体几何

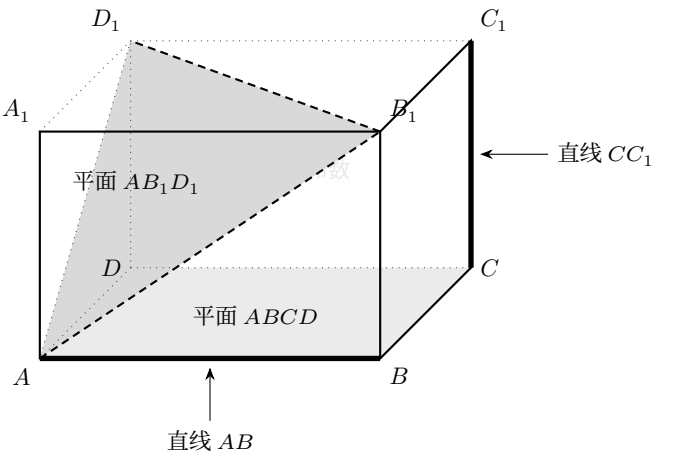


图 2.1 长方体中的直线与平面示意图

平面几何用公理体系描述二维空间. 在那里, 两条直线的位置关系只有相交与平行两种. 我们感知的物理世界是三维的. 要把几何从平面推广到空间, 我们必须引入新的基本元素, 并考察由此产生的更复杂的位置关系.

观察 图 2.1 中的平行六面体. 直线 AB 与直线 CC_1 不共面, 因此既不平行也不相交, 我们把这样的两条直线称为**异面直线**. 异面直线如何严格定义并研究, 两个平面在空间中相对倾斜的程度即**二面角**又如何刻画, 都是有赖于新体系才能说清的问题.

回答这些问题, 单靠直观不够. 我们扩展平面几何的公理基础, 建立一套适用于三维空间的演绎体系, 用它研究点、直线、平面三种基本元素之间位置关系的判定、性质与度量. 本章前半部分建立公理并给出位置关系的证明策略, 后半部分用空间向量与坐标法处理度量与计算.

2.1 基本公理与空间元素

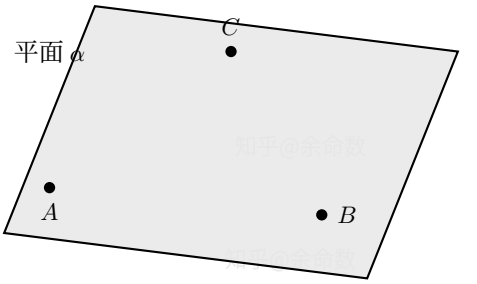
平面几何从点与直线这两个不加定义的基本元素出发. 立体几何引入第三个基本元素, 即**平面**, 我们用 α, β, γ 等希腊字母表示它. 这三种元素之间的基本关系由下面几条公理规定, 它们是一切逻辑推演的起点.

公理 2.1 不共线的三点确定唯一一个平面.

在空间中确定一个平面的位置, 依据的就是这条公理. 稳固的三脚架是它在物理世界中的对应物. 这条命题无法证明, 因为平面是不加定义的基本元素, 要证

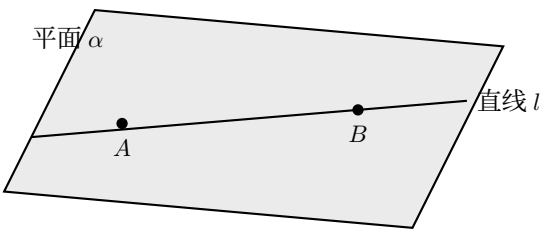
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

明它就得先有关于平面的更基本性质可用, 用公理证明公理是循环论证. 它之所以被接受, 在于与我们对平面的直接经验一致. 两点确定一条直线, 但过两点的平面有无穷多个(绕连线旋转即得); 一点更不够; 四点又可能不共面. 恰好三个不共线的点, 才把平面的位置钉死.



公理 2.2　若一条直线上有两点在一个平面内, 则该直线在这个平面内.

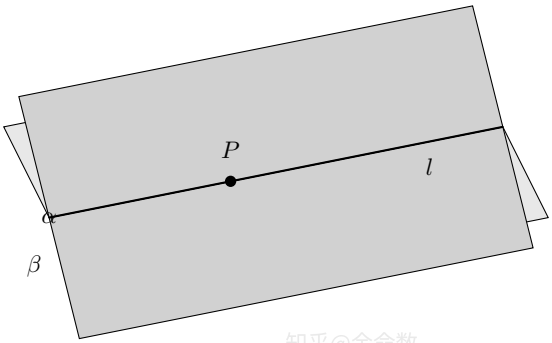
这条公理给出直线与平面之间的从属关系. 它保证了平面的平整性, 即平面上任意两点间的连线不会逃出该平面. 平面之所以为平面, 就在于它处处平直, 没有起伏. 若直线上已有两点落在某平面内, 而直线却有一部分翘出平面之外, 这个平面在该处就出现了弯折, 不再是平面. 要证明这条公理, 同样需要更基本的平面性质, 而这样的性质并不存在, 平整性本身就是我们对平面的原始认识.



公理 2.3　若两个不同平面有一个公共点, 则它们有且只有一条通过该点的公共直线.

这条公理排除了两个平面仅交于一点的可能, 并规定了两个不同平面相交的形态. 平面向各方向无限延伸, 两个这样的无限平面一旦在某点相遇, 必然沿着某个方向彼此贯穿, 贯穿的轨迹是一条直线. 若只交于一点, 则在这一点之外两平面立刻分离, 这要求平面在公共点处有某种边界或折痕, 与平面的无限延伸性相矛盾. 这条公理的依据是前两条公理所确立的无限延伸性与平直性, 三条公理彼此呼应, 共同锁定平面这一对象的全部基本特征.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 2.2 两平面相交公理的立体示意图

2.1.1 公理的推论

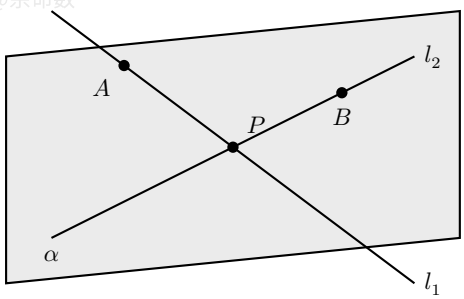
我们从这三条公理出发, 推导关于空间元素位置关系的基本定理.

定理 2.1 (相交直线确定平面) 两条相交直线确定唯一一个平面.

证明 设两直线 l_1, l_2 交于点 P. 在直线 l_1 上取异于 P 的一点 A, 在直线 l_2 上取异于 P 的一点 B. 由于 l_1 与 l_2 是不同的相交直线, 点 A, B, P 必然不共线. 据公理 1, 不共线的三点 A, B, P 确定唯一一个平面, 记为 α.

点 A 与点 P 均在平面 α 内, 且二者同在直线 l_1 上, 据公理 2 直线 l_1 落在平面 α 内. 同理, 点 B 与点 P 均在平面 α 内, 且二者同在直线 l_2 上, 据公理 2 直线 l_2 落在平面 α 内. 故存在一个包含 l_1, l_2 的平面 α. 任一包含 l_1, l_2 的平面都必须包含点 A, B, P, 而这三点仅能确定一个平面, 因而该平面唯一. □

知乎@余命数



定理 2.2 (平行直线确定平面) 两条平行直线确定唯一一个平面.

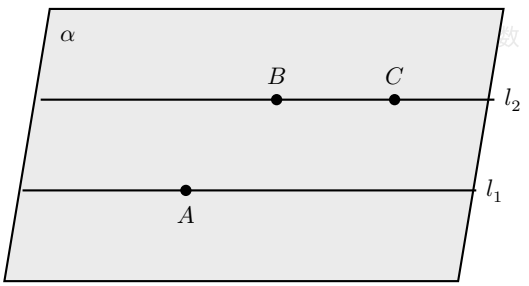
证明 设两直线 l_1, l_2 相互平行. 据平行直线的定义, 二者共面, 因而至少存在一个平面同时包含 l_1, l_2.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为证唯一，在直线 l_1 上取一点 A，在直线 l_2 上取两点 B, C. 由 $l_1 \parallel l_2$ 知两直线无公共点，故 $A \notin l_2$，从而 A, B, C 不共线. 据公理 1，不共线三点 A, B, C 确定唯一平面 α.

点 B, C 在 α 内，由公理 2 得 $l_2 \subset \alpha$. 又平行直线 l_1, l_2 共面，且过直线 l_2 与直线外一点 A 的平面唯一，故包含 l_2 与 A 的共面平面只能是 α，因而 $l_1 \subset \alpha$.

任一同时包含 l_1, l_2 的平面都含 A, B, C 三点，故只能是 α. 两条平行直线确定唯一一个平面. □



2.1.2 空间中直线与平面的位置关系

有了这些公理，我们就可以对空间中基本元素之间可能的位置关系进行分类.

三维空间比平面多一个维度，位置关系也更复杂. 我们依次考察直线与直线、直线与平面、平面与平面这三组基本关系.

2.1.2.1 直线与直线的位置关系

在平面几何中，两条不同直线的位置关系只有两种，即有公共点时相交于一点，无公共点时相互平行. 这种划分隐含了一个前提，即两条直线位于同一个平面上. 进入三维空间后，这一前提不再必然成立，于是出现了新的可能.

因此，我们对空间中两条直线 l_1, l_2 分类时，第一个判据是**共面性**.

定义 2.1 (空间中两直线的位置关系) 设 l_1, l_2 为空间中两条不同的直线. 我们按它们是否共面，把位置关系分成两层来定义.

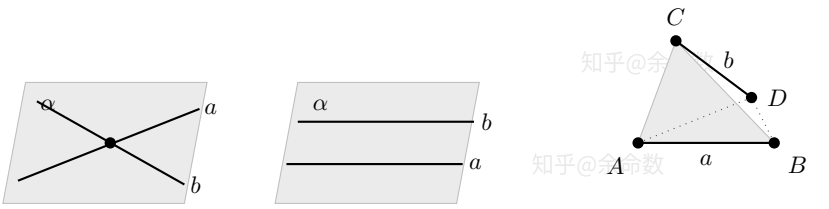
1. **共面直线**：若存在一个平面 α 同时包含 l_1 和 l_2. 在此前提下，其位置关系与平面几何中的情况完全一致.
   - 若 l_1, l_2 有且仅有一个公共点，则称它们**相交**.
   - 若 l_1, l_2 没有公共点，则称它们**平行**.
2. **异面直线**：若不存在任何一个平面能同时包含 l_1 和 l_2，则称这两条直线**异面**.

这样分类之后，判断两条直线的关系时，我们先问它们是否共面.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 若共面, 则问题降维为熟知的二维平面问题, 后续只需考察公共点的个数.
- 若不共面, 则无需再考察公共点, 这两条直线的位置关系便唯一确定为异面. 异面直线既不平行, 因为平行线必须共面, 也不相交, 否则两相交直线必确定唯一平面, 与不共面矛盾.

知乎@余命数



相交　　平行　　异面

图 2.3　空间中两直线的三种位置关系

在具体问题中判定两条直线 l_1, l_2 的位置关系, 可以按下面的顺序进行. 先判断它们是否共面. 我们用几何构造来判断. 在 l_1 上取一点 A, 在 l_2 上取一点 B. 若 $l_1 \parallel l_2$ 或 l_1, l_2 相交, 则它们共面. 若不属于这两种情况, 则在 l_1 上另取一点 C. 如果 A, B, C 以及 l_2 均在同一个平面内, 则 l_1, l_2 共面.

若已确定 l_1, l_2 共面, 则问题退化为平面几何问题, 只需判断它们是否有公共点. 若有, 则相交; 若无, 则平行.

若通过任何构造都无法将 l_1, l_2 置于同一平面内, 例如, 在四面体中, 底面的边 AB 与其上方的棱 CD, 则根据定义, 它们是异面直线.

于是, 相交、平行、异面给出了空间中任意两条不同直线位置关系的完备且互斥的分类.

知乎@余命数

2.1.2.2 直线与平面的位置关系

设 l 是直线, α 是平面. 我们考察它们公共点的个数. 这个数只能是 0, 1 或无穷, 它给出了对位置关系分类的自然依据.

定义 2.2 (直线与平面的位置关系) 设 l 为直线, α 为平面.

- 若 l 与 α 有且仅有一个公共点, 则称直线与平面**相交**.
- 若 l 与 α 没有公共点, 则称直线与平面**平行**, 记作 $l \parallel \alpha$.
- 若 l 与 α 有无穷多个公共点, 则称**直线在平面内**, 记作 $l \subset \alpha$.

公共点的个数不能是 2 或更大的有限数. 根据公理 2, 若一条直线上有两点在平面内, 则该直线必在平面内. 于是公共点一旦有两个, 就必有无穷多个.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

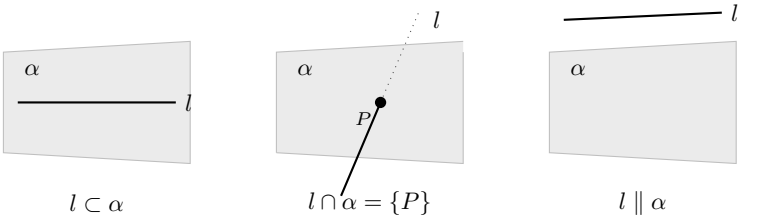


图 2.4　直线与平面的三种位置关系

知乎@余命数

2.1.2.3 平面与平面的位置关系

最后, 我们考察两个平面 α 和 β 在空间中的位置关系. 这种关系由它们的公共点集的形态决定.

定义 2.3 (平面与平面的位置关系) 设 α, β 为两个不同的平面.

- 若 α 与 β 没有公共点, 则称这两个平面**平行**, 记作 $\alpha \parallel \beta$.
- 若 α 与 β 有公共点, 则称这两个平面**相交**.

公理 3 直接规定了相交平面的形态. 两个不同平面若有公共点, 则它们必交于一条通过该点的直线. 于是两平面不可能仅交于一点或一条线段. 交集若非空, 必为一条无限延伸的直线. 至此, 我们定义完了空间基本元素之间的位置关系.



图 2.5　平面与平面的两种位置关系

知乎@余命数

2.1.3 本节习题

2.1.　判断以下论断是否为真, 并基于本节公理与推论阐述理由. 空间中任意四个点必然共面.

2.2.　证明一条直线与不经过该直线的一个点, 确定唯一一个平面.

2.3.　设四点 A, B, C, D 不共面. 证明连接 A, B 的直线与连接 C, D 的直线是异面直线.

知乎@余命数

2.4. 在空间四边形 $ABCD$, 即四顶点不共面的四边形中, 点 M, N, P, Q 分别是棱 AB, BC, CD, DA 上的点. 若直线 MN 与直线 PQ 相交于点 K. 证明: A, C, K 三点共线.

2.5. 考察空间中三条不同的直线 l_1, l_2, l_3. 若它们两两相交, 证明这三条直线或者共点, 或者共面.

2.6. 考察空间中四条不同的直线, 其中任意三条都不共面. 若这四条直线中的每一条都与其他三条相交, 证明这四条直线必共点.

知乎@余命数

2.7. 设三个互不重合的平面 α, β, γ 两两相交, 且其三条交线互不平行. 证明这三条交线必共点.

2.8. (空间中的迪沙格定理) 设 O, A, B, C, A', B', C' 为空间中七个不同的点, 且 A, B, C 不共线, A', B', C' 亦不共线. 若三条直线 AA', BB', CC' 交于一点 O. 设平面 ABC 与平面 $A'B'C'$ 相交于直线 l. 证明: 两组对应边的交点, 即 $P = AB \cap A'B'$、$Q = BC \cap B'C'$、$R = CA \cap C'A'$ 三点均在直线 l 上, 因而共线.

知乎@余命数

2.2 证明线线平行的基本策略

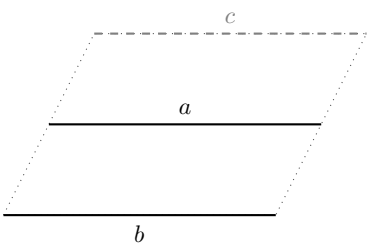
给定空间中两条直线 a, b, 证明它们相互平行 (记作 $a \parallel b$) 的基本思路有两条. 一条是把空间问题化为平面问题, 另一条是借助线面平行、面面平行这类更高层级的平行关系来推导. 由此得到三种常用策略.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

2.2.1 利用平行公理的传递性

此法的理论基础是平行公理的传递性, 即平行于同一直线的两条直线互相平行.

这是最直接的方法. 设 c 是一条中间直线. 如果我们分别证明了 $a \parallel c$ 与 $b \parallel c$, 那么由传递性即得 $a \parallel b$. 这条中间直线 c 通常取某个辅助平面图形, 如三角形、平行四边形的边或对角线.

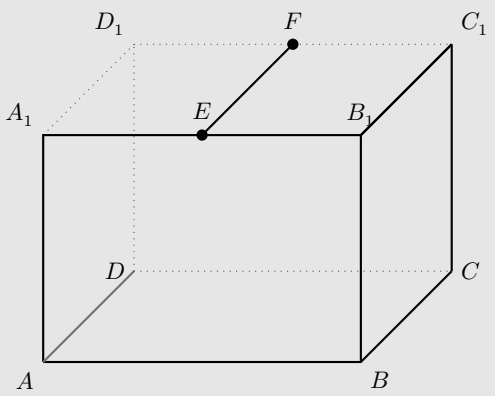


在梯形 $ABCD$ 中, 中位线 EF 平行于底边 DC 和 AB.

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.1　在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 E,F 分别是棱 A_1B_1 和 C_1D_1 的中点. 求证：$EF \parallel AD$.



知乎@余命数

证明　我们用传递性. 只要找到一条与 EF 和 AD 都平行的中间直线即可.

平行六面体的顶面 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形，故

知乎@余命数

$$A_1B_1 \parallel D_1C_1 \quad 且 \quad A_1B_1 = D_1C_1.$$

点 E,F 分别是 A_1B_1 与 C_1D_1 的中点，故

知乎@余命数

$$A_1E = \tfrac{1}{2}A_1B_1, \quad D_1F = \tfrac{1}{2}D_1C_1,$$

从而 $A_1E \parallel D_1F$ 且 $A_1E = D_1F$，四边形 A_1EFD_1 是平行四边形，对边 $EF \parallel A_1D_1$.

侧面 ADD_1A_1 同为平行四边形，故 $AD \parallel A_1D_1$. 以直线 A_1D_1 为中转，据平行公理的传递性，

知乎@余命数

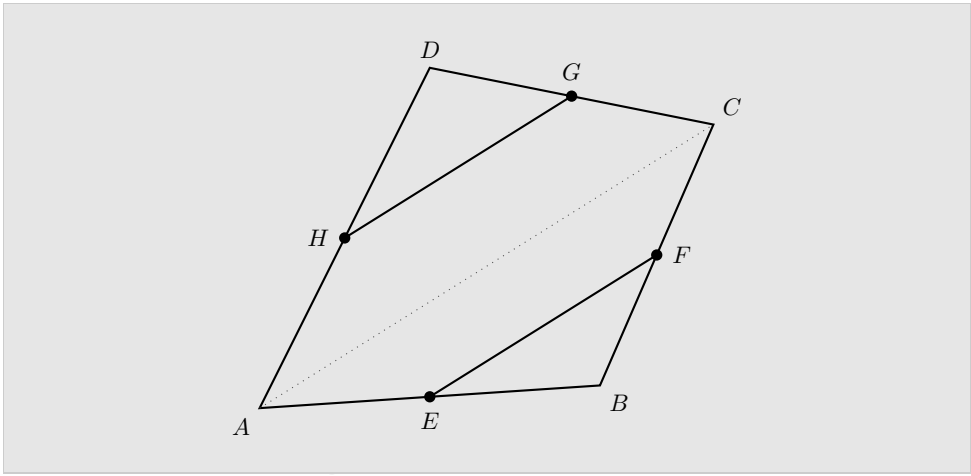
$$EF \parallel AD.$$

□

例题 2.2　在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点. 求证：$EF \parallel HG$.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



证明 四点 A,B,C,D 不共面. 连接对角线 AC, 就把空间问题放进平面几何的框架内.

在 $\triangle ABC$ 中, E,F 分别为 AB,BC 的中点, 据三角形中位线定理,

$$EF \parallel AC.$$

在 $\triangle ADC$ 中, H,G 分别为 DA,CD 的中点, 同理

$$HG \parallel AC.$$

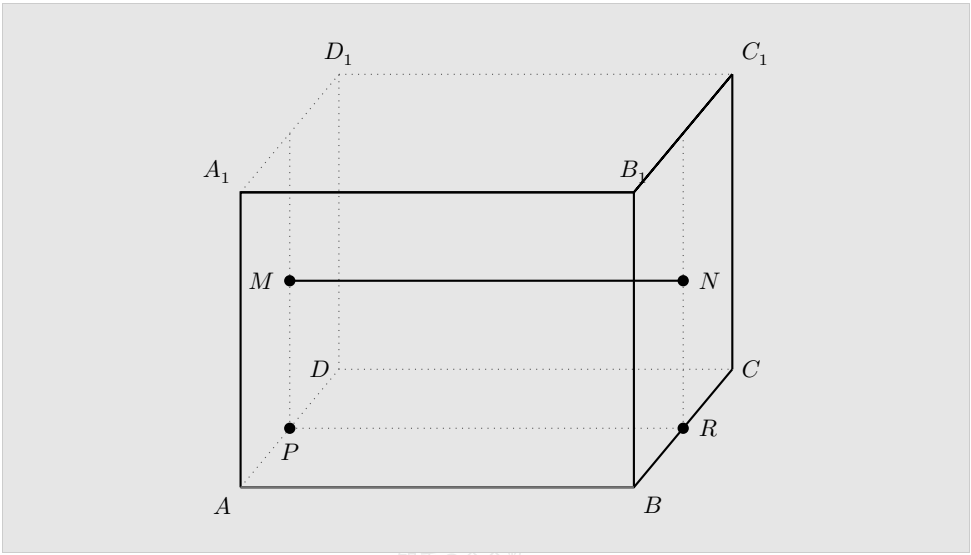
AC 作为 EF 与 HG 的中介. 由 $EF \parallel AC$ 与 $HG \parallel AC$, 据平行公理的传递性,

$$EF \parallel HG.$$

由此并得四边形 $EFGH$ 是平行四边形. □

例题 2.3 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 M,N 分别是侧面 ADD_1A_1 与 BCC_1B_1 的中心. 求证: $MN \parallel AB$.

知乎@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

证明 平行四边形的中心是两条对角线的交点, 也是对角线的中点. 于是 M 是对角线 AD_1 与 A_1D 的中点, N 是对角线 BC_1 与 B_1C 的中点. 面中心的问题就化为边中点的问题.

在平行六面体中, $AB \parallel D_1C_1$ 且 $AB = D_1C_1$, 故 ABC_1D_1 是平行四边形. 其中 M, N 分别是边 AD_1, BC_1 的中点. 连接 AC_1, 设 O 为其中点. 在 $\triangle ABC_1$ 中, O, N 分别为 AC_1, BC_1 的中点, 故

$$ON \parallel AB.$$

在 $\triangle AD_1C_1$ 中, O, M 分别为 AC_1, AD_1 的中点, 故

$$OM \parallel D_1C_1.$$

由 $D_1C_1 \parallel AB$ 与平行公理的传递性, 得 $OM \parallel AB$.

$ON \parallel AB$ 与 $OM \parallel AB$ 同时成立, 而 OM, ON 皆过点 O. 据过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行的公理, M, O, N 共线, 故 $MN \parallel AB$. □

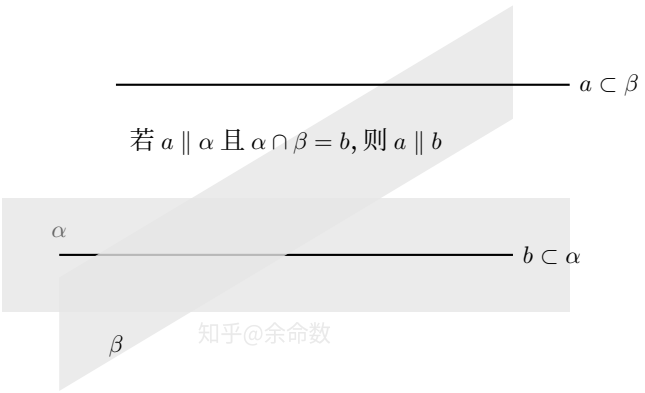
知乎@余命数

2.2.2 利用线面平行的性质定理

此法的理论基础是线面平行的性质定理. 设直线 a 与平面 α 平行, β 是过 a 的任意一个平面, 且 β 与 α 相交于直线 b, 那么 $a \parallel b$.

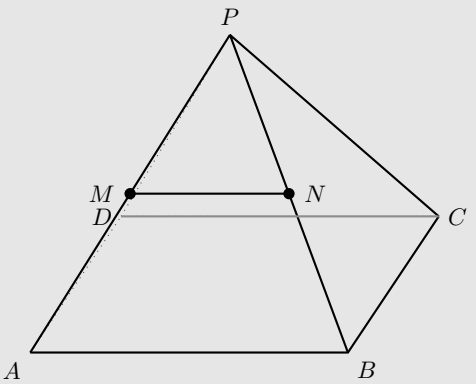
我们用降维的办法. 要证 $a \parallel b$, 先构造一个包含 b 的平面 α, 证明 $a \parallel \alpha$. 再指出 a 与 b 同在另一个平面 β 内, 且 β 与 α 的交线恰好是 b. 根据线面平行的性质定理, 即得 $a \parallel b$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

例题 2.4 设四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形, 点 M, N 分别是棱 PA, PB 的中点. 求证: MN 平行于平面 PCD 与平面 $ABCD$ 的交线.



余命数
知乎@余命数

证明 题中已给直线 MN, 另一条直线是平面 PCD 与平面 $ABCD$ 的交线. 这两个平面都过棱 CD, 故交线就是 CD, 问题归为证 $MN \parallel CD$.

知乎@余命数

在 $\triangle PAB$ 中, M, N 分别为 PA, PB 的中点, 据三角形中位线定理 $MN \parallel AB$. 又底面 $ABCD$ 是平行四边形, 故 $AB \parallel CD$. 据平行公理的传递性, 由 $MN \parallel AB$ 与 $AB \parallel CD$ 推得 $MN \parallel CD$.

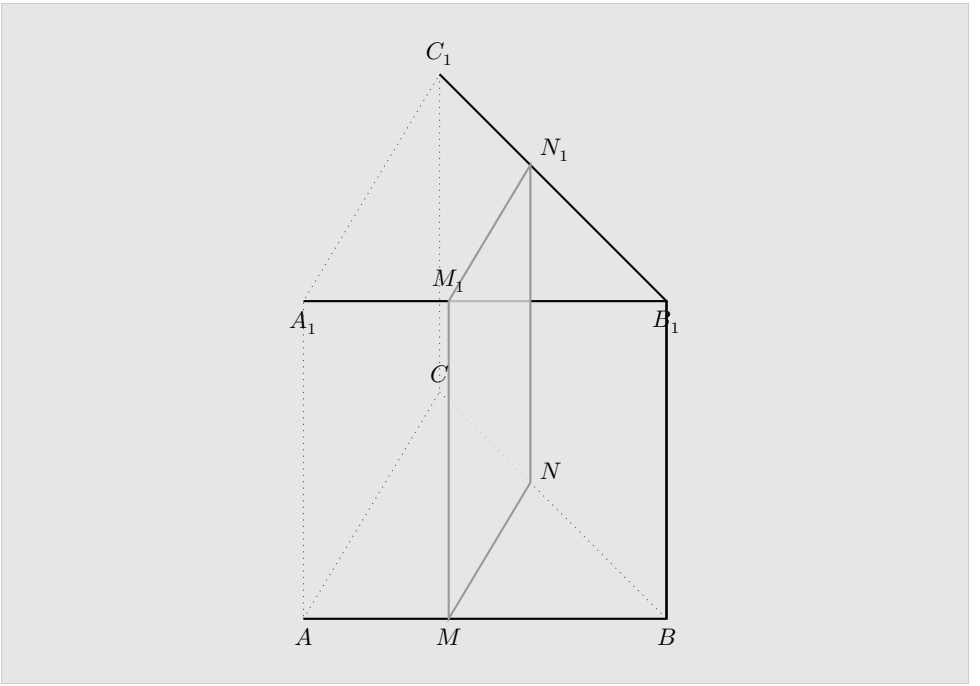
知乎@余命数

而 CD 正是平面 PCD 与平面 $ABCD$ 的交线, 故 MN 平行于二者的交线. □

知乎@余命数

例题 2.5 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 一个平面 β 与棱 AC 平行, 且与棱 AB, BC, A_1B_1, B_1C_1 分别交于点 M, N, M_1, N_1. 求证: $MN \parallel M_1N_1$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



证明 我们用传递性来证 $MN \parallel M_1N_1$. 题设的关键条件是线面平行关系 平面$\beta \parallel AC$, 即 $AC \parallel$ 平面β.

直线 AC 含于底面 ABC, 可以应用线面平行的性质定理. 已知 AC 与平面 β (即平面 MNN_1M_1)平行, 平面 ABC 过 AC, 它与 β 的交线是 MN. 根据定理,

$$MN \parallel AC.$$

在三棱柱中, 侧面 ACC_1A_1 是平行四边形, 故 $AC \parallel A_1C_1$.

若 A_1C_1 落在平面 β 内, 则平面 $A_1B_1C_1$ 与 β 的交线为 A_1C_1, 即 $M_1N_1 = A_1C_1$, 由 $MN \parallel AC \parallel A_1C_1$ 已得结论. 否则, 由 $AC \parallel$ 平面β 与 $AC \parallel A_1C_1$ 推出 $A_1C_1 \parallel$ 平面β.

对顶面重复同一论证.A_1C_1 与平面 β 平行, 平面 $A_1B_1C_1$ 过 A_1C_1, 它与 β 的交线是 M_1N_1. 根据同一性质定理,

$$M_1N_1 \parallel A_1C_1.$$

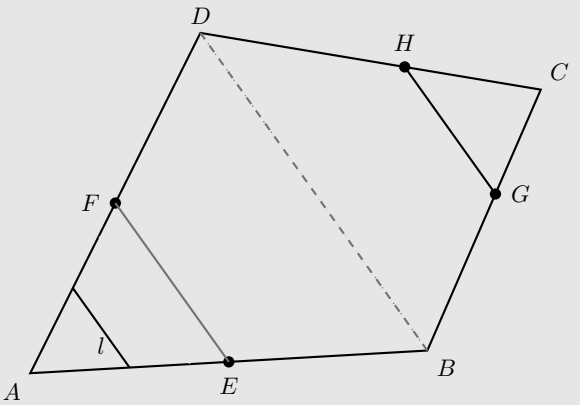
现有 $MN \parallel AC$, $M_1N_1 \parallel A_1C_1$, 且 $AC \parallel A_1C_1$. 据平行公理的传递性,

$$MN \parallel M_1N_1.$$

□

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.6 在一个空间四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是边 AB, AD 的中点. 一个平面 α 经过 GH, 其中 G, H 分别是边 BC, CD 上的点, 且平面 α 平行于直线 EF. 若平面 α 与平面 ABD 的交线为 l, 求证: $l \parallel BD$.



证明 我们用线面平行的性质定理来证 $l \parallel BD$. 题设给出平面 $\alpha \parallel$ 直线 EF, 即 $EF \parallel \alpha$; 又 $l =$ 平面$\alpha \cap$ 平面ABD, 定理的条件正好齐备.

直线 EF 与平面 α 平行, 且含于平面 ABD 之中. 根据定理, 过 EF 的平面 ABD 与 α 的交线 l 必与 EF 平行, 即

$$l \parallel EF.$$

问题由 $l \parallel BD$ 归为 $EF \parallel BD$.

后者是平面几何问题. 在 $\triangle ABD$ 中, E, F 分别为 AB, AD 的中点, 据三角形中位线定理,

$$EF \parallel BD.$$

结合 $l \parallel EF$ 与 $EF \parallel BD$, 据平行公理的传递性,

$$l \parallel BD.$$

□

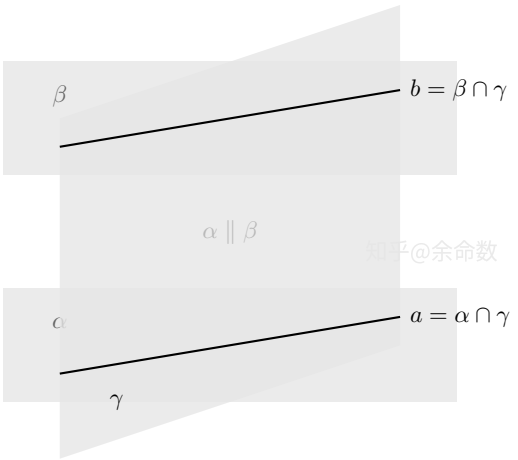
2.2.3 利用面面平行的性质定理

此法的理论基础是面面平行的性质定理, 即若两个平行平面同时与第三个平面相交, 那么它们的交线平行.

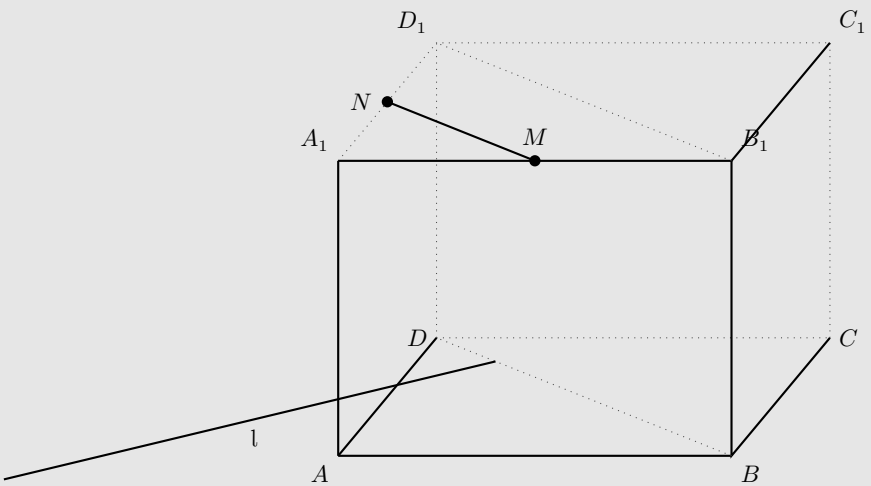
要证 $a \parallel b$, 我们构造两个相互平行的平面 α 与 β, 使 a 在 α 内, b 在 β 内. 再找第三个平面 γ, 它与 α 和 β 都相交, 且交线恰好分别是 a 与 b, 即 $\alpha \cap \gamma = a$ 且 $\beta \cap \gamma = b$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此时根据面面平行的性质定理, $a \parallel b$. 作截面时也常用这个定理. 几何体被一族平行平面所截, 截面轮廓线中那些平行的边就来自这里.



例题 2.7 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 M, N 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点. 一个过点 A, M, N 的平面 γ 与底面 $ABCD$ 相交于直线 l. 求证:$l \parallel BD$.



证明 我们用面面平行的性质定理来证 $l \parallel BD$. 顶面 $A_1B_1C_1D_1$ 与底面 $ABCD$ 平行. 记顶面为 β, 底面为 α, 则

$$\alpha \parallel \beta.$$

平面 γ(即平面 AMN)与这两个平面相交. 题设 γ 与底面 α 的交线为 l, 即

$$l = \gamma \cap \alpha.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

点 M,N 分别在棱 A_1B_1,A_1D_1 上,故同在平面 β 内. 它们又同在平面 γ 内,所以直线 MN 就是 γ 与 β 的交线,即

$$MN=\gamma\cap\beta.$$

两个平行平面 α,β 被第三平面 γ 所截,交线分别为 l 与 MN,据面面平行性质定理,

$$l\parallel MN.$$

问题归为证 $MN\parallel BD$.

在顶面 $\triangle A_1B_1D_1$ 中,M,N 分别为 A_1B_1,A_1D_1 的中点,据三角形中位线定理,

$$MN\parallel B_1D_1.$$

正方体中侧棱平行且相等,四边形 BDD_1B_1 是矩形,故

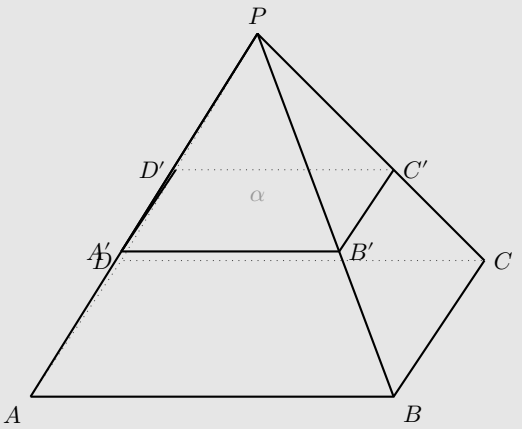
$$BD\parallel B_1D_1.$$

合 $l\parallel MN$, $MN\parallel B_1D_1$, $B_1D_1\parallel BD$,据传递性,

$$l\parallel BD.$$

□

例题 2.8 设有一棱锥 $P-ABCD$,其底面 $ABCD$ 为平行四边形. 一个平行于底面的平面 α 与棱 PA,PB,PC,PD 分别相交于点 A',B',C',D'. 求证: 四边形 $A'B'C'D'$ 是一个平行四边形.



证明 即证四边形 $A'B'C'D'$ 的两组对边分别平行, 即证 $A'B'\parallel D'C'$ 且 $A'D'\parallel B'C'$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

题设平面 $A'B'C'D'$（即平面 α）与底面 $ABCD$ 平行，即

$$\text{平面}A'B'C'D' \parallel \text{平面}ABCD.$$

侧面 PAB 同时与这两个平面相交，与 $A'B'C'D'$ 交于 $A'B'$，与 $ABCD$ 交于 AB. 根据面面平行的性质定理，

$$A'B' \parallel AB.$$

侧面 PCD 同样与这两个平面相交，与 $A'B'C'D'$ 交于 $D'C'$，与 $ABCD$ 交于 DC. 根据同一性质定理，

$$D'C' \parallel DC.$$

底面 $ABCD$ 是平行四边形，故 $AB \parallel DC$. 合 $A'B' \parallel AB$，$AB \parallel DC$，$DC \parallel D'C'$，据传递性，

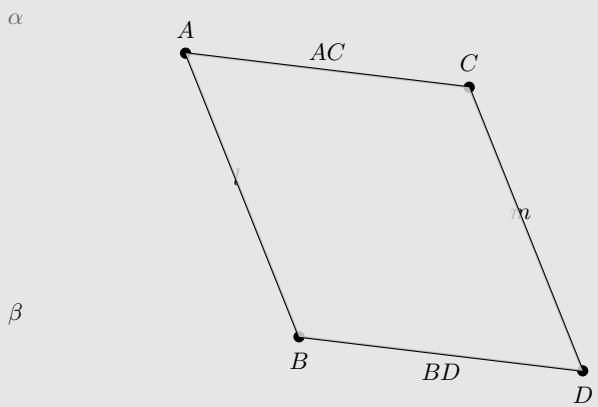
$$A'B' \parallel D'C'.$$

同理，侧面 PAD 给出 $A'D' \parallel AD$，侧面 PBC 给出 $B'C' \parallel BC$，底面给出 $AD \parallel BC$. 据传递性，

$$A'D' \parallel B'C'.$$

四边形 $A'B'C'D'$ 两组对边分别平行，故为平行四边形. □

例题 2.9　设 α 与 β 为两个相互平行的平面. 一条直线 l 与它们都相交，交点分别为 $A \in \alpha$ 和 $B \in \beta$. 另有一点 C 在平面 α 内，且 $C \neq A$. 过点 C 作直线 m，使得 $m \parallel l$，且 m 与平面 β 交于点 D. 求证：$AC \parallel BD$.



证明　已知 $l \parallel m$. 由 $C \neq A$ 且 l 与平面 α 仅交于点 A，可知 m 与 l 不重合. 两条平行直线共面，设含 l 与 m 的平面为 γ.

点 A, B 在直线 l 上，点 C, D 在直线 m 上，故四点皆在平面 γ 内.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

已知 $\alpha \parallel \beta$. 平面 γ 与平面 α 相交, 其交线是含全部公共点的直线; 点 A, C 既在 α 内又在 γ 内, 故为公共点, 从而

$$AC = \gamma \cap \alpha.$$

同理, 点 B, D 既在 β 内又在 γ 内, 故

$$BD = \gamma \cap \beta.$$

两平行平面 α, β 被第三平面 γ 所截, 交线分别为 AC 与 BD. 据面面平行性质定理,

$$AC \parallel BD.$$

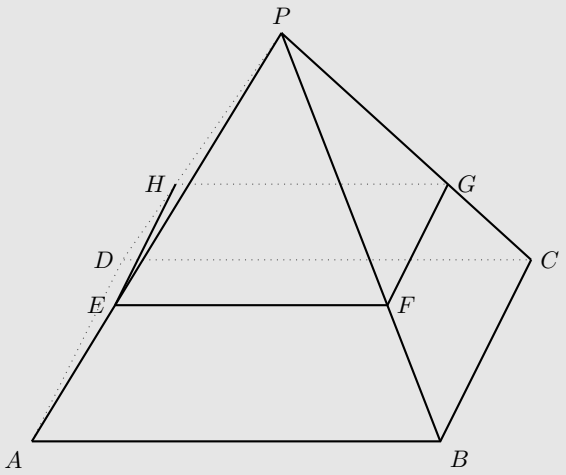
由此并得四边形 $ACDB$ 是平行四边形. □

2.2.4 计算问题

与平行有关的计算问题, 大多归结为求线段长度. 我们的做法是先用上面的平行判定定理与性质定理, 从线面平行或面面平行推出所需的线线平行.

有了线线平行, 就能构造一个包含目标线段的平面图形, 如三角形或梯形, 把空间中的长度计算降为平面几何问题, 再用相似、全等、三角函数或勾股定理求解.

例题 2.10 在一个底面为平行四边形的四棱锥 $P - ABCD$ 中, 一个平行于底面的平面 α 与棱 PA, PB, PC, PD 分别交于点 E, F, G, H. 若 $PE : EA = 2 : 1$, 且底面边长 $AB = 9, BC = 6$, 求截面四边形 $EFGH$ 的周长.



知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 即求 $EF+FG+GH+HE$. 为此, 我们要建立截面边长与底面边长的定量关系. 题设截面 $EFGH$ 与底面 $ABCD$ 平行, 即

$$\text{平面}EFGH \parallel \text{平面}ABCD,$$

这正好可以应用面面平行的性质定理.

侧面 PAB 与二平行平面相交, 与 $EFGH$ 交于 EF, 与 $ABCD$ 交于 AB, 据定理 $EF \parallel AB$. 在 $\triangle PAB$ 中, 由 $EF \parallel AB$ 得 $\triangle PEF \sim \triangle PAB$, 故

$$\frac{EF}{AB}=\frac{PE}{PA}.$$

题设 $PE:EA=2:1$, 即 $PA=PE+EA$ 合 3 份而 PE 占 2 份, 故 $\frac{PE}{PA}=\frac{2}{3}$. 结合 $AB=9$,

$$EF=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}\times 9=6.$$

侧面 PBC 同样截二平行平面, 交线为 FG 与 BC, 故 $FG \parallel BC$ 且 $\triangle PFG \sim \triangle PBC$. 平行平面族截过同一点的直线族, 所得线段成比例. 在 $\triangle PAB$ 中, 由 $EF \parallel AB$ 已得 $\frac{PF}{PB}=\frac{PE}{PA}=\frac{2}{3}$, 故

$$FG=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

底面 $ABCD$ 是平行四边形, 截面 $EFGH$ 亦为平行四边形, 故 $GH=EF=6$, $HE=FG=4$.

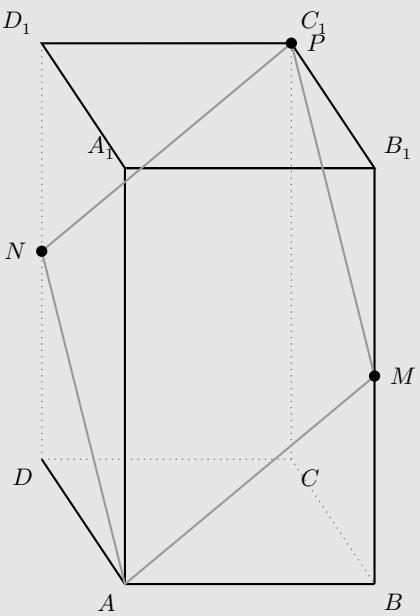
各边相加, 截面四边形 $EFGH$ 的周长为

$$C_{EFGH}=EF+FG+GH+HE=6+4+6+4=20.$$

□

例题 2.11 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=3, AD=4, AA_1=5$. 点 M, N 分别是棱 BB_1, DD_1 的中点. 一个过点 A, M, N 的平面 α 与棱 CC_1 交于点 P. 求线段 MP 的长度.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数



证明 即求 MP 的长度, 我们把它放进一个可计算的平面图形中. 长方体的侧面 ADD_1A_1 与侧面 BCC_1B_1 平行, 即

$$\text{平面}ADD_1A_1 \parallel \text{平面}BCC_1B_1.$$

平面 α(即平面 AMN)与这两个平行侧面相交, 与 ADD_1A_1 交于 AN, 与 BCC_1B_1 交于 MP. 由平行关系可知交点实为 $P = C_1$, 即棱 CC_1 的端点. 根据面面平行的性质定理,

$$AN \parallel MP.$$

同理, 前后两侧面 ABB_1A_1 与 DCC_1D_1 平行, 平面 α 与之分别交于 AM 与 NP, 故

$$AM \parallel NP.$$

四边形 $AMNP$ 两组对边分别平行, 是平行四边形, 对边等长, 即

$$MP = AN.$$

空间长度问题转化为平面 ADD_1A_1 内的计算问题.

在矩形 ADD_1A_1 中求对角线 AN. 长方体的侧棱 DD_1 垂直于底面, 故 $DD_1 \perp AD$, $\triangle ADN$ 是以 $\angle D$ 为直角的直角三角形. 题设 $AD = 4$; 点 N 是棱 DD_1 的中点, 且 $DD_1 = AA_1 = 5$, 故 $DN = \frac{1}{2}DD_1 = \frac{5}{2}$.

知乎@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在 Rt△ADN 中应用勾股定理,

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 = 4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \text{（勾股定理）}$$
$$= 16 + \frac{25}{4} = \frac{64+25}{4} = \frac{89}{4},$$

故

$$AN = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}.$$

由 $MP = AN$ 得

$$MP = \frac{\sqrt{89}}{2}.$$

知乎@余命数　知乎@余命数

□

2.2.5 高考真题选讲

知乎@余命数

以下高考真题考查线线平行的判定与线面平行的证明.

例题 2.12 (2021 年浙江卷第 6 题) 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$、M、N 分别是 A_1D, D_1B 的中点, 则

A. 直线 A_1D 与直线 D_1B 垂直, 直线 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$

B. 直线 A_1D 与直线 D_1B 平行, 直线 $MN \perp$ 平面 BDD_1B_1

C. 直线 A_1D 与直线 D_1B 相交, 直线 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$

D. 直线 A_1D 与直线 D_1B 异面, 直线 $MN \perp$ 平面 BDD_1B_1

解 答案: A. 连接 AD_1.$A_1D \perp AD_1$ 且 $A_1D \perp AB$, 故 $A_1D \perp$ 平面 ABD_1, 从而 $A_1D \perp D_1B$.

MN 是 $\triangle D_1AB$ 的中位线, $MN \parallel AB$. 由 $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $MN \not\subset$ 平面 $ABCD$, 得 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.

$A_1 \notin$ 平面 BDD_1B_1 而 $D_1B \subset$ 平面 BDD_1B_1, 且 A_1D 与平面 BDD_1B_1 的交点 D 不在 D_1B 上, 故 A_1D 与 D_1B 异面, 排除 B、C.$MN \parallel AB$, AB 不垂直于平面 BDD_1B_1, 故 MN 也不垂直于该平面, 排除 D.

例题 2.13 (2020 年北京卷第 16 题) 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为 BB_1 的中点.

1. 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1E;
2. 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 (1) 由正方体的性质, $AB \parallel C_1D_1$ 且 $AB = C_1D_1$, 故四边形 ABC_1D_1 是平行四边形, $BC_1 \parallel AD_1$. 又 $BC_1 \not\subset$ 平面 AD_1E, $AD_1 \subset$ 平面 AD_1E, 依线面平行判定定理, $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1E.

(2) 以 A 为原点, AB、AD、AA_1 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系. 设正方体棱长为 a, 则 $A(0,0,0)$、$A_1(0,0,a)$、$D_1(0,a,a)$、$E(a,0,\frac{a}{2})$.

$\overrightarrow{AA_1} = (0,0,a)$、$\overrightarrow{AD_1} = (0,a,a)$、$\overrightarrow{AE} = (a,0,\frac{a}{2})$.

设平面 AD_1E 的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$, 由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0$ 及 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ 得

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ x + \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

知乎@余命数

令 $z = 2$, 则 $\vec{n} = (-1,-2,2)$.

设直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角为 θ, 则

知乎@余命数

$$\sin\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA_1}|}{|\vec{n}|\,|\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

余命数
知乎@余命数

2.3 空间中的平行关系

平面几何中我们已经熟悉线线平行. 把它推广到空间, 要回答的是一条直线何时与一个平面平行, 以及两个平面何时相互平行. 我们先给出严格定义, 再为每种平行各配一个判定定理与一个性质定理.

知乎@余命数

2.3.1 直线与平面平行

直线与平面的位置关系有三种, 我们先研究其中的平行. 一条直线与一个平面平行, 直观上看, 这条直线无论怎样延伸都不会与该平面相遇. 用集合的语言说, 直线与平面作为点集, 其交集为空.

定义 2.4 (直线与平面平行) 若直线 l 与平面 α 的交集为空集, 即 $l \cap \alpha = \emptyset$, 则称直线 l 与平面 α **平行**, 记作 $l \parallel \alpha$.

直接用定义判定平行是困难的, 它要求我们验证直线与平面这两个无穷点集没有任何公共元素. 下面的判定定理把这件事简化, 只需在平面内找到一条与已知直线平行的直线.

定理 2.3 (线面平行判定定理) 若一个平面之外的一条直线与此平面内的某一条直线平行, 则该直线与此平面平行.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 设直线 $l \not\subset \alpha$, 且平面 α 内存在直线 m 使 $l \parallel m$, 即证 $l \cap \alpha = \emptyset$.

用反证法. 设 l 与 α 不平行, 则有公共点 P:

$$P \in l \quad \text{且} \quad P \in \alpha.$$

据平行直线的定义, l 与 m 共面, 设此唯一平面为 β. 由 $P \in l \subset \beta$ 知 $P \in \beta$; 又 $m \subset \alpha$ 且 $m \subset \beta$, 即 m 是 α 与 β 的一条公共直线.

点 P 同时属于 α, β, 故落在二者的交线上. 两平面若相交则交于唯一一条直线(此处 $l \not\subset \alpha$, 故 α, β 不重合), 而 m 已是其一公共直线, 故交线即 m, 从而 $P \in m$.

于是点 P 同时在 l 与 m 上, 与 $l \parallel m$(两平行线无公共点)矛盾. 故 l 与 α 无公共点, 即 $l \parallel \alpha$. □

知乎@余命数

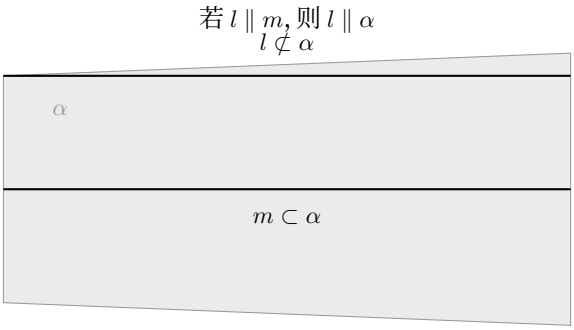
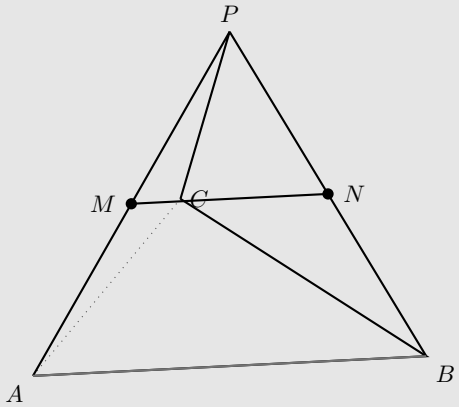


图 2.6　线面平行判定定理的几何直观

用这个定理证明线面平行, 归结为在平面内寻找一条与已知直线平行的直线.

知乎@余命数

例题 2.14　在四面体 $P-ABC$ 中, 设点 M, N 分别是棱 PA, PB 的中点. 求证: $MN \parallel$ 平面 ABC.



证明 即证直线 MN 与平面 ABC 平行. 据线面平行判定定理, 只需在平面 ABC 内找到一条与 MN 平行的直线.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在 $\triangle PAB$ 中, M, N 分别为 PA, PB 的中点, 据三角形中位线定理, MN 平行于第三边 AB:

$$MN \parallel AB.$$

直线 AB 含于平面 ABC,而 MN 上的点 M, N 在棱 PA, PB 上,只要四点 P, A, B, C 不共面, MN 即不在平面 ABC 内.

平面 ABC 外的直线 MN 与该平面内直线 AB 平行, 判定定理的全部条件已满足, 故

$$MN \parallel \text{平面} ABC.$$

□

知乎@余命数

线面平行一经确认, 就蕴含进一步的几何事实. 下面的性质定理给出这种平行结构被其他平面截取时的规律.

定理 2.4 (线面平行性质定理) 若一条直线与一个平面平行, 则经过这条直线且与此平面相交的任意一个平面, 其交线与该直线平行.

证明 设直线 $l \parallel \alpha$. 又设平面 β 含直线 l ($l \subset \beta$) 且与 α 相交, 交线 m 即 $\alpha \cap \beta = m$, 即证 $l \parallel m$.

知乎@余命数

由交线定义, $m \subset \alpha$ 且 $m \subset \beta$; 又 $l \subset \beta$, 故 l, m 同在平面 β 内, 是共面直线. 欲证二者平行, 只需证其无公共点.

用反证法. 设 l 与 m 有公共点 Q. 由 $Q \in m \subset \alpha$ 得 $Q \in \alpha$; 此时点 Q 同时在直线 l 与平面 α 上, 即为二者的公共点, 与前提 $l \parallel \alpha$(无公共点)矛盾. 故 l 与 m 无公共点; 二者共面且无公共点, 故 $l \parallel m$. □

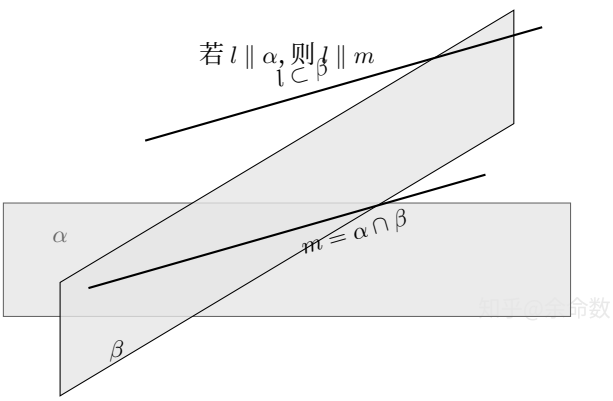
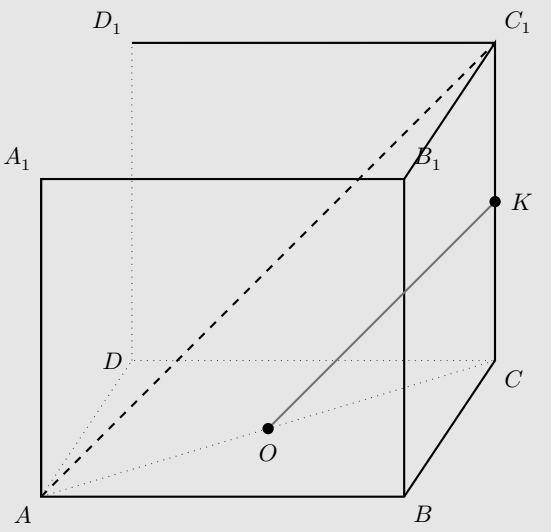


图 2.7 线面平行性质定理的几何直观

这个性质定理把空间中的平行关系转移到截面上, 化为线线平行的问题.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.15　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 α 经过对角线 BD 且平行于对角线 AC_1. 平面 α 与棱 CC_1 交于点 K. 求证 $CK=\frac{1}{2}CC_1$.



知乎@余命数

证明　我们要确定 K 在棱 CC_1 上的位置, 依据是题给的线面平行条件. 已知 $AC_1 \parallel \alpha$, 其中 α 即平面 BDK. 取含对角线 AC_1 与 AC 的对角面 ACC_1A_1 作过 AC_1 的平面.

设底面对角线 AC 与 BD 交于 O.O 在 AC 上, 故 $O\in$ 平面ACC_1A_1; O 在 BD 上, 故 $O\in$ 平面$BDK(\alpha)$.K 在 CC_1 上, 故 $K\in$ 平面ACC_1A_1; K 又在 α 上.O,K 同为 ACC_1A_1 与 α 的公共点, 连接二者即得交线 OK.

应用线面平行性质定理, 直线 $AC_1\parallel\alpha$, 平面 ACC_1A_1 经过 AC_1, 与 α 的交线为 OK, 据定理

$$OK\parallel AC_1.$$

空间问题遂归为平面 ACC_1A_1 内的平面几何问题. 在 $\triangle ACC_1$ 中, O 是对角线 AC 的中点; 由 $OK\parallel AC_1$, 据平行线分线段成比例定理的推论, 即三角形中位线的逆定理, OK 是 $\triangle ACC_1$ 的中位线.

故 K 是边 CC_1 的中点, 即 $CK=\frac{1}{2}CC_1$. □

2.3.2　平面与平面平行

平面内两条直线若不相交, 则必然平行. 把平面看作二维子空间并推广到三维, 两个平面的位置关系也只有两种, 相交或平行. 两个平面相互平行, 它们在空间中无限延伸却永不相交.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 2.5 (平面与平面平行) 若两个平面 α 与 β 的交集为空集, 即 $\alpha \cap \beta = \emptyset$, 则称这两个平面**相互平行**, 记作 $\alpha \parallel \beta$.

与线面平行一样, 直接用定义判定两个无限延展的平面没有公共点是困难的. 我们需要一个从有限构造出发的判定定理.

定理 2.5 (面面平行判定定理) 若一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面, 则此二平面相互平行.

证明 设平面 α 内有两条相交于点 P 的直线 l_1, l_2, 且 $l_1 \parallel \beta, l_2 \parallel \beta$, 即证 $\alpha \parallel \beta$.

用反证法. 设 α 与 β 不平行, 则二者相交于一条直线 m.

对 l_1: 由 $l_1 \subset \alpha$ 且 $l_1 \parallel \beta$, 据线面平行性质定理, 任何含 l_1 的平面若与 β 相交, 交线必与 l_1 平行; α 即这样一个平面, 故交线 $m \parallel l_1$.

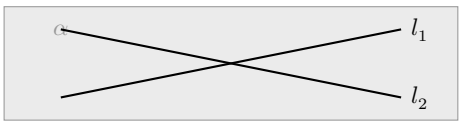
$$m \parallel l_1$$

对 l_2 同理: 由 $l_2 \subset \alpha$ 且 $l_2 \parallel \beta$, 据同一性质定理, $m \parallel l_2$.

$$m \parallel l_2$$

于是 $l_1 \parallel m$ 且 $l_2 \parallel m$, 即平面 α 内过同一点 P 的两条不同直线 l_1, l_2 都平行于同一直线 m, 违背平面几何的平行公理.

故假设"α 与 β 相交"不成立, 二平面相互平行. □



若 $l_1 \parallel \beta$ 且 $l_2 \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$



图 2.8 面面平行判定定理的几何模型

面面平行确立之后, 任何截面都在这两个平面上留下平行的交线. 这就是下面的性质定理.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.6 (面面平行性质定理) 若两个相互平行的平面被第三个平面所截, 则它们的交线相互平行.

证明 设 $\alpha \parallel \beta$, 第三平面 γ 与 α, β 分别交于直线 l_1, l_2, 即 $l_1 = \alpha \cap \gamma, l_2 = \beta \cap \gamma$, 即证 $l_1 \parallel l_2$.

由交线定义, l_1, l_2 均在平面 γ 内, 是共面直线. 再证其无公共点, 用反证法, 设 l_1, l_2 有公共点 P. 由 $P \in l_1 \subset \alpha$ 得 $P \in \alpha$; 由 $P \in l_2 \subset \beta$ 得 $P \in \beta$. 即点 P 是 α, β 的公共点, 与前提 $\alpha \parallel \beta$(无公共点)矛盾.

故 l_1, l_2 无公共点. 二者共面且无公共点, 故相互平行. □

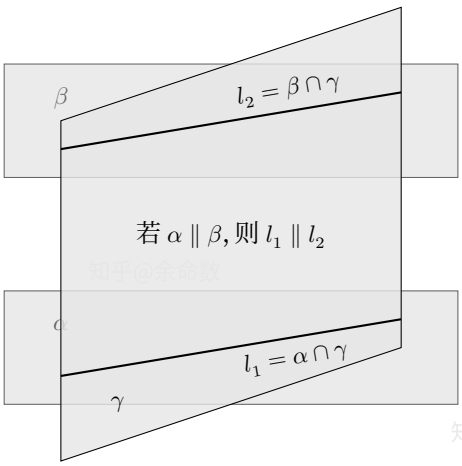


图 2.9　面面平行性质定理的几何模型

线线平行有传递性, 面面平行也有.

定理 2.7 (平行平面的传递性) 平行于同一个平面的两个不同平面相互平行.

证明 设平面 $\alpha \parallel \gamma$ 且平面 $\beta \parallel \gamma$, 且 $\alpha \neq \beta$, 即证 $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

我们用坐标法证明. 取平面 γ 内两条相交直线的方向作为前两个坐标方向, 并取垂直于 γ 的方向为第三坐标方向. 在这样的空间直角坐标系中, 平面 γ 可写为 $z = 0$. 由于 $\alpha \parallel \gamma$, 平面 α 上所有点到 γ 的有向距离相同, 故它可写为 $z = c_1$; 同理 β 可写为 $z = c_2$. 若 $c_1 = c_2$, 则两平面重合, 与 $\alpha \neq \beta$ 矛盾. 因此 $c_1 \neq c_2$. 方程 $z = c_1$ 与 $z = c_2$ 无公共解, 所以 $\alpha \cap \beta = \emptyset$, 即 $\alpha \parallel \beta$. □

2.3.3 高考真题选讲

以下高考真题考查平面平行的充要条件及线面平行的条件关系.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.16 (2019 年全国 □ 卷第 7 题) 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是

A. α 内有无数条直线与 β 平行　　C. α, β 平行于同一条直线

B. α 内有两条相交直线与 β 平行　　D. α, β 垂直于同一平面

解 答案: B. 一个平面内有无数条直线与另一平面平行时, 两平面可能相交(交线以外的直线都平行于另一平面), A 不充分. 一个平面内有两条相交直线与另一平面平行时, 由面面平行判定定理两平面平行, B 充分且必要. 两平面平行于同一条直线时仍可能相交, C 不充分. 两平面垂直于同一平面时也可能相交, D 不充分.

例题 2.17 (2018 年浙江卷第 6 题) 已知平面 α, 直线 m, n 满足 $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$, 则"$m \parallel n$"是"$m \parallel \alpha$"的

A. 充分不必要条件　　C. 充分必要条件

B. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

解 答案: A. 由 $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$, 若 $m \parallel n$, 依线面平行判定定理得 $m \parallel \alpha$, 充分性成立. 反之, $m \parallel \alpha$ 时 m 平行于 α 内无数条直线, 但不一定平行于特定的 n, 必要性不成立.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

2.4 空间中的垂直关系

上一节研究了平行, 本节研究垂直. 我们仍按定义、判定定理、性质定理的顺序, 依次讨论直线与平面垂直、平面与平面垂直, 中间插入一个关于斜线与射影的定理.

2.4.1 直线与平面垂直

定义 2.6 若一条直线的方向与一个平面内任意直线的方向都垂直, 则称这条直线与这个平面互相**垂直**.

这个定义要求检验平面内的每一条直线, 直接用它判定并不方便. 下面的判定定理把检验对象缩减为两条相交直线.

定理 2.8 (线面垂直判定定理) 若一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直, 则该直线与此平面垂直.

知乎@余命数

证明 设平面 α 内两条相交直线 m_1, m_2 的方向向量分别为 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, 直线 l 的方向向量为 $\mathbf{v}$. 因 m_1, m_2 相交, 它们不平行, 故 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 张成平面 α 内的全部方向. 由题设 $l \perp m_1$ 且 $l \perp m_2$, 得

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

对平面 α 内任意一条直线 m, 其方向向量可写成 $\mathbf{u} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$. 于是

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2) = 0.$$

因此 l 与平面 α 内任意直线的方向都垂直, 按定义 $l \perp \alpha$. □

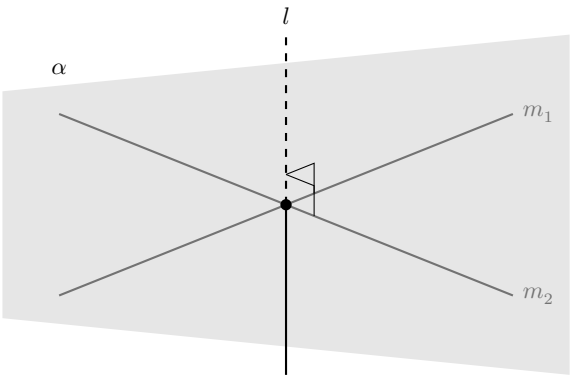


图 2.10　线面垂直判定定理

2.4.2 三垂线定理

设 PO 是平面的一条斜线, $P'O$ 是它在平面内的射影. 平面内一条直线若与射影垂直, 按三垂线定理, 它与斜线本身也垂直.

> **定理 2.9 (三垂线定理)** 在平面内的一条直线, 若它与此平面的一条斜线的射影垂直, 则它也与这条斜线垂直.

证明 设 l 是平面 α 内的一条直线, PO 是平面 α 的一条斜线, $P'O$ 是其在 α 内的射影, 且 $l \perp P'O$, 即证 $l \perp PO$.

由射影定义, $PP' \perp \alpha$. 取 $\mathbf{n} = \overrightarrow{P'P}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{P'O}$, 取 $\mathbf{u}$ 为直线 l 的方向向量. 由 $l \subset \alpha$ 与 $PP' \perp \alpha$, 得 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$; 又由题设 $l \perp P'O$, 得 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{q} = 0$. 斜线 PO 的方向向量

$$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{P'O} - \overrightarrow{P'P} = \mathbf{q} - \mathbf{n}.$$

故

$$\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{PO} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即 $l \perp PO$. □

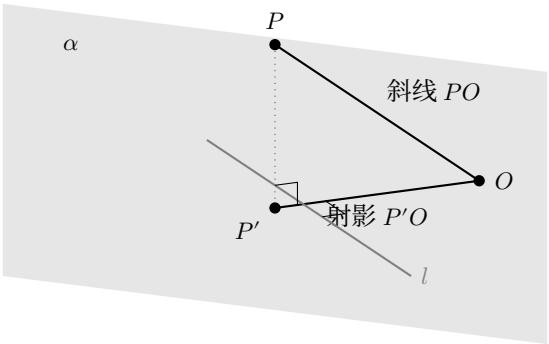


图 2.11 三垂线定理

知乎@余命数

2.4.3 平面与平面垂直

知乎@余命数

定义 2.7 若两个相交平面所成的二面角是直二面角, 则称这两个平面互相**垂直**.

这个定义用二面角表述, 直接检验二面角是否为直角并不方便. 下面给出一个更直接的判定方法.

知乎@余命数 知乎@余命数

定理 2.10 (面面垂直判定定理) 若一个平面经过另一个平面的一条垂线, 则这两个平面互相垂直.

知乎@余命数

证明 设平面 β 经过平面 α 的一条垂线 l, 且 $\alpha \cap \beta = m$, 即证 $\alpha \perp \beta$.

设 $l \cap \alpha = O$, 则 O 必在交线 m 上. 在平面 α 内作直线 $n \perp m$ 于点 O. 由 $l \perp \alpha$ 及线面垂直的性质, l 与 α 内任意直线都垂直, 故 $l \perp m$ 且 $l \perp n$.

角 $\angle(l, n)$ 是两平面所成二面角的平面角. 由 $l \perp n$, 该平面角为 $90°$, 据定义两平面互相垂直. □

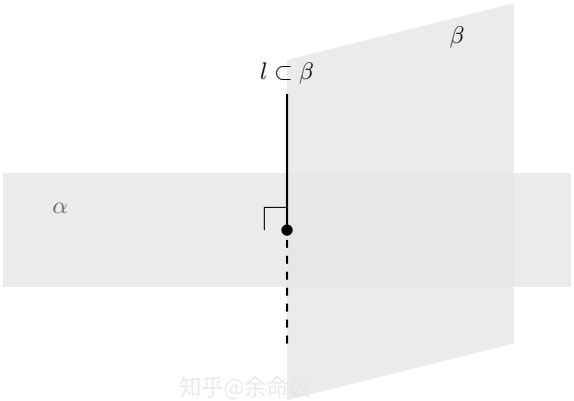
定理 2.11 (面面垂直性质定理) 若两个平面互相垂直, 则在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

证明 设 $\alpha \perp \beta$ 且 $\alpha \cap \beta = m$, 直线 $l \subset \alpha$ 且 $l \perp m$ 于点 O, 即证 $l \perp \beta$.

在平面 β 内作直线 $n \perp m$ 于点 O. 由 $\alpha \perp \beta$, l, n 构成的二面角的平面角为 $90°$, 即 $l \perp n$(面面垂直定义). 又题设 $l \perp m$. m, n 是平面 β 内两条相交直线, l 同时与二者垂直, 据线面垂直判定定理, $l \perp \beta$. □

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

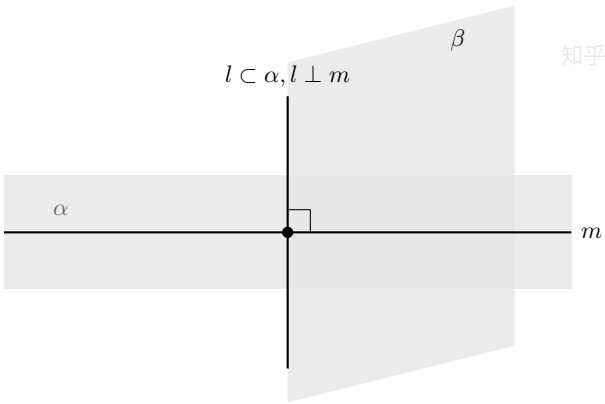


知乎@余命数

图 2.12　面面垂直判定定理

知乎@余命数

知乎@余命数



知乎@余命数

知乎@余命数

图 2.13　面面垂直性质定理

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.4.4 高考真题选讲

以下高考真题考查线面垂直与面面垂直的判定及性质.

例题 2.18 (2017 年全国 □ 卷文科数学第 10 题) 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CD 的中点, 则

A. $A_1E \perp DC_1$　　C. $A_1E \perp BC_1$

B. $A_1E \perp BD$　　D. $A_1E \perp AC$

解 答案: C. 连接 B_1C. 正方体中 $BC_1 \perp B_1C$ 且 $A_1B_1 \perp B_1C$, 故 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CE.$A_1E \subset$ 平面 A_1B_1CE, 故 $A_1E \perp BC_1$.

例题 2.19 (2021 年全国 □ 卷第 20 题) 在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD、$AB = AD$、O 为 BD 的中点.

1. 求证: $OA \perp CD$;
2. 若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 E 在棱 AD 上, $DE = 2EA$, 且二面角 $E\text{-}BC\text{-}D$ 的大小为 45°, 求三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的体积.

解 (1) 由 $AB = AD$ 及 O 为 BD 中点, 得 $AO \perp BD$. 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD, 交线为 BD, $AO \subset$ 平面 ABD, 故 $AO \perp$ 平面 BCD.$CD \subset$ 平面 BCD, 故 $AO \perp CD$.

(2) 以 O 为原点, OD 为 y 轴, OA 为 z 轴, 过 O 平行于 $\triangle OCD$ 中 OD 边上的高为 x 轴建系. 设 $OA = t$, 则 $B(0,-1,0)$、$C(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$、$D(0,1,0)$、$A(0,0,t)$、$E(0,\frac{1}{3},\frac{2t}{3})$.

平面 BCD 的法向量为 $\overrightarrow{OA} = (0,0,t)$. 设平面 BCE 的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$, 由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 及 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ 得

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0, \\ \frac{4}{3}y + \frac{2t}{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = -1$、$z = \frac{2}{t}$、$\vec{n} = (\sqrt{3},-1,\frac{2}{t})$.

二面角 $E\text{-}BC\text{-}D$ 为 45°, 故

$$\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}|}{|\vec{n}|\,|\overrightarrow{OA}|} = \frac{2}{t\sqrt{4+4/t^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $t = 1$, 即 $OA = 1$.

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BD \times h_C = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故

$$V_{A\text{-}BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.20 (2018 年全国 □ 卷理科数学第 18 题) 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF \perp BF$.

1. 求证: 平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$;
2. 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.

解 (1) 在正方形中 $EF \parallel AB$, 故 $EF \perp BC$, $EF \perp BF$. 又 $PF \perp BF$, $EF \cap PF = F$, 故 $BF \perp$ 平面 PEF. $BF \subset$ 平面 $ABFD$, 故平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$.

(2) 设正方形边长为 $2a$. 折叠保持 $\triangle DFP \cong \triangle DFC$, 故 $PD = CD = 2a$、$PF = CF = a$、$DE = a$. 由 $BF \perp$ 平面 PEF 及 $DE \parallel BF$, 得 $DE \perp$ 平面 PEF, 故 $DE \perp EP$. 在 $\triangle PDE$ 中, $PE = \sqrt{PD^2 - DE^2} = \sqrt{3}\,a$.

在平面 PEF 中过 P 作 $PH \perp EF$ 于 H. 由平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$, 交线为 EF, 得 $PH \perp$ 平面 $ABFD$, $\angle PDH$ 即为所求角.

$PF \perp DE(DE \parallel BF,\ PF \perp BF)$ 且 $PF \perp PD(\angle FPD = \angle FCD = 90^\circ)$, 故 $PF \perp$ 平面 PDE, $V_{F\text{-}PDE} = \frac{1}{3}PF \cdot S_{\triangle PDE} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

又 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$, 由 $V_{P\text{-}DEF} = \frac{1}{3}PH \cdot S_{\triangle DEF}$ 得 $PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$$\sin\angle PDH = \frac{PH}{PD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2.5 空间向量与坐标法

前几节用公理与判定定理处理位置关系, 还有一类问题要求夹角、距离与轨迹, 纯综合的路往往很绕. **空间向量与坐标法**把这类问题化为坐标计算. 平面向量已在 第三卷第 11 章中建立, 本节把它推广到三维, 并固定一套建立坐标系的习惯.

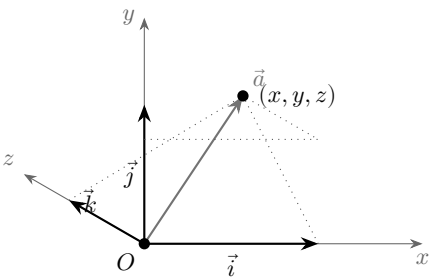


图 2.14　空间标准正交基与向量 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.5.1 从平面到空间

定义 2.8 (空间向量) 空间中的向量仍是有大小、有方向的量. 取定点 O 为原点后, 任一向量 $\vec{a}$ 可唯一写成

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

其中 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为两两垂直的单位向量 (空间标准正交基), 有序三元组 (x,y,z) 称为 $\vec{a}$ 的**坐标**.

加法与数乘仍按分量进行.

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),\quad \lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

模长

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

定义 2.9 (数量积) 设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 定义

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$

其中 θ 为两向量的夹角. 因而

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\quad(|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0).$$

注 2.1 (与平面向量的衔接)
平面向量的平行四边形法则、定比分点、共线判定在空间中同样成立. 共面则多一个条件. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面当且仅当存在不全为零的实数 λ,μ,ν 使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$(三维中亦可用混合积为零刻画, 见下一节).

2.5.2 直线与平面的方向数据

- 与直线平行的任一非零向量称为直线的**方向向量**.
- 与平面垂直的任一非零向量称为平面的**法向量**. 若平面内两不共线向量为 $\vec{u},\vec{v}$, 则可选

$$\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}$$

(叉积/外积; 坐标公式见下一节体积讨论, 或直接用垂直于 $\vec{u},\vec{v}$ 的向量求解线性方程).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是位置关系可翻译为向量条件.

线线平行	方向向量平行(对应分量成比例)
线线垂直	方向向量数量积为零
线面平行	方向向量 · 法向量 $=0$, 且直线不在平面内
线面垂直	方向向量 $\parallel$ 法向量
面面平行	法向量平行
面面垂直	法向量垂直(数量积为零)

这些向量条件与前面公理化的判定定理**结论一致**; 向量语言把位置关系的证明变成计算.

2.5.3 空间直角坐标系与建系

定义 2.10 (空间直角坐标系) 取两两垂直的坐标轴 Ox, Oy, Oz, 单位长度相同, 构成**空间直角坐标系** O-xyz. 点 P 的坐标 (x,y,z) 满足 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

建系的常见选择. 原则是让尽可能多的棱落在坐标轴或坐标平面上.

1. 正方体或长方体, 取一个顶点为原点, 三条棱为轴.
2. 正四面体或正三棱锥, 把底面放在 xOy 平面, 对称轴对齐 z 轴.
3. 有互相垂直的棱时, 把这组棱取为坐标轴方向.

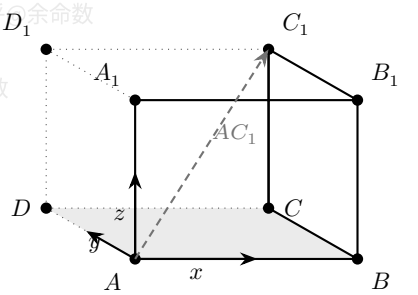


图 2.15　长方体建系: 以 A 为原点, 三棱为轴; 虚线为体对角线 AC_1

例题 2.21 (长方体中的线面角) 长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB=a$、$AD=b$、$AA_1=c$. 求直线 AC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦.

解 建系. 令 A 为原点, AB, AD, AA_1 分别为 x,y,z 轴正方向. 则

$$A=(0,0,0),\quad C=(a,b,0),\quad C_1=(a,b,c).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

平面 $ABCD$ 的法向量可取 $\vec{n}=(0,0,1)$, 直线 AC_1 的方向向量 $\vec{v}=\overrightarrow{AC_1}=(a,b,c)$. 线面角 θ 满足

$$\sin\theta=\left|\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}\right|=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

例题 2.22 (线线夹角的向量计算) 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1. 判断 A_1C 与 BD_1 是否垂直, 并求这两条异面直线所成角的余弦.

知乎@余命数

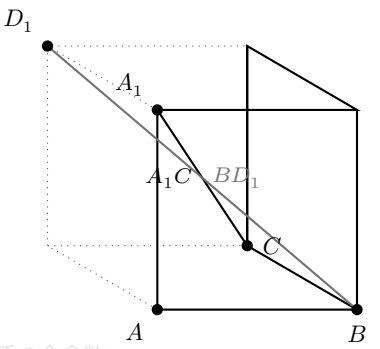


图 2.16 正方体中异面直线 A_1C 与 BD_1

解 建系同前, A 为原点, AB, AD, AA_1 为轴. 则

$$A_1=(0,0,1),\ C=(1,1,0),\ B=(1,0,0),\ D_1=(0,1,1).$$

方向向量

$$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1),\qquad \overrightarrow{BD_1}=(-1,1,1).$$

数量积

$$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD_1}=-1+1-1=-1\neq 0,$$

故**不垂直**. 夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{1}{3},$$

异面直线所成角取锐角(与方向向量夹角或其补角中的锐角相同), 其余弦为 $\frac{1}{3}$.

例题 2.23 (法向量求二面角) 在棱长为 2 的正方体中, 求平面 A_1BC_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角(锐角)的余弦.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 建系：$A=(0,0,0)$、$B=(2,0,0)$、$D=(0,2,0)$、$A_1=(0,0,2)$、$C_1=(2,2,2)$. 底面法向量 $\vec{n}_1=(0,0,1)$. 平面 A_1BC_1 内取

$$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2),\qquad \overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0).$$

法向量 $\vec{n}_2=\overrightarrow{A_1B}\times\overrightarrow{A_1C_1}$：

$$\vec{n}_2=\big(0\cdot 0-(-2)\cdot 2,\ (-2)\cdot 2-2\cdot 0,\ 2\cdot 2-2\cdot 0\big)=(4,-4,4),$$

可取 $\vec{n}_2=(1,-1,1)$. 则

$$\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

两平面法向量夹角等于二面角或其补角. 设 $\alpha=\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle$，则 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 锐二面角 φ 取 α 与 $\pi-\alpha$ 中的锐角，故

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

注 2.2 (综合法与坐标法)
综合法直接调用判定定理与性质定理；坐标法把同一问题化为代数计算. 上面的第二、三例显示，数量积可以快速否定看似垂直的猜测，法向量把二面角化成向量的夹角.

2.5.4 高考真题选讲

以下高考真题考查空间直角坐标系的建立及向量法求线面角与二面角.

例题 2.24 (2021 年全国 □ 卷第 19 题) 在四棱锥 Q-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$AD=2$、$QD=QA=\sqrt{5}$、$QC=3$.

1. 求证：平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$；
2. 求二面角 B-QD-A 的平面角的余弦值.

解 (1) 取 AD 中点 O，连接 QO，CO. 由 $QA=QD$ 得 $QO\perp AD$，$QO=\sqrt{5-1}=2$. 在正方形中 $CO=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.$QC^2=9=4+5=QO^2+OC^2$，故 $QO\perp OC$.$OC\cap AD=O$，故 $QO\perp$ 平面 $ABCD$.$QO\subset$ 平面 QAD，故平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 以 O 为原点，过 O 平行于 CD 的方向为 x 轴，OD 为 y 轴，OQ 为 z 轴建系. 则 $D(0,1,0)$、$Q(0,0,2)$、$B(2,-1,0)$、$\overrightarrow{BQ}=(-2,1,2)$、$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设平面 QBD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$, 由 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$ 及 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ 得

$$\begin{cases}-2x+y+2z=0,\\-2x+2y=0.\end{cases}$$

知乎@余命数

取 $x=1$, 则 $\vec{n}=(1,1,\frac{1}{2})$.

平面 QAD 的法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$, 故

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{1}{1\times\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

知乎@余命数

二面角 B-QD-A 为锐角, 余弦值为 $\frac{2}{3}$.

例题 2.25 (2021 年天津卷第 17 题) 在棱长为 2 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 BC 的中点, F 为棱 CD 的中点.

1. 求证: $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1;
2. 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值;
3. 求二面角 A-A_1C_1-E 的正弦值.

解 以 A 为原点, AB、AD、AA_1 分别为 x、y、z 轴建系. 则 $A(0,0,0)$、$A_1(0,0,2)$、$C_1(2,2,2)$、$D_1(0,2,2)$、$E(2,1,0)$、$F(1,2,0)$.

(1) $\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2)$、$\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$、$\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$. 设平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$, 由 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$ 及 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0$ 得

$$\begin{cases}2x+2y=0,\\2x+y-2z=0.\end{cases}$$

知乎@余命数

令 $x=2$, 则 $\vec{m}=(2,-2,1)$. $\overrightarrow{D_1F}\cdot\vec{m}=2-2=0$, 且 $D_1F\not\subset$ 平面 A_1EC_1, 故 $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1.

(2) $\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$、$|\vec{m}|=3$、$|\overrightarrow{AC_1}|=2\sqrt{3}$、$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=4-4+2=2$.

$$\sin\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\vec{m}|\,|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{2}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

(3) 平面 AA_1C_1 的法向量 $\overrightarrow{DB}=(2,-2,0)$.

$$\cos\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\rangle=\frac{4+4+0}{2\sqrt{2}\times3}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

知乎@余命数

知乎@余命数

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}.$$

例题 2.26 (2021 年全国甲卷理科数学第 19 题) 已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$、E、F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF\perp A_1B_1$.

1. 求证: $BF\perp DE$;
2. 当 B_1D 为何值时, 平面 BB_1C_1C 与平面 DFE 所成二面角的正弦值最小?

解 (1) 连接 AF.F 为 CC_1 中点, $CF=1$, $BF=\sqrt{5}$. 由 $BF\perp A_1B_1$ 及 $AB\parallel A_1B_1$, 得 $BF\perp AB$, 故 $AF=\sqrt{4+5}=3$, $AC=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.$AC^2=AB^2+BC^2$, 故 $BA\perp BC$.

以 B 为原点, BA、BC、BB_1 分别为 x、y、z 轴建系. 则 $A(2,0,0)$、$C(0,2,0)$、$E(1,1,0)$、$F(0,2,1)$. 设 $B_1D=m$, 则 $D(m,0,2)$.

$\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$、$\overrightarrow{DE}=(1-m,1,-2)$、$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0+2-2=0$, 故 $BF\perp DE$.

(2) 平面 BB_1C_1C 的法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$.$\overrightarrow{DE}=(1-m,1,-2)$, $\overrightarrow{EF}=(-1,1,1)$. 设平面 DEF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$, 由

$$\begin{cases}(1-m)x+y-2z=0,\\ -x+y+z=0\end{cases}$$

令 $x=3$, 则 $y=m+1$、$z=2-m$、$\vec{n}=(3,m+1,2-m)$.

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{3}{\sqrt{9+(m+1)^2+(2-m)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2m^2-2m+14}}=\frac{3}{\sqrt{2(m-\frac{1}{2})^2+\frac{27}{2}}}.$$

当 $m=\frac{1}{2}$ 时分母最小, 余弦最大, 正弦最小. 故 $B_1D=\frac{1}{2}$ 时二面角的正弦值最小.

2.6 空间中的度量

前面几节讨论平行与垂直, 现在讨论的是多远、多斜、多大. 这类问题称为**度量**. 我们用 第2.5节 的向量与坐标语言, 给出距离、夹角与体积的公式.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

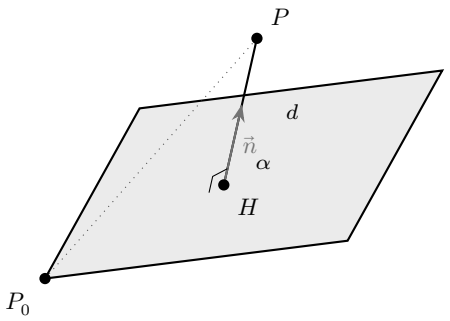


图 2.17 点 P 到平面 α 的距离：垂线 $PH \perp \alpha$，方向沿法向量 $\vec{n}$

知乎@余命数

2.6.1 距离

定理 2.12 (点到平面的距离) 平面 α 过点 P_0，法向量为 $\vec{n}$；点 P 到 α 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

若平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$，点 $P(x_0, y_0, z_0)$，则

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

知乎@余命数

证明 设垂足为 H，则 $\overrightarrow{HP}$ 与 $\vec{n}$ 共线，且 $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0H} + \overrightarrow{HP}$. 两边点乘 $\vec{n}$，由 $\overrightarrow{P_0H} \subset \alpha$ 而 $\vec{n} \perp \alpha$ 知 $\overrightarrow{P_0H} \cdot \vec{n} = 0$，故 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HP} \cdot \vec{n}$，因而 $|\overrightarrow{HP}| = \dfrac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$. 坐标形式由 $\vec{n} = (A, B, C)$ 与点法式方程直接得到. □

知乎@余命数

定理 2.13 (异面直线的距离 (方向向量已知)) 设直线 l_1 过 A、方向 $\vec{d}_1$，直线 l_2 过 B、方向 $\vec{d}_2$，且 $\vec{d}_1 \nparallel \vec{d}_2$. 则异面距离

$$d = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{d}_1, \vec{d}_2)|}{|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|},$$

其中分子为混合积的绝对值 $|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)|$.

证明 l_1 与 l_2 的公垂线方向垂直于 $\vec{d}_1$ 与 $\vec{d}_2$，故平行于 $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$. 异面距离等于 $\overrightarrow{AB}$ 在公垂线方向上的投影长度. 取单位公垂向量 $\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 / |\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$，则

$$d = |\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)|}{|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|} = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{d}_1, \vec{d}_2)|}{|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|}.$$

知乎@余命数

□

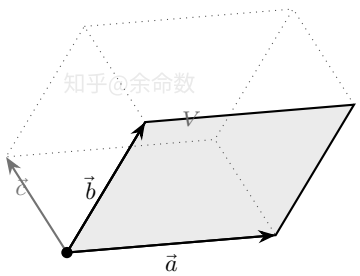
2.6.2 夹角

- **线线角**取为方向向量的夹角(锐角或题设规定的角).
- **线面角** θ 由方向 $\vec{v}$ 与法向量 $\vec{n}$ 给出, $\sin\theta = \dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$.
- **二面角**由两平面法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 的夹角给出, 它等于二面角或其补角; 需结合图形判断取锐角还是钝角, 或由平面角定义直接取平面角.

注 2.3
若两直线平行, 则距离退化为点到直线的距离. 取 l_2 上一点 B, $d = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{d}|}{|\vec{d}|}$.

知乎@余命数

2.6.3 体积与叉积、混合积



知乎@余命数

图 2.18　以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体; 体积为混合积绝对值

知乎@余命数

定义 2.11 (向量积 (叉积)) 在右手系中, $\vec{a}\times\vec{b}$ 垂直于 $\vec{a},\vec{b}$, 模长 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 等于以二者为邻边的平行四边形面积, 方向由右手定则确定. 坐标公式为

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

向量积给出平行四边形面积, 混合积把它推广到平行六面体体积.

定理 2.14 (平行六面体体积) 以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体体积

$$V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|.$$

三向量共面 $\iff$ 混合积为零.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 以 $\vec{b},\vec{c}$ 为邻边的底面平行四边形面积为 $|\vec{b}\times\vec{c}|$. 高为 $\vec{a}$ 在法向 $\vec{b}\times\vec{c}/|\vec{b}\times\vec{c}|$ 上投影的绝对值, 即 $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|/|\vec{b}\times\vec{c}|$. 故

$$V=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot\frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.$$

行列式形式由混合积的坐标公式直接得到. 三向量共面时高为零, 故混合积为零; 反之混合积为零则高为零, 三向量共面. □

将平行六面体体积公式应用于四面体, 得到三棱锥体积公式.

推论 2.1 (三棱锥体积) 以 O 为顶点、A,B,C 为底面顶点的四面体体积

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})|.$$

证明 以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 为棱的平行六面体可分割为六个等体积的三棱锥, 四面体 $OABC$ 是其中之一. 由平行六面体体积公式,

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})|.$$

□

例题 2.27 正方体棱长为 1, 求以一顶点为公共点、沿三条两两异面的面对角线方向所张成的平行六面体体积.

解 建系后三棱向量可取 $\vec{a}=(1,1,0)$、$\vec{b}=(1,0,1)$、$\vec{c}=(0,1,1)$. 则

$$V=\left|\det\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\right|=|1\cdot(0-1)-1\cdot(1-0)+0|=2.$$

例题 2.28 (点到平面距离) 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2. 求点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离.

解 建系. 取 $A=(0,0,0)$、$B=(2,0,0)$、$D=(0,2,0)$、$A_1=(0,0,2)$、$B_1=(2,0,2)$、$D_1=(0,2,2)$. 平面 AB_1D_1 内

$$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2),\qquad\overrightarrow{AD_1}=(0,2,2).$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

法向量

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AD_1} = (0 \cdot 2 - 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = (-4, -4, 4),$$

取 $\vec{n} = (1, 1, -1)$. 平面过 A, 故点法式 $x + y - z = 0$. 点 $A_1(0, 0, 2)$ 到平面距离

$$d = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

例题 2.29 (球的截面) 球心为 $O(0, 0, 0)$、半径 $R = 3$ 的球面, 被平面 $z = 1$ 所截. 求截面圆的圆心、半径, 以及截面圆的面积.

知乎@余命数

解 球心到平面 $z = 1$ 的距离 $d = 1 < 3$, 故相交成圆. 圆心为球心在平面上的射影 $O' = (0, 0, 1)$, 半径

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

知乎@余命数

截面圆面积 $\pi r^2 = 8\pi$.

球的定义、截面性质、切接问题与球面几何见 第2.8节.

2.6.4 高考真题选讲

知乎@余命数

以下高考真题考查空间几何体的体积、距离与夹角计算.

例题 2.30 (2020 年全国 □ 卷理科数学第 3 题) 埃及胡夫金字塔的形状可视为一个正四棱锥. 以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积, 则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

解 答案: C. 设正四棱锥的高为 h, 底面边长为 a, 侧面三角形底边上的高为 h'. 依题意 $h^2 = \frac{1}{2}ah'$. 由勾股定理 $h^2 = h'^2 - (\frac{a}{2})^2$. 联立得 $h'^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{2}ah'$, 令 $t = \frac{h'}{a}$, 则 $4t^2 - 2t - 1 = 0$, $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$(负值舍去).

例题 2.31 (2019 年天津卷理科数学第 11 题) 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为 ____.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 答案:$\frac{\pi}{4}$. 底面对角线长为 2,半对角线为 1. 由侧棱长 $\sqrt{5}$ 得棱锥高 $h=\sqrt{5-1}=2$. 侧棱中点位于半高处, 故圆柱高为 1. 侧棱中点构成正方形, 其对角线为底面对角线的一半, 即 1, 故圆柱底面半径为 $\frac{1}{2}$.$V=\pi(\frac{1}{2})^2\cdot 1=\frac{\pi}{4}$.

例题 2.32 (2021 年全国甲卷理科数学第 11 题) 已知 A、B、C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC\perp BC$, $AC=BC=1$, 则三棱锥 O-ABC 的体积为

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

解 答案: A. $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $AB=\sqrt{2}$, 其外接圆半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 球心到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{1-r^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

例题 2.33 (2018 年港澳台华侨联考卷第 11 题) 若四面体棱长都相等, 则相邻两侧面所成的二面角的余弦值为

A. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

解 答案: B. 设正四面体棱长为 2, 取 CD 中点 E, 连接 AE, BE.$AE=BE=\sqrt{3}$、$AE\perp CD$、$BE\perp CD$、$\angle AEB$ 为二面角的平面角. 在 $\triangle ABE$ 中,

$$\cos\angle AEB=\frac{AE^2+BE^2-AB^2}{2\cdot AE\cdot BE}=\frac{3+3-4}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

例题 2.34 (2005 年湖南卷文科数学第 4 题) 正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, O 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 则 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为

A. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解 答案: B. 以 A 为原点, AB、AD、AA_1 分别为 x、y、z 轴建系.$O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$. 平面 ABC_1D_1 含 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$D_1(0,1,1)$, 法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD_1}=(0,-1,1)$, 方程为 $z-y=0$. 点 O 到该平面的距离

$$d=\frac{|1-\frac{1}{2}|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.35 (2011 年全国大纲卷理科数学第 6 题) 已知直二面角 α-l-β, 点 $A\in\alpha$、$AC\perp l$、C 为垂足, $B\in\beta$、$BD\perp l$、D 为垂足, 若 $AB=2$, $AC=BD=1$, 则 D 到平面 ABC 的距离等于

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 1

解 答案:C. 在直二面角中 $AC\perp l$, 故 $AC\perp$ 平面 β, $AC\perp CD$ 且 $AC\perp BD$. 以 C 为原点, l 为 x 轴, AC 为 y 轴, BD 为 z 轴建系. 设 $CD=d$, 则 $A(0,1,0)$、$D(d,0,0)$、$B(d,0,1)$.$AB=\sqrt{d^2+2}=2$, 故 $d=\sqrt{2}$.

$V_{D\text{-}ABC}=V_{B\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot BD=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-1,1)$、$\overrightarrow{AC}=(0,-1,0)$、$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,0,-\sqrt{2})$、$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

2.7 三面角与四面体

第2.4节 引入了二面角, 第2.6节 给出空间度量的基本公式. 本节研究从一点引出三条射线所构成的图形, 即三面角, 建立面角与二面角之间的余弦关系与正弦关系, 并应用于球面距离的计算.

2.7.1 三面角的定义

定义 2.12 (三面角) 从空间一点 O 引出三条不共面的射线 OA、OB、OC, 这三条射线连同它们之间的平面区域构成的图形称为**三面角**, 记作 O-ABC. 点 O 称为三面角的**顶点**, 三条射线称为**棱**. 两棱之间的夹角 $\angle BOC$、$\angle COA$、$\angle AOB$ 称为**面角**, 分别记为 α、β、γ. 两面之间的二面角称为**二面角**, 棱 OA 处的二面角记为 A, 棱 OB 处的记为 B, 棱 OC 处的记为 C.

三面角的三个面角满足类似于三角形三边的大小关系, 任意两个面角之和大于第三个面角, 任意两个面角之差小于第三个面角.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

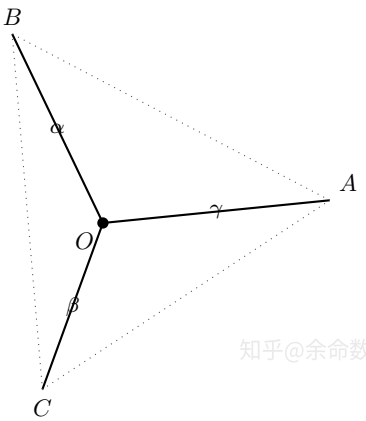


图 2.19 三面角 O-ABC, 三条棱 OA、OB、OC 与三个面角 α、β、γ

2.7.2 三面角的余弦定理

定理 2.15 (三面角的余弦定理) 设三面角的三个面角为 α、β、γ, 与面角 γ 相对的二面角为 θ, 即棱 OC 处的二面角 C, 则

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta \tag{2-1}$$

或等价地

$$\cos\theta = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{2-2}$$

证明 先设面角 α、β 均为锐角. 在棱 OC 上取异于 O 的点 H, 过 H 分别在面 OAC 与面 OBC 内作棱 OC 的垂线, 分别交射线 OA 于 A、交射线 OB 于 B. 面角非锐角时, 交点落在射线的反向延长线上, 以有向长度代入同一计算即可. 记 $\angle AOH = \beta$, 即面角 $\angle COA$, $\angle BOH = \alpha$, 即面角 $\angle BOC$, 二面角 $\angle AHB = \theta$, 面角 $\angle AOB = \gamma$.

设 $OH = 1$, 则 $AO = 1/\cos\beta$、$BO = 1/\cos\alpha$、$AH = \tan\beta$、$BH = \tan\alpha$. 在 $\triangle AHB$ 中由余弦定理:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 - 2\cdot AH\cdot BH\cdot\cos\theta = \tan^2\beta + \tan^2\alpha - 2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta$$

在 $\triangle AOB$ 中由余弦定理:

$$\cos\gamma = \frac{AO^2 + BO^2 - AB^2}{2\cdot AO\cdot BO}$$

代入 AO、BO、AB^2 并化简:

$$\cos\gamma = \frac{\sec^2\beta + \sec^2\alpha - \tan^2\beta - \tan^2\alpha + 2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta}{2\sec\alpha\sec\beta}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用 $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$, 分子化为 $2 + 2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta$, 故

$$\cos\gamma = \frac{2 + 2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta}{2\sec\alpha\sec\beta} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$$

□

知乎@余命数

证明 (向量证法) 取 OA、OB、OC 方向上的单位向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\gamma$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$、$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = \cos\beta$. 由二重外积公式 $\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} = \cos\beta\,\mathbf{c} - \mathbf{a}$, 故

知乎@余命数

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot[\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})] = \mathbf{b}\cdot(\cos\beta\,\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma$$

另一方面, $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \sin\alpha$, $|\mathbf{c}\times\mathbf{a}| = \sin\beta$, 设两者夹角为 θ, 即二面角, 则 $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$. 比较两式即得 (2-1). □

余弦定理把面角与二面角联系起来, 已知三个面角可求二面角, 已知两个面角与夹二面角可求第三面角. 向量证法用二重外积公式绕开了几何构造, 直接从向量代数得到结果, 体现了外积在立体几何中的计算效率.

定理 2.16 (二面角为直角的三面角) 设三面角 O-ABC 中与面角 $\gamma = \angle AOB$ 相对的二面角(棱 OC 处)为直角, 则面角满足

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \tag{2-3}$$

若三个二面角均为直角, 则三棱两两垂直, 三个面角同为直角, 上式成为恒等式 $0 = 0$.

证明 在 (2-1) 中取 $\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$ 即得. □

例题 2.36 (面角的取值范围) 三面角的三个面角 α、β、γ 满足

$$\left|\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right| \le 1$$

解 由 (2-2), $|\cos\theta| \le 1$ 给出此不等式. 从面角的和差关系看, $|\alpha-\beta| \le \gamma \le \min\{\alpha+\beta,\ 2\pi-\alpha-\beta\}$, 故 $\cos(\alpha-\beta) \ge \cos\gamma \ge \cos(\alpha+\beta)$, 即 $|\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta| \le \sin\alpha\sin\beta$.

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.7.3 三面角的正弦定理

定理 2.17 (三面角的正弦定理) 设三面角的三个面角为 α、β、γ, 三个二面角为 A、B、C, 则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{V} \tag{2-4}$$

其中

$$V=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

证明 由 (2-2), $\sin^2\theta=1-\frac{(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$. 展开分子:

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2\\&=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha\cos^2\beta\\&=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=V^2\end{aligned}$$

故 $\sin^2\theta/\sin^2\gamma=V^2/(\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma)$. 此式关于 α、β、γ 轮换对称, 故 $\sin A/\sin\alpha=\sin B/\sin\beta=\sin C/\sin\gamma=V/(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$, 取倒数即得 (2-4). □

2.7.4 球面距离的计算

球面上两点的最短路径是过两点的大圆弧, 其弧长由两点对球心的张角决定. 把球心 O、两地面点 A、B 与北极 N 视为三面角 O-ABN, 面角 $\angle AOB$ 就是所求的张角, 三面角余弦定理直接给出答案.

例题 2.37 (经纬度求球面距离) 设地球半径为 R, 球面上两点 A、B 的经纬度分别为 (u_1,v_1)、(u_2,v_2)(u 为经度, v 为纬度). 求 A、B 间的球面距离.

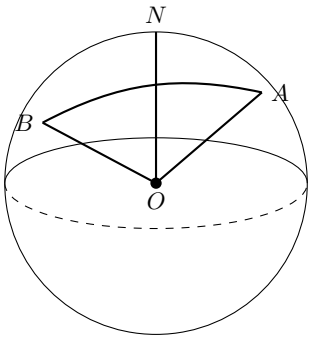
解 取地心 O 与北极 N. 射线 OA、OB、ON 构成三面角, 面角 $\angle AOB$ 即 A、B 对地心的张角, 面角 $\angle AON=\pi/2-v_1$, $\angle BON=\pi/2-v_2$ (纬度角的余角), 二面角 A-ON-B 即经度差 u_1-u_2. 由三面角余弦定理 (2-1):

$$\cos\angle AOB=\sin v_1\sin v_2+\cos v_1\cos v_2\cos(u_1-u_2)$$

球面距离为

$$d_{AB}=R\arccos(\sin v_1\sin v_2+\cos v_1\cos v_2\cos(u_1-u_2))$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 2.20　球面距离, 地心 O、两地点 A、B 与北极 N 构成三面角

例题 2.38 (面角与二面角的关系) 三面角 O-ABC 中与面角 γ 相对的二面角为直角, 记 $\angle BOC=\alpha$、$\angle COA=\beta$、$\angle AOB=\gamma$. 已知 $\alpha=\beta=\pi/3$, 求 γ.

解 由 (2-3), $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta=\cos(\pi/3)\cos(\pi/3)=\frac{1}{4}$, 故 $\gamma=\arccos(1/4)$.

2.8 球

知乎@余命数

第2.6节 给出了球的定义与三条常用事实. 本节把球作为独立对象, 展开它的截面、切接、局部构造与球面几何.

2.8.1 截面与球面距离

知乎@余命数　知乎@余命数

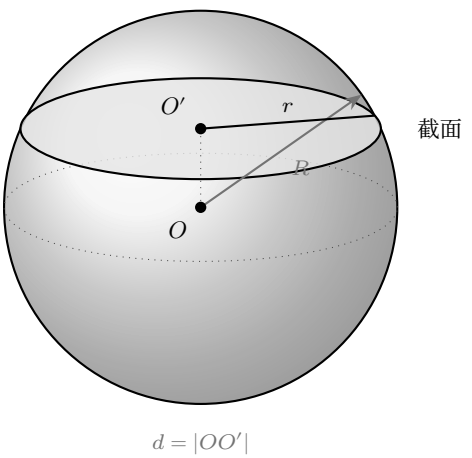


图 2.21　平面截球, 圆心为球心在平面上的射影 O', 半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}$

平面截球所得的截面恒为圆. 截面经过球心时, 半径等于球半径 R, 称为**大圆**; 不经过球心时, 设球心到截面的距离为 d, 截面半径

$$r=\sqrt{R^2-d^2}\qquad(0\le d\le R).\tag{2-5}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

地球上的赤道与所有经线圈是大圆, 纬线圈(除赤道外)是小圆.

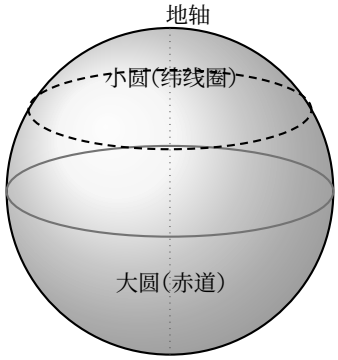


图 2.22 大圆与小圆, 赤道是过球心的大圆, 纬线圈是不过球心的小圆

定义 2.13 (球面距离) 球面上两点 A, B 之间的**球面距离**, 定义为经过这两点的大圆上不超过半圆的弧长; A、B 为对径点时过这两点的大圆不唯一, 但每段半圆弧长都是 πR, 球面距离仍为 πR.

设球半径为 R, 大圆上 A, B 所张圆心角为 θ(弧度, $0 \le \theta \le \pi$), 则球面距离

$$\ell = R\,\theta. \tag{2-6}$$

两点间的空间直线距离为弦长 $|AB| = 2R\sin\frac{\theta}{2}$, 它穿过球体内部, 与球面距离是两个不同的量.

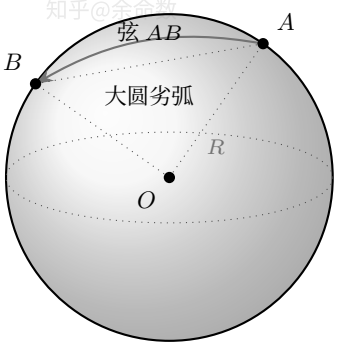


图 2.23 球面距离(大圆劣弧)与弦长的区别, 弦长即空间直线距离

例题 2.39 (球面距离) 设地球为半径 R 的球, 北纬 45° 圈上有两点 A, B, 经度差为 90°. 求 A, B 的球面距离.

解 北纬 45° 圈是小圆, 半径 $r = R\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. 在纬线圈上, 经度差 90° 对应圆心角 90°, 故纬线圈上的弧长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi R}{4}$. 但这不是球面距离.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

求 A, B 所张的球心角 θ. 设球心 O, 地轴为 z 轴.A, B 在北纬 $45°$, 即 $z = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, 投影到赤道平面的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. 取 A 在经度 $0°$, B 在经度 $90°$:

$$\overrightarrow{OA} = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}R,\, 0,\, \frac{\sqrt{2}}{2}R\Big), \quad \overrightarrow{OB} = \Big(0,\, \frac{\sqrt{2}}{2}R,\, \frac{\sqrt{2}}{2}R\Big).$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{R^2} = \frac{0+0+\frac{1}{2}R^2}{R^2} = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

球面距离 $\ell = R\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi R}{3}$.

2.8.2 外接球与内切球

球的表面若经过多面体的所有顶点, 这个球就称为多面体的**外接球**. 球心到各顶点距离相等, 通常由各面外心所作垂线的交点定位.

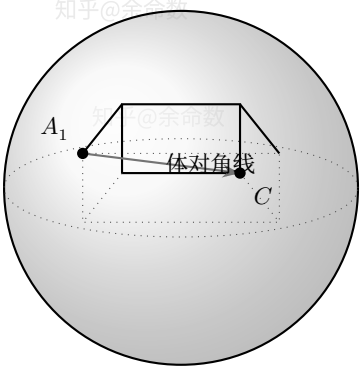


图 2.24　长方体的外接球, 体对角线是它的直径

定理 2.18 (长方体的外接球) 长方体的长、宽、高为 a, b, c, 其体对角线是外接球的直径, 故外接球半径

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}. \tag{2-7}$$

证明 以长方体的中心(体对角线交点)为原点, 三条棱所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系. 此时八个顶点的坐标为 $(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{b}{2}, \pm\frac{c}{2})$ 的所有组合.

任意一个顶点到原点 O 的距离平方为

$$\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{b}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{c}{2}\Big)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4},$$

与正负号选取无关, 故八个顶点到 O 的距离都等于 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

于是 O 到所有顶点等距, 以 O 为球心、$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 为半径的球面经过全部顶点, 即长方体的外接球. 体对角线两端点的距离为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 恰为该球直径, 故体对角线是外接球的直径. □

例题 2.40 (正四面体的外接球) 棱长为 a 的正四面体, 求其外接球半径.

解 正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到四个顶点等距. 设球心为 O, 半径 R. 由对称性, O 到每个面的距离相同.

正四面体的高 $h=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$. 球心在高的延长线上, 到底面三角形外心(重心)的距离记为 d. 由 $R^2=d^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$ 与 $R+d=h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 解得

$$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

球面若与多面体的每个面都相切, 这个球就称为多面体的**内切球**. 设多面体体积为 V, 表面积为 S, 以球心为顶点、各面为底面把多面体分割成若干棱锥, 每个棱锥的高都是内切球半径 r, 故

$$V=\frac{1}{3}r\,S \quad\Longrightarrow\quad r=\frac{3V}{S}. \tag{2-8}$$

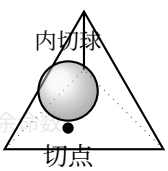


图 2.25 正四面体的内切球, 球心到每个面的距离都等于内切球半径

例题 2.41 (正四面体的内切球) 棱长为 a 的正四面体, 求其内切球半径.

解 正四面体体积 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, 表面积 $S=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}\,a^2$. 由 (2-8),

$$r=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}{\sqrt{3}\,a^2}=\frac{\sqrt{6}}{12}a.$$

与外接球半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$ 相比, $r:R=1:3$.

注 2.4 (外接球与内切球半径之比) 正四面体的外接球半径与内切球半径之比恒为 $3:1$. 这一比值由对称性决定, 与棱长无关.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.8.3 两球的位置关系

球心为 (x_0, y_0, z_0)、半径 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{2-9}$$

设两球球心距为 d, 半径 R_1, R_2(不妨设 $R_1 \geq R_2$), 位置关系由 d 与 R_1, R_2 的比较决定:

关系	几何条件	交集
相离	$d > R_1 + R_2$	空
外切	$d = R_1 + R_2$	一个点
相交	$\lvert R_1 - R_2\rvert < d < R_1 + R_2$	一个圆
内切	$d = R_1 - R_2$	一个点
内含	$d < R_1 - R_2$	空

知乎@余命数

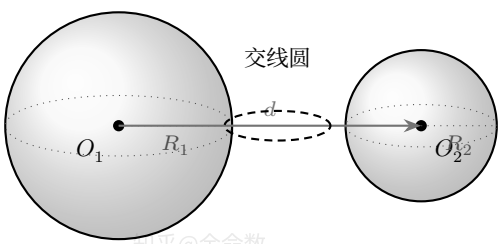


图 2.26　两球相交, 交线是垂直于球心连线的空间圆

两球相交时, 交线是一个空间中的圆. 该圆所在平面垂直于两球心连线, 圆心在两球心连线上.

例题 2.42 (两球相交的截面圆) 球 O_1 球心 $(0,0,0)$、半径 $R_1=3$, 球 O_2 球心 $(4,0,0)$、半径 $R_2=2$. 求两球相交圆的圆心与半径.

解 球心距 $d=4$, 满足 $|3-2|<4<3+2$, 故相交. 交线圆在平面 $x=x_0$ 上, 圆心 $C=(x_0,0,0)$ 在 O_1O_2 连线上. 由

$$x_0^2+r^2=R_1^2=9, \qquad (x_0-4)^2+r^2=R_2^2=4,$$

两式相减得 $8x_0-16=5$, 故 $x_0=\frac{21}{8}$. 代回得

$$r^2=9-\left(\frac{21}{8}\right)^2=\frac{576-441}{64}=\frac{135}{64}, \quad r=\frac{3\sqrt{15}}{8}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.8.4 球冠与球缺

用平面截去球的一部分，截下的曲面与几何体各有其公式. 这一节给出球冠与球缺的完整定义、公式与直观推导.

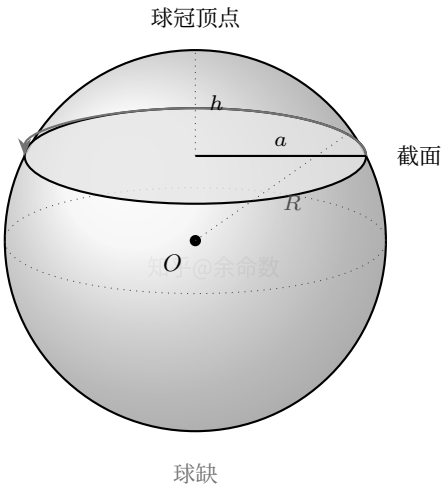


图 2.27 球冠与球缺，截面半径 a，高度 h，球半径 R

定义 2.14 (球冠) 球被平面所截，截面与球面之间的**曲面部分**称为**球冠**. 截面圆的圆心到球冠最高点的距离称为球冠的**高**，记为 h.

定义 2.15 (球缺) 球被平面所截，截面与球冠曲面共同围成的**几何体**称为**球缺**. 球缺的高与对应球冠的高相同，仍记为 h.

球冠是曲面（二维），球缺是几何体（三维）. 球缺 = 球冠曲面 + 截面圆盘 + 内部体积.

注 2.5 (截面半径与高度、球半径的关系)
设球半径为 R，球冠高为 h，截面圆半径为 a，球心到截面的有向距离 $d = R - h$，当 $h > R$ 时截面越过球心，d 取负值. 由勾股定理

$$a^2 = R^2 - d^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2 = h(2R-h). \tag{2-10}$$

这一关系在球冠面积与球缺体积的推导中反复使用.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

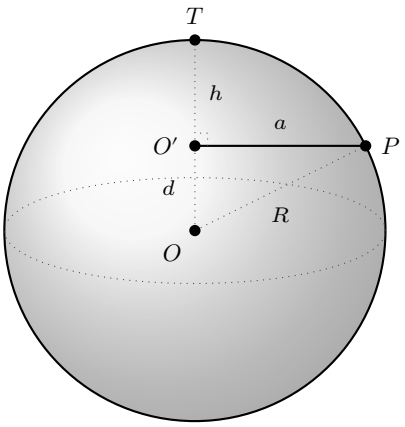


图 2.28　截面半径公式 $a^2 = h(2R - h)$ 的几何关系

知乎@余命数

定理 2.19 (球冠的面积) 半径为 R 的球, 高为 h 的球冠面积为

$$S_{\text{冠}} = 2\pi R\, h. \tag{2-11}$$

证明 (直观推导) 把球冠沿高度方向切成 n 个窄带. 在高度 z 处 $(R - h \le z \le R)$, 窄带的半径为 $a(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, 周长 $2\pi a(z)$. 窄带的斜高(沿球面方向的高度)近似为 Δs, 面积近似为 $2\pi a(z)\,\Delta s$.

当 $n \to \infty$ 时, 窄带面积之和趋于球冠面积. 由勾股定理, 窄带斜高 Δs 与竖直高度 Δz 的关系为 $\Delta s = \frac{R}{a(z)}\Delta z$ (球面在高度 z 处的倾斜程度). 代入得窄带面积 $2\pi a(z) \cdot \frac{R}{a(z)}\Delta z = 2\pi R\,\Delta z$. 求和:

$$S_{\text{冠}} \approx \sum 2\pi R\,\Delta z = 2\pi R \sum \Delta z = 2\pi R \cdot h.$$

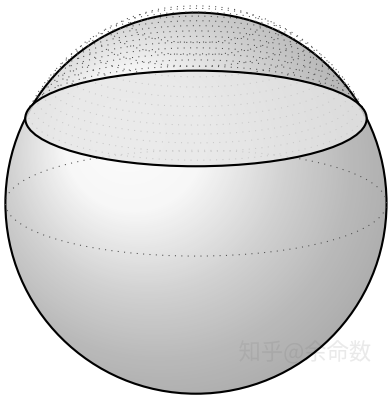
取极限即得 $S_{\text{冠}} = 2\pi R\, h.$ □

注 2.6 (球冠面积公式的特点)
球冠面积只与球半径 R 和高度 h 有关, 与截面位置无关. 当 $h = R$ 时(半球), $S = 2\pi R^2$, 恰为球面积 $4\pi R^2$ 的一半. 当 $h = 2R$ 时, 即整个球面, $S = 4\pi R^2$, 与球面积公式一致.

定理 2.20 (球缺的体积) 半径为 R 的球, 高为 h 的球缺体积为

$$V_{\text{缺}} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h). \tag{2-12}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 2.29 球冠面积的直观推导, 沿高度方向切成窄带, 求和取极限

证明 (直观推导) 把球缺沿高度方向切成 n 个薄圆片. 在高度 z 处 ($R-h \le z \le R$), 薄片的半径为 $a(z)=\sqrt{R^2-z^2}$, 面积为 $\pi a(z)^2=\pi(R^2-z^2)$, 厚度为 Δz, 体积近似为 $\pi(R^2-z^2)\,\Delta z$.

求和取极限, 球缺体积等于这些薄片体积之和:

$$V_{\text{缺}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi(R^2-z_i^2)\,\Delta z.$$

这个求和的精确计算需要定积分工具. 将变量替换 $t=z-(R-h)$, 使积分下限变为 0, 上限变为 h. 在新坐标下, 薄片半径为 $\sqrt{R^2-(R-h+t)^2}=\sqrt{2Rh-h^2-2(R-h)t-t^2}$, 化简后仍较复杂.

直接验证结果, 即把 $V=\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$ 展开,

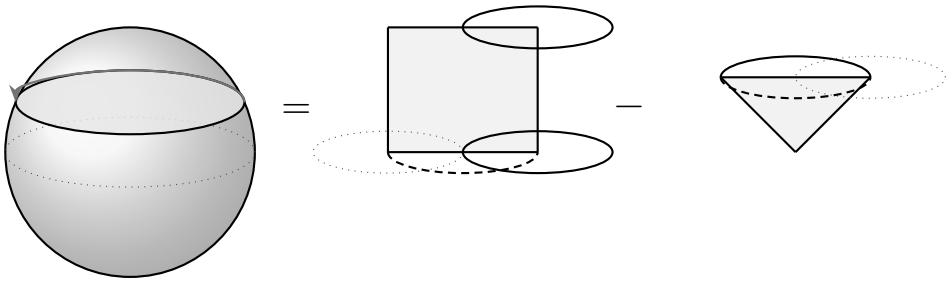
$$V=\pi Rh^2-\frac{\pi h^3}{3}.$$

第一项是底半径为 h、高为 R 的圆柱体积, 第二项是底半径为 h、高为 h 的圆锥体积. 球缺体积 = 圆柱 − 圆锥, 这一关系在 图 2.30 中直观展示. □

注 2.7 (球缺体积的严格证明)
上述推导中, 薄圆片体积之和的精确计算需要定积分 $\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-z^2)\,dz$. 定积分是 第四卷第 17 章的主题, 此处不给出严格推导. 有了定积分工具后, 这个积分只需三行即可完成, 结果与 (2-12) 一致.

注 2.8 (球缺公式的极限验证)

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



球缺　　圆柱 $\pi h^2 R$　　圆锥 $\frac{\pi h^2 h}{3}$

图 2.30　球缺 = 圆柱 − 圆锥: 体积关系 $V_{缺} = \pi h^2 R - \frac{\pi h^3}{3}$ 的直观展示

当 $h = 2R$ 时, 球缺就是整个球, 体积

$$V = \frac{\pi(2R)^2}{3}(3R - 2R) = \frac{4\pi R^3}{3},$$

与球体积公式一致. 当 $h = R$ 时(半球),

$$V = \frac{\pi R^2}{3}(3R - R) = \frac{2\pi R^3}{3},$$

恰为球体积的一半.

例题 2.43 (球缺体积计算) 半径 $R = 5$ 的球, 被距球心 $d = 3$ 的平面所截, 求较小部分(球缺)的体积.

解　球心到截面的距离 $d = 3$, 故球缺的高 $h = R - d = 5 - 3 = 2$. 截面半径 $a = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

由 (2-12),

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi \cdot 4}{3}(15 - 2) = \frac{52\pi}{3}.$$

例题 2.44 (球冠面积计算) 半径 $R = 1$ 的球, 球冠的高 $h = \frac{1}{2}$, 求球冠面积与它占球面积的比例.

解　由 (2-11),

$$S = 2\pi R h = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

球面积 $S_{球} = 4\pi R^2 = 4\pi$, 故球冠占球面积的比例为 $\frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

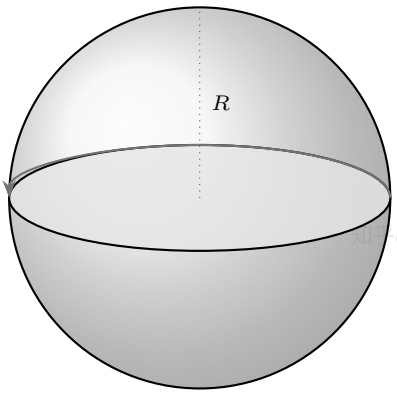


图 2.31 半球是球冠与球缺在 $h = R$ 时的特例

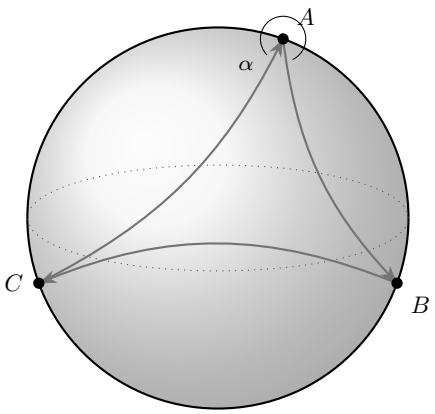


图 2.32 球面三角形, 三边为大圆弧, 内角和大于 180°

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.8.5 球面几何初步

在欧几里得平面上, 三角形内角和恒为 180°. 球面上的几何遵循不同的规则.

定义 2.16 (球面三角形) 球面上由三段大圆弧围成的区域称为**球面三角形**. 三段大圆弧称为它的边, 两边的夹角称为球面三角形的角.

球面三角形的角定义为两段大圆弧在顶点处的切线夹角. 由于球面弯曲, 球面三角形的内角和严格大于 180° 且小于 540°:

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ. \tag{2-13}$$

例题 2.45 (球面三角形的内角和) 在单位球面上, 取三段大圆弧各为 90°. 从北极沿经线到赤道的弧记为 AB, 沿赤道走 90° 的弧记为 BC, 再沿经线回到北极的弧记为 CA. 这构成一个球面三角形, 三个角都是 90°, 内角和 270°.

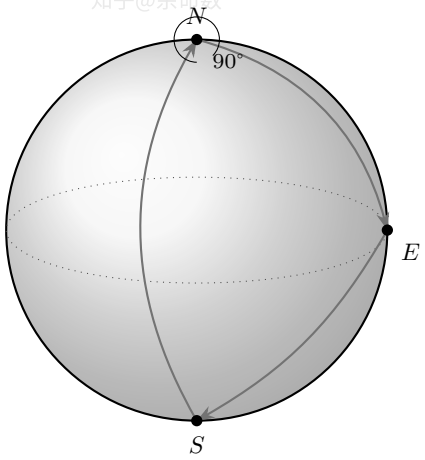


图 2.33　三直角球面三角形, 三个角都是 90°, 内角和 270°

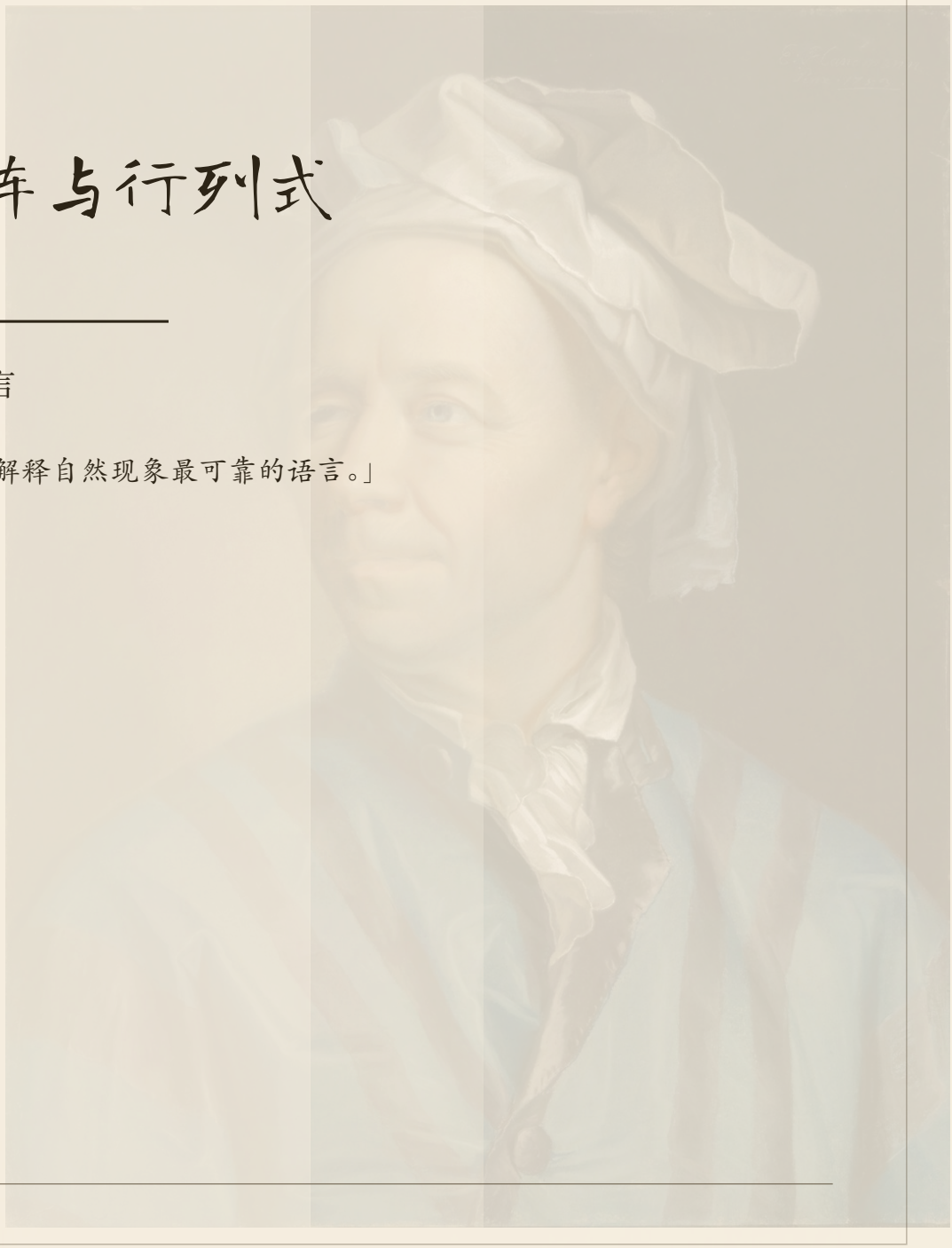
注 2.9 (球面几何的应用)
球面几何是导航学、天文学以及广义相对论中弯曲时空的几何基础. 球面三角形的内角和超过 180° 的部分, 称为**球面过剩**, 与三角形面积成正比. 这一关系在 第四卷第 17 章的积分应用中还会再次出现.

知乎@余命数
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 3 章

矩阵与行列式



基础语言

「数学是解释自然现象最可靠的语言。」

——欧拉

第三章 矩阵与行列式

在数学的众多领域中, 我们常常需要处理由数字构成的矩形阵列. 为了理解这种结构的起源与作用, 先回到一个熟悉的问题. 求解线性方程组.

考虑一个三元一次方程组.

$$2x + 3y - z = 5$$

$$4x - y + 2z = 1$$

$$x + 5y + 3z = 10$$

当我们运用加减消元法求解时, 操作实质上是对方程的系数和常数项组合与变换. 变量 x, y, z 在整个过程中仅仅是占位符, 它们的位置是固定的. 真正承载系统全部信息的是那些数字.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

这种洞察提示, 可以把这些数字信息从方程的形式中剥离出来, 作为一个独立的数学对象研究. 这个被剥离出来的、由数字构成的矩形阵列, 就是下面要研究的**矩阵**. 它将线性方程组的求解、几何空间的变换以及数据的统计分析等诸多问题, 统一在了一个共同的代数框架之下.

3.0.1 约束与自由度

在系统研究矩阵之前, 有必要从一个更基本的层面来理解线性方程组. 在没有任何限制的情况下, 三个变量 x, y, z 可以在三维空间中自由取值. 可独立地为 x, y, z 中的任意一个或多个变量赋值, 而不会影响其他变量的可能性. 我们称这种情况拥有三个**自由度**.

然而, 当我们引入第一个方程 $2x + 3y - z = 5$ 时, 情况发生了根本性的变化. 这个方程对变量 x, y, z 施加了一个**约束**. 它们不再能够独立地自由取值. 例如, 一旦我们确定了 x 和 y 的值, z 的值就必须是 $z = 2x + 3y - 5$, 它被唯一地确定了. 此时, 我们只能自由地选择两个变量的值, 系统的自由度从三个降至两个.

从几何上看, 三个自由度对应着整个三维空间. 而一个形如 $ax + by + cz = d$ 的线性方程, 在三维空间中定义的是一个平面. 这个平面是一个二维的几何对象. 因此, 施加一个约束, 等价于将解的活动范围从三维空间限制到了一个二维平面上, 自由度减一.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

当我们引入第二个方程 $4x-y+2z=1$ 时，我们施加了第二个约束. 现在，解 (x,y,z) 必须同时位于两个平面上. 两个不平行的平面相交，其交集是一条直线. 直线是一个一维的几何对象. 即此时只剩下一个自由度. 只要我们确定了直线上一点的某个坐标(例如 x)，其余的坐标 y,z 就会随之确定.

最后，引入第三个方程 $x+5y+3z=10$，这是第三个约束. 这个解现在必须同时位于三个平面上. 在通常情况下，一条直线与一个不平行于它的平面相交，其交集是一个唯一的点. 点是零维的几何对象. 此时，我们没有任何自由度了，变量 x,y,z 的值被这三个约束完全锁定，这就是方程组有**唯一解**的情形.

这个过程可以写成一个关系式.

$$\text{解的自由度} = \text{变量的个数} - \text{有效约束的个数}$$

然而，有些约束会提供冗余信息. 如果第三个方程是前两个方程的线性组合，例如，第一个方程乘以 3，那么它并没有提供任何新的信息，也就不是一个有效的独立约束. 在几何上，即第三个平面恰好也通过前两个平面的交线，因此交集仍然是一条直线，解有无穷多个. 如果第三个方程与前两个方程矛盾，例如 $2x+3y-z=100$，那么三个平面将没有公共交点，方程组无解.

因此，求解线性方程组的首要任务，转化为一个更为透彻的问题.

判断一个方程组中的 n 个约束是否相互独立.

要系统地解决这个问题，需一种能够描述并量化这些系数之间关系的工具. 这正是矩阵和行列式即将派上用场的地方.

> **注 3.1**
> 本章顺序. 向量 → 矩阵定义与运算 → 二/三阶行列式 → 逆与克拉默 → 消元求秩与解方程组；线性变换与齐次坐标、二次曲线的矩阵分类见后文，并与 第三卷第 13 章对照. 第三卷第 11 章中的平面向量与本节有序数组语言对照阅读.

3.1 向量

已在 第三卷第 11 章与 第2.5节 中把向量当作几何对象使用过. 本节换一个视角，把向量写成有序数组，作为矩阵的行/列与线性方程组的未知量载体.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.1.1 定义与表示

定义 3.1 (向量) 一个**向量**是一个有序的数字列表. 它可以表示为一个**行向量**或一个**列向量**.

- **列向量**: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
- **行向量**: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$

其中 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 称为向量的分量. 向量的维数等于其分量的数量.

知乎@余命数

3.1.2 几何解释与基本运算

3.1.2.0.1 几何解释 在坐标系中, 一个向量理解为一个从原点出发指向某一点的有向线段, 其分量对应着点的坐标.

- 二维向量 (x, y) 对应平面上的一个点.
- 三维向量 (x, y, z) 对应三维空间中的一个点.

向量的**大小**或**模长**通常用双竖线表示, 例如 $\|\mathbf{v}\|$. 在二维和三维空间中, 它可以用勾股定理计算, 得

$$\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \quad \| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

知乎@余命数

3.1.2.0.2 向量加法 向量加法的几何意义是将两个向量首尾相接, 其和向量是从第一个向量起点到第二个向量终点的向量, 即三角形法则; 或将两个向量平移到同一起点, 其和向量是以这两个向量为邻边构成的平行四边形的对角线, 即平行四边形法则. 在代数上, 向量加法是对应分量相加. 设 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$.

3.1.2.0.3　标量乘法　向量的标量乘法是改变向量的长度和/或方向. 标量 k 乘以向量 **v**, 就是将 **v** 的每个分量都乘以 k. 设 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, k 为标量, 则 $k\mathbf{v}=\begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}$. 如果 $k>0$, 向量方向不变, 长度变为原来的 k 倍; 如果 $k<0$, 向量方向反向, 长度变为原来的 $|k|$ 倍.

3.1.2.0.4　数量积(点积)　对同维列向量 **u**, **v**, 定义

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+\cdots+u_nv_n.$$

二维、三维时它与夹角公式 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ 一致, 并给出正交判定 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$. 更高维则把正交直接定义为点积为零.

立体几何中的空间向量侧重位置关系与度量 (第2章); 本章把同一对象用于矩阵乘法与行列式. 二者对象相同, 处理角度不同.

知乎@余命数

3.2 矩阵的定义与运算

3.2.1 定义与记法

定义 3.2 (矩阵) 一个 $m \times n$ 的**矩阵**是一个由 $m \cdot n$ 个数排成的长方形数表, 它有 m 条**行**与 n 条**列**, 行自上而下, 列自左向右. 本书中, 矩阵里的数一般取实数, 必要时会说明为复数或其他数.
我们通常用大写字母表示矩阵, 例如 A. 为了精确地指明矩阵中的每一个数, 我们给这些数编上行、列两个下标. 记

$$a_{ij} \text{ 为矩阵} A \text{ 中第} i \text{ 行、第} j \text{ 列的元素} \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

于是一个 $m \times n$ 的矩阵 A 可以写成

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

为了强调由哪些元素组成和大小是多少, 我们也常将其简记为

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{或} \quad A = (a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}.$$

在矩阵的大小 $m \times n$ 已经由上下文明确时, 也常简写为 $A = (a_{ij})$.

- 2×3 **矩阵**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

它有 2 行、3 列, 所以是一个 2×3 矩阵. 按上面的记号, 矩阵元素 a_{21} 等于 4, 它位于第 2 行第 1 列; a_{13} 等于 0, 它位于第 1 行第 3 列; 等等.

- 3×3 **的单位矩阵**.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个矩阵的行数与列数都为 3, 它是一个 3×3 矩阵. 这类行数和列数相同的矩阵统称为**方阵**, 在后续的行列式、逆矩阵和特征值等内容中会反复出现.

- 3×1 **的列向量**.

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

只有一列的矩阵被称为**列向量**, 可以看作是竖着写的一组数, 常用来表示空间中一点的坐标或一个方向.

- 1×4 **的行向量**.

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

只有一行的矩阵被称为**行向量**, 可以看作是横着写的一组数.

定义 3.3 (方阵) 当一个矩阵的行数与列数相等时, 即 $m = n$, 我们称之为一个 n **阶方阵**, 也常称为 n 阶矩阵.

方阵在线性代数中处处出现. 行列式、逆矩阵、特征值和特征向量, 都是首先在方阵上定义的.

3.2.1.1 矩阵作为平面或空间的变换

上面的定义把矩阵看作排成表格的数. 从几何的角度看, 更重要的是, 矩阵可以用来描述平面或空间中的线性几何变换.

例如, 在平面上, 每个点都可以用一个列向量来表示.

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

给定一个 2×2 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

可让它作用在这个向量上.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

几何上, 这表示平面上点 (x, y) 被矩阵 A 送到新点

$$(x', y') = (ax + by,\ cx + dy).$$

于是, 矩阵 A 描述了一次把整个平面统一移动的过程, 例如整体拉伸、压缩、剪切或者绕原点旋转等.

知乎@余命数

例题 3.1 (拉伸与压缩) 考虑

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

则

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

几何上, 这个矩阵把所有点的 x 坐标放大 2 倍, 把 y 坐标缩小为原来的一半. 整个平面在水平方向被拉伸, 在竖直方向被压缩.

例题 3.2 (绕原点旋转 $90°$) 考虑

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对任意点 (x, y),

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

在平面中, 把点 (x, y) 绕原点逆时针旋转 $90°$ 后的坐标正好是 $(-y, x)$. 因此, 矩阵 R 准确地表示了绕原点逆时针旋转 $90°$ 这一几何变换.

以后, 当我们写 $A\mathbf{x}$(矩阵 A 乘以列向量 $\mathbf{x}$)时, 可以同时借助两个图像来理解.

- 代数上. 按行列相乘的规则得到一个新的向量;
- 几何上.$\mathbf{x}$ 对应的点在平面, 或空间中被某个几何变换送到了新位置.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.2.2 矩阵的运算

有了记号 $A=(a_{ij})$ 之后, 可非常简洁地描述矩阵之间的运算. 从几何的角度看, 这些运算也会对应到把变换叠加、把变换整体缩放等操作(后面在矩阵乘法中会看到).

3.2.2.1 矩阵加法与标量乘法

矩阵的加法与数乘运算都是逐元素进行的. 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个**大小相同**的 $m\times n$ 矩阵, k 是一个常数, 也称为**标量**. 定义

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},\qquad kA:=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

即:

- **矩阵加法**. 两个矩阵相加, 得到一个同大小的新矩阵, 新矩阵的每一个元素, 都是原矩阵对应位置元素之和;
- **标量乘法**. 一个标量乘以一个矩阵, 得到一个同大小的新矩阵, 新矩阵的每一个元素, 都是原矩阵对应位置元素与该标量的乘积.

矩阵的减法 $A-B$ 定义为加法与标量乘法的组合.

$$A-B:=A+(-1)B.$$

例题 3.3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 6\end{pmatrix}$. 计算 $A+B$.

解 矩阵加法按对应位置元素求和, 故

$$\begin{aligned}A+B&=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1+4 & -2+5\\ 3+(-1) & 0+6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

例题 3.4 设矩阵 $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$. 计算 $3C$.

解 标量乘法将标量 3 分配到矩阵的每个元素, 故

$$\begin{aligned}3C &= 3\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot(-1)\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6 & 0 & -3\\ 12 & 15 & 3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例题 3.5 设 $X=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$. 计算 $2X-3Y$.

解 $2X-3Y$ 是标量乘法与矩阵减法的组合. 由标量乘法逐元素进行,

$$2X=2\begin{pmatrix}8 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}, \qquad 3Y=3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 15 & 3\end{pmatrix}.$$

再将两者按对应位置相减即得

$$\begin{aligned}2X-3Y &= \begin{pmatrix}16 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 15 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}16-(-6) & 2-9\\ 0-15 & 8-3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}22 & -7\\ -15 & 5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.2.3 矩阵的乘法

矩阵的加法与标量乘法是逐元素定义的, 这非常直观; 但矩阵乘法采用线性变换复合对应的规则. 这一定义源自线性变换的复合与几何变形的叠加.

假设有两组变量, 其中第一组变量 $\{y_1, y_2\}$ 可以由第二组变量 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的线性组合来表示.

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3.$$

知乎@余命数

线性关系可以写成矩阵形式

知乎@余命数

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{记作} y = Ax.$$

知乎@余命数

A 把 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 x 映射到 2 维空间 $\mathbb{R}^2$ 中的向量 y.

再假设有第三组变量 $\{z_1, z_2\}$ 由 $\{y_1, y_2\}$ 线性表示.

$$z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2,$$
$$z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2,$$

知乎@余命数

同样写成矩阵形式

知乎@余命数

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{记作} z = By.$$

现在我们要找一个直接的线性关系, 把 $\{z_1, z_2\}$ 写成 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的线性组合. 为此, 将 $y = Ax$ 代入到 $z = By$ 中推导.

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23})x_3, \\ z_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23})x_3. \end{aligned}$$

知乎@余命数

于是 z 与 x 的直接关系也可以写成矩阵形式 $z = Cx$, 其中

$$C = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \end{pmatrix}.$$

注意到 $z = By = B(Ax) = (BA)x = Cx$, 因此我们自然地把 C 记作 BA, 称为 B 与 A 的**乘积**.(这里之所以记为 BA, 原因是从变量关系看, 是先对 x 施加 A, 再施加 B; 在矩阵算符的表达中, 作用顺序总是从右往左的.)

仔细观察 C 的元素, 例如

$$c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},$$

知乎@余命数

它是 B 的第一行与 A 的第一列的内积. 一般地, c_{ij} 是 B 的第 i 行与 A 的第 j 列的内积. 这就是行乘列求和计算规则的由来.

定义 3.4 (矩阵乘法) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $p \times m$ 矩阵. 若 B 的列数 (m) 等于 A 的行数 (m), 则乘积 $C = BA$ 有定义, 并且是一个 $p \times n$ 矩阵. 它的第 i 行第 j 列元素定义为

$$c_{ij} = (B \text{ 的第 } i \text{ 行}) \cdot (A \text{ 的第 } j \text{ 列}) = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}.$$

上述推导给出了代数上的严谨定义. 不过单看代数, 这条规则仍显生硬; 转到**几何**视角, 把它读作线性变换的复合, 动机就清楚了.

知乎@余命数

在 $\mathbb{R}^2$ 中, 标准基向量为

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

任何向量 x 都可以写成 $x = x_1e_1 + x_2e_2$. 当取一个 2×2 矩阵 A 作用在 x 上时, 利用线性性, 有

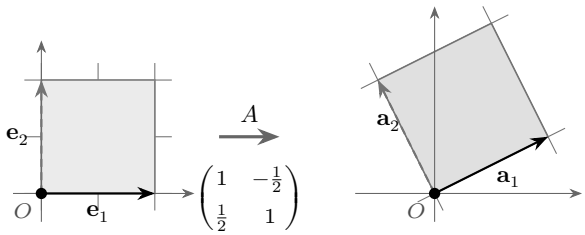
$$Ax = A(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1(Ae_1) + x_2(Ae_2).$$

直接计算 A 对基向量的作用, 得

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \qquad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

知乎@余命数

说明了一个基本的几何事实. **矩阵 A 的第 j 列, 是基向量 e_j 变换后的像**. 即, 矩阵是对空间怎么被拉伸、旋转、剪切的说明书, 列向量 a_1, a_2 描述了变换后新坐标轴的位置.



(a) 变换前　　(b) 变换后

图 3.1　矩阵的几何意义: A 的第 j 列 $\mathbf{a}_j = A\mathbf{e}_j$ 是标准基向量 $\mathbf{e}_j$ 的像, 单位正方形变换为平行四边形.

知乎@余命数

既然矩阵代表了线性变换, 两个矩阵相乘 BA 就对应两次变换的复合.

设 $A = (a_1 \dots a_n)$, 将 A 看作第一个变换, 它把标准基 e_j 变成了 a_j. 随后, B 作为第二个变换, 继续作用在这些新轴上. 于是, 复合变换 BA 对 e_j 的作用结果就是 $B(Ae_j) = Ba_j$. 即, BA 的第 j 列, 等于 B 作用在 A 的第 j 列上:

知乎@余命数

$$BA = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ba_1 & \cdots & Ba_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

从几何上看, 矩阵乘法实质上就是**连续做两次几何变换**. 先按照 A 描述的方式拉伸或旋转, 再按照 B 描述的方式继续变形.

除了上述的列视角, 还可以从**行视角**来审视乘法. 把 B 的第 i 行 r_i 看作一个线性测量函数, 或共变向量, 那么元素 $c_{ij} = r_i \cdot a_j$ 就代表先用 A 把基向量 e_j 送到空间中的某个位置 a_j, 再用 B 的第 i 个测量尺 r_i 去测量这个位置的投影或数值. 列视角读作基变换, 行视角读作对像的线性测量, 两种视角落在同一运算上.

这种变换复合的观点, 在二维几何操作中体现得尤为清楚. 例如, 逆时针旋转 90° 对应的矩阵是 $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 而放大 2 倍对应的矩阵是 $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 如果我们想先放大, 再旋转, 其整体效果就由乘积 $M = RS$ 一次性描述. 这种思想也是计算机图形学与神经网络的基础, 无论是屏幕上的像素坐标变换, 还是深度学习中特征向量在层与层之间的流动, 都是一连串矩阵乘法的叠加.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

然而, 空间的变换顺序往往是不能随意的. 考虑剪切变换.

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\text{水平剪切}), \quad S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\text{竖直剪切}).$$

若是先水平剪切再竖直剪切 (S_yS_x), 网格会变成一种形态; 若是反过来 (S_xS_y), 网格则会变成完全不同的另一种形态. 计算结果也证实了这一点, 得

$$S_yS_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = S_xS_y.$$

这便解释了矩阵乘法**不满足交换律** ($AB \neq BA$) 的几何根源. 在多维空间中, 变换的次序决定了最终的姿态.

既然矩阵乘法对应着线性变换的复合,这自然就对参与运算的矩阵的**形状**,即维度提出了严格的匹配要求. 我们不能随意地将两个矩阵相乘, 除非它们的维度相容.

从几何上讲, 如果矩阵 A 代表从 n 维空间到 m 维空间的变换, 记作 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 而矩阵 B 代表从 q 维空间到 p 维空间的变换, 记作 $B : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$, 那么要进行复合运算 $B(Ax)$, 必须要求 A 的输出能够毫无阻碍地成为 B 的输入.A 的输出空间维度 m 必须严格等于 B 的输入空间维度 q.

这就引出了矩阵乘法**何时可行**的代数铁律.

只有当左边矩阵的**列数**等于右边矩阵的**行数**时, 乘法才有定义.

可用一个简单的符号图示来表示这个规则. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 计算乘积 AB, 得

$$\underbrace{(m \times \mathbf{n})}_{\text{左矩阵}A} \quad \times \quad \underbrace{(\mathbf{n} \times p)}_{\text{右矩阵}B} \quad = \quad \underbrace{(m \times p)}_{\text{结果矩阵}C}$$

注意中间相邻的两个数字, 即 **n** 与 **n**, 它们必须相等, 并在运算过程中消去, 最终结果矩阵的形状由两端剩下的数字 m 和 p 决定.

不能相乘的情形. 一旦中间的这两个维度不匹配, 乘法就是未定义的. 原因可以从几何与代数两方面看.

- **几何上:** 维度错位.A 输出的向量维数与 B 接受的输入维数不同, 复合便无从谈起.
- **代数上:** 内积无法计算. 矩阵乘法的要点是左行乘右列. 如果左矩阵的一行有 3 个元素, 即左矩阵有 3 列, 而右矩阵的一列只有 2 个元素, 即右矩阵有 2 行, 当我们试图将它们对应相乘时, 会发现元素个数不一致, 无法完成点积运算.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

用一个具体的例子来辨析这一点. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\ (2\times 3),\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ (2\times 2).$$

1. **计算 BA：** B 是 $2\times\mathbf{2}$, A 是 $\mathbf{2}\times 3$. 中间维度均为 2, 匹配成功. 结果将是一个 2×3 的矩阵.
2. **计算 AB：** A 是 $2\times\mathbf{3}$, B 是 $\mathbf{2}\times 2$. 中间维度 $3\neq 2$, 匹配失败. 因此, AB 是不存在的. 我们无法用 A 的一行 $(1,2,3)$ 去和 B 的一列 $(1,0)^T$ 做内积, 因为前者长度为 3, 后者长度为 2.

这个例子再次印证了矩阵乘法的非交换性. 很多时候, BA 有意义, 而 AB 甚至连定义都没有.

理解了背后的几何意义, 我们再回过头来看具体的计算过程. 实际上, 每一个元素的计算 $c_{ij}=\sum b_{ik}a_{kj}$ 都可以通过下图这种直观的方式进行索引.

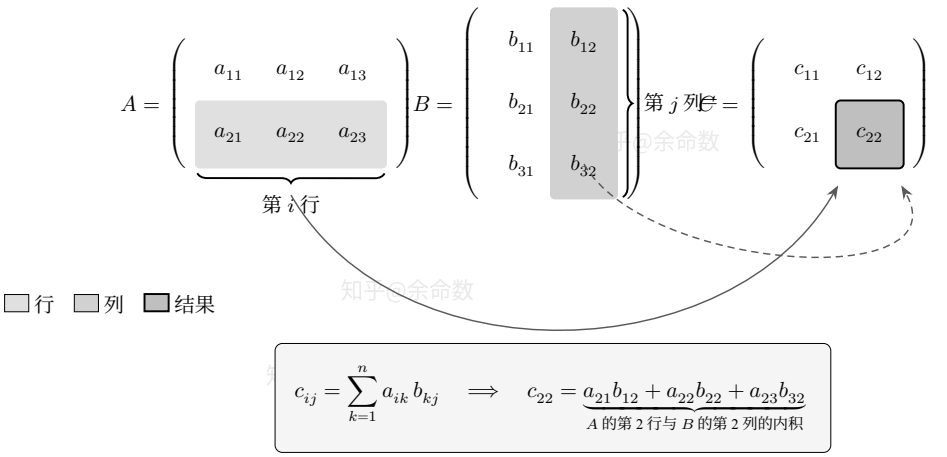


图 3.2　矩阵乘法的计算规则中, C 的第 (i,j) 元素等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积.

再以一个具体的数值计算演示这一过程. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&1\\0&5\\2&3\end{pmatrix}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于 A 是 2×3, B 是 3×2, 乘积 AB 将是一个 2×2 矩阵. 按行乘列求和, 第一行第一列元素为 $1\cdot 4+0\cdot 0+2\cdot 2=8$, 第二行第一列元素为 $3\cdot 4+1\cdot 0+0\cdot 2=12$, 余下各元同理计算, 最终得到

$$AB=\begin{pmatrix}8 & 7\\ 12 & 8\end{pmatrix}.$$

最后,这种看似复杂的乘法规则是 19 世纪数学家们在解决同一根本问题时的发现. 早在 19 世纪初, 高斯在处理线性方程组的变量代换时, 就已经在手稿中使用了这种行乘列的组合方式,但他当时仅将其视为一种计算技巧.

真正赋予其独立生命的是英国数学家亚瑟·凯莱 (Arthur Cayley). 凯莱在研究不变量理论时,为了描述坐标变换的复合,即我们前文提到的将 $x\to x'\to x''$ 合并为一步,发现必须定义这样一种乘法规则.1858 年,凯莱引入矩阵这一概念,将几何变换的复合与代数上的矩阵乘法对应起来. 自此, 矩阵超越了方程组系数的缩写,成为描述线性结构与空间变换的代数工具.

3.2.4 矩阵的基本性质

与我们熟悉的实数运算相似, 矩阵的运算也遵循一套明确的代数法则. 掌握这些性质, 是进行更复杂的矩阵计算与推导的基础.

3.2.4.1 矩阵加法与标量乘法的性质

矩阵的加法与标量乘法性质与向量的性质非常相似, 它们共同构成了一个线性空间. 设 A,B,C 为同阶矩阵, k,l 为标量.

定义 3.5 (零矩阵) 所有元素均为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记作 O.

3.2.4.2 矩阵乘法的性质

矩阵乘法的性质更为特殊, 特别是它不满足交换律. 设 A,B,C 为阶数适合于下列运算的矩阵, k 为标量.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 3.6 (单位矩阵) 一个 n 阶方阵, 如果其主对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0, 则称其为 n **阶单位矩阵**, 记作 I 或 I_n.

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

知乎@余命数

即便 AB 和 BA 都有定义且阶数相同, 也绝不能默认为 $AB=BA$.

3.2.4.3 矩阵的转置

转置将矩阵的行与列进行互换.

定义 3.7 (转置矩阵) 将一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的所有元素沿主对角线进行翻转, 得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**, 记作 A^T. 其元素满足 $(A^T)_{ij}=a_{ji}$.

$$\text{例如, } A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\quad \text{则}\quad A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

例题 3.6 验证性质 $(AB)^T=B^TA^T$. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&1\\2&5\end{pmatrix}$.

解 性质 $(AB)^T=B^TA^T$ 的验证归结为分别计算等式两侧的转置乘积并比较. 由矩阵乘法按行乘列求和,

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot2&1\cdot1+2\cdot5\\0\cdot4+3\cdot2&0\cdot1+3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&11\\6&15\end{pmatrix},$$

沿主对角线翻转即得左端 $(AB)^T=\begin{pmatrix}8&6\\11&15\end{pmatrix}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

转置将行列互换, 故 $A^T=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}$, 右端按 B^T 的行乘 A^T 的列展开为

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1+2\cdot2&4\cdot0+2\cdot3\\1\cdot1+5\cdot2&1\cdot0+5\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\11&15\end{pmatrix}.$$

两侧结果相同, 性质得到验证.

方阵配备的行列式既是可逆性的判据, 也是面积与体积的代数编码, 见第3.3节.

3.3 行列式

上一节把矩阵建成可运算的对象. 本节给每个方阵配一个标量, 即行列式, 用来判断可逆性, 并读出面积/体积的符号信息.

引入

对于每一个**方阵**, 我们都可以计算一个与之对应的唯一的标量, 这个标量被称为该方阵的**行列式**. 行列式是一个基本的概念, 它浓缩了方阵的相关信息, 例如与该方阵对应的线性方程组是否有唯一解, 以及它所代表的几何变换是放大、缩小还是反转了空间.

先从最简单的二阶方阵出发来定义行列式.

定义 3.8 (二阶行列式) 对于一个二阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

我们定义, 从左上角到右下角的元素序列 (a,d) 称为**主对角线**, 从右上角到左下角的元素序列 (b,c) 称为**副对角线**.

该方阵的**行列式**的值, 定义为主对角线元素之积减去副对角线元素之积, 记作 $\det(A)$ 或 $|A|$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc \tag{3-1}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个定义来自二元一次方程组的通解公式. 考虑方程组

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

知乎@余命数

其解为 $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. 分母 $a_1b_2 - a_2b_1$ 是系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 的行列式.

知乎@余命数

定义 3.9 (三阶行列式) 对于一个三阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

其**行列式**的值定义为

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \tag{3-2}$$

知乎@余命数

对于三阶行列式的计算, 一种直观的记忆法则是**对角线法则** (Sarrus' Rule). 将矩阵的前两列复制到右侧, 然后将三条主对角线方向的元素之积相加, 再减去三条副对角线方向的元素之积.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$$\det(A) = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

对角线法则仅适用于三阶行列式, 不能推广至更高阶的行列式.

知乎@余命数

例题 3.7 计算矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 的行列式.

解 由对角线法则, 三条主对角线方向的元素之积相加再减去三条副对角线方向的元素之积,

$$\begin{aligned}\det(A) &= (1\cdot 4\cdot 6+2\cdot 5\cdot(-1)+3\cdot 0\cdot 0)-((-1)\cdot 4\cdot 3+0\cdot 5\cdot 1+6\cdot 0\cdot 2)\\ &= (24-10+0)-(-12+0+0)\\ &= 14-(-12)\\ &= 26.\end{aligned}$$

对更高阶的行列式, 通用的计算方法是**代数余子式展开**. 任意 n 阶行列式的值, 都等于其任意一行, 或一列的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 对于三阶行列式, 沿第一行展开的形式为.

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

展开项的符号遵循 $(-1)^{i+j}$ 的棋盘格规则, 其中 i 和 j 分别是元素的行号和列号. 第一行的符号即为 $+,-,+$.

3.3.1 行列式的几何应用

行列式最耐人寻味之处在于它的几何含义.

3.3.1.1 三角形面积

先阐述公式的几何原理, 再通过代数推导给出严格证明.

3.3.1.1.0.1 几何原理 公式的几何要点是把三角形的面积与两条边向量所张成的平行四边形面积联系起来. 考虑由三个顶点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 构成的三角形. 可从顶点 A 出发, 构造两条边向量, 得

$$\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

$$\vec{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

三角形 ABC 的面积, 恰好是由向量 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 作为邻边所构成的平行四边形面积的一半.

在二维坐标系中, 由两个向量 $\vec{u}=(u_x,u_y)$ 和 $\vec{v}=(v_x,v_y)$ 所张成的平行四边形的**有向面积**, 恰好由二阶行列式给出.

$$\text{平行四边形的面积}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-u_yv_x$$

这个值的正负号取决于从 $\vec{u}$ 旋转到 $\vec{v}$ 的方向(逆时针为正, 顺时针为负). 因此, 三角形 ABC 的面积可以表示为.

知乎@余命数

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right\| \tag{3-3}$$

我们的任务就是证明, 那个三阶行列式的值实质上等于这个二阶行列式.

我们从目标三阶行列式出发, 利用行列式的一条基本性质化简, 即把某一行, 或列的倍数加到另一行, 或列, 行列式的值不变.

令目标行列式为

知乎@余命数

$$D=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

知乎@余命数

为在行列式中构造出向量 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 的分量, 把第 1 行乘以 -1 分别加到第 2 行和第 3 行 ($R_2\to R_2-R_1, R_3\to R_3-R_1$), 得

$$D=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 1-1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 1-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}.$$

第三列已含两个零元素, 沿此列作代数余子式展开便十分简洁:

$$\begin{aligned}D&=1\cdot\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}-0+0\\ &=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

知乎@余命数

这表明三阶行列式 D 的值与基于向量法得到的二阶行列式完全相等, 代入方程 (3-3) 即完成公式证明.

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| \tag{3-4}$$

行列式本身计算的是一个**有向面积**. 其正负取决于顶点 $A \to B \to C$ 的排列顺序 (逆时针为正, 顺时针为负). 因此, 取其绝对值来获得通常意义下的面积. 将此行列式沿第三列展开, 得

$$\begin{aligned} \det &= 1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \end{aligned}$$

这个表达式是著名的**鞋带公式**. 它是该三阶行列式经过代数展开后的自然结果.

3.3.1.2 三点共线与直线方程

面积公式立即给出两个推论. 其一, 三点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 共线的充要条件是它们所构成的三角形面积为零.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

其二, 给定两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 平面上任意一点 $P(x, y)$ 在直线 AB 上的充要条件是 P, A, B 三点共线. 由此, 经过 A, B 两点的直线方程可以写成.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例题 3.8 求经过点 $A(1, 2)$ 和 $B(3, -4)$ 的直线方程.

知乎@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 由行列式形式的直线方程,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

沿第一行展开此行列式得

$$x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$x(2-(-4)) - y(1-3) + 1(-4-6) = 0,$$

化简得 $6x + 2y - 10 = 0$, 亦即直线方程 $3x + y - 5 = 0$.

3.3.1.3 向量外积与法向量

在三维空间中, 行列式是定义向量外积的标准工具. 对于两个向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 它们的外积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 是一个同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的新向量, 其定义为一个形式上的行列式.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \qquad (3\text{-}5)$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是沿 x, y, z 轴的单位向量. 这个工具在解析几何中用于直接计算平面法向量. 一个由三点 A, B, C 确定的平面, 其法向量 $\vec{n}$ 必定垂直于平面内的任意向量, 例如 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$. 因此, 计算这两个向量的外积即得法向量.

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

例题 3.9 求经过三点 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$ 的平面的一个法向量.

解 在平面内取两个向量, 由顶点坐标相减得

$$\vec{AB} = B - A = (0-1, 1-0, 0-0) = (-1, 1, 0), \qquad \vec{AC} = C - A = (0-1, 0-0, 1-0) = (-1, 0, 1).$$

知乎@余命数

平面的法向量 $\vec{n}$ 即这两个向量的外积. 按形式行列式展开,

$$\begin{aligned}\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(1-0) - \mathbf{j}(-1-0) + \mathbf{k}(0-(-1)) \\ &= 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k}.\end{aligned}$$

因此该平面的一个法向量是 $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

3.3.1.4 平行六面体的体积

行列式的几何意义可以自然地推广到三维体积. 出发点是一个基本的几何事实. 任何柱体的体积都等于其底面积乘以高. 在这里, 将使用向量代数的工具来精确地表达底面积和高.

一个平行六面体的体积 V 可以通过其底面平行四边形的面积 $S_{\text{底}}$ 与垂直于该底面的高 h 的乘积来计算.

$$V = S_{\text{底}} \cdot h$$

我们不妨选择由向量 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 所张成的平行四边形作为底面. 根据向量外积的几何意义, 这个底面平行四边形的面积等于外积向量 $\vec{b} \times \vec{c}$ 的模长.

$$S_{\text{底}} = \|\vec{b} \times \vec{c}\|$$

根据外积的定义, 向量 $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ 的方向是同时垂直于 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的, 即垂直于底面. 平行六面体的高 h, 就是第三个向量 $\vec{a}$ 在底面法向量 $\vec{n}$ 方向上的投影的长度. 一个向量 $\vec{a}$ 在另一个向量 $\vec{n}$ 上的标量投影(用 proj 表示)由点积给出.$\text{proj}_{\vec{n}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. 因此, 高 h 是这个投影值的绝对值, 因为高度必须为非负.

$$h = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{\|\vec{b} \times \vec{c}\|}$$

接着, 将底面积和高的表达式代入体积公式.

$$V = S_{\text{底}} \cdot h = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cdot \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{\|\vec{b} \times \vec{c}\|}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

分子与分母中的 $\|\vec{b}\times\vec{c}\|$ 项相互抵消, 得一个极为简洁的表达式.

$$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

这个表达式 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 被称为三个向量的**混合积**. 它在几何上代表了由这三个向量所张成的平行六面体的**有向体积**.

最后一步是证明混合积的代数计算结果与三阶行列式的值完全相同. 设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$. 由外积的形式行列式定义,

$$\vec{b}\times\vec{c}=(b_2c_3-b_3c_2)\mathbf{i}+(b_3c_1-b_1c_3)\mathbf{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\mathbf{k}.$$

将 $\vec{a}$ 与此结果作点积, 按分量相乘求和得

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1.\end{aligned}$$

另一方面, 将以这三个向量为行构成的三阶行列式沿第一行展开 (按代数余子式展开定理),

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}&=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1.\end{aligned}$$

将两个展开式各项重排后完全相同, 这就证明了混合积与行列式在数值上等价. 因此, 平行六面体的体积可以表示为.

$$V=\left\|\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\right\| \tag{3-6}$$

由此可知, 三个向量共面的充要条件是它们无法张成一个具有体积的实体, 即它们所张成的平行六面体体积为零. 这等价于它们的混合积为零, 即上述行列式的值为零.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.10 (平面截距式方程) 设平面 π 与 x, y, z 坐标轴分别交于三点

$$A(a,0,0), \quad B(0,b,0), \quad C(0,0,c)$$

其中 a, b, c 均为非零实数. 求该平面的方程.

解 平面方程可由共面条件确定. 设 $P(x,y,z)$ 是该平面上的任意一点, 则向量 $\vec{AP}$、$\vec{AB}$、$\vec{AC}$ 必共面; 共面的充要条件是它们张成的平行六面体体积为零, 即三者构成的行列式为零. 由顶点坐标相减,

$$\vec{AP} = (x-a, y-0, z-0) = (x-a, y, z), \quad \vec{AB} = (0-a, b-0, 0-0) = (-a, b, 0), \quad \vec{AC} = (0-a, 0-0, c-0)$$

知乎@余命数

令其构成的行列式等于零, 得

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

沿第一行展开此行列式,

$$(x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$(x-a)(bc) - y(-ac) + z(0-(-ab)) = 0,$$

整理得

$$bcx - abc + acy + abz = 0.$$

将常数项 $-abc$ 移到等式右边,

$$bcx + acy + abz = abc.$$

由于 a, b, c 均非零, 以 abc 同除等式两边, 便得到平面方程的著名形式, 即**截距式方程**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.3.2 行列式与多项式因式分解

行列式本身是元素的多线性组合, 因此一旦元素中含有未知量, 行列式自然就是关于这些未知量的一个多项式. 这一点使得行列式成为因式分解 (尤其是高次、多元、具有对称性或轮换对称性的多项式)的一个有效工具.

总体思路可以概括为两种互补的方向.

- *从行列式出发做因式分解*. 把行列式看成多项式, 利用代入使行列式为零来找因式;
- *从多项式出发构造行列式*. 先把一个给定多项式巧妙地改写成一个行列式的值, 再利用行列式的初等变换和公因式提取来实现因式分解.

这两种方法的理论基础都来自下列两条简单却非常有力的原理.

3.3.2.1 根与因式的关系(因式定理)

对于一个关于变量 x 的一元多项式 $P(x)$, 因式定理指出.

$$\text{如果} P(a)=0, \text{那么} (x-a) \text{是} P(x) \text{的一个因式}.$$

多元情形下, 若把某个变量看作未知, 其余变量看作参数, 这一原理同样成立. 例如, 设 $P(a,b,c)$ 是关于 a 的多项式(b,c 只是系数所在的参数). 若

$$P(b,b,c)=0,$$

则在多项式环 $\mathbb{R}[a,b,c]$ 中, $(a-b)$ 就是 $P(a,b,c)$ 的一个因式. 把 a 换成 b 会使多项式变成 0, 即 $(a-b)$ 整除这个多项式.

3.3.2.2 行列式的零值条件

若行列式的任意两行或两列成比例(特别是完全相同), 则该行列式的值为零.

这源于行列式对每一行, 或列的线性性和交错性. 当两行 (列) 相同或成比例时, 行列式中相应项彼此抵消, 结果必为 0.

把这两个原理结合, 就得到利用行列式寻找多项式因式的基本逻辑链条.

1. 把一个含有变量的行列式 $D(x,y,z,\dots)$ 视作关于这些变量的多项式;
2. 通过对变量赋特定值, 如令 $x=y$ 或令某变量为 0,1 等, 观察此时行列式的两行或两列是否会变得相同或成比例;
3. 一旦在这种代入下出现两行, 或两列相同, 或成比例, 就知道此时行列式的值必为 0;

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4. 因此, 按因式定理, 对应的表达式, 如 $x-y$、$a+b+c$ 等就是该行列式所代表多项式的一个因式.

对于范德蒙行列式、轮换对称行列式等高度对称的结构, 这一逻辑链条往往能系统地逼出所有本应出现的线性因式, 如 $(x-y)$、$(a-b)$、$(a+b+c)$ 等, 再配合次数比较和系数比较, 就可以完成因式分解.

知乎@余命数

3.3.2.3 典型用途概览

知乎@余命数

行列式方法在因式分解中的常见用途包括.

- 处理范德蒙类行列式, 得到简洁的积形式, 如 $\prod_{i<j}(x_i-x_j)$;
- 对轮换(循环)对称多项式/行列式自动检出因式 $(a+b+c)$、$(a-b)(b-c)(c-a)$ 等;
- 在题目给出的是普通多项式时, 逆向构造行列式, 通过初等变换和公因式提取完成分解;
- 证明某些多项式恒等式, 例如 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 时, 行列式方法往往给出结构清晰的证明.

分别从两种方向整理具体操作步骤.

3.3.2.4 一、从行列式出发做因式分解

知乎@余命数

设 $D(a,b,c,\dots)$ 是由若干多项式元素构成的行列式.

1. **寻找线性因式(通过造零)**
   仔细观察行列式的结构, 尝试通过代入

$$a=b,\quad b=c,\quad a=-b,\quad a+b+c=0,\quad x=0,1,\dots$$

   等特殊关系, 使得两行或两列变得相同/成比例, 从而保证 $D=0$. 每得到一次这样的必为 0 的代入关系, 就对应找到了一个因式.
   例如.

   - 若令 $a=b$ 时 $D=0$, 则 $(a-b)$ 是 D 的一个因式;
   - 对于轮换对称行列式, 如果 $(a-b)$ 是因式, 那么通常 $(b-c)$、$(c-a)$ 也是因式;
   - 若总能在 $a+b+c=0$ 时得到 $D=0$, 往往 $(a+b+c)$ 就是一个因式.

2. **比较次数**
   把 D 展开成多项式后, 可以讨论它的总次数(多元情形可以看作齐次多项式的次数, 或专门看作关于某一指定变量的次数).

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对大多数有规律的行列式, 只需观察每行中次数最高的项, 从每行各取一次就能得到最高次项. 例如, 对

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

每一行的最高次数分别为 $0,1,2$, 故整个行列式是一个三次齐次多项式.
同时, 计算前一步已找到的所有因式之积的总次数. 若两者次数相同, 则行列式与这些因式之积至多只差一个常数因子.

3. **确定常数因子**
若已知

$$D = k \cdot (\text{因子}_1) \cdot (\text{因子}_2) \cdots,$$

且左右两边次数相同, 则只需要比较某个具体单项式的系数即可确定 k.
常用做法是选取行列式展开中较容易定位的某一单项式, 例如主对角线上元素乘积产生的那一项, 在因式乘积一侧也找到同一单项式, 比较系数即可. 若 $k=1$, 则说明因式分解已经完备.

3.3.2.5 二、从多项式出发构造行列式

当题目一开始给出的是普通多项式 $P(x)$ 或 $P(a,b,c,\dots)$ 时, 也可以*主动*把它写成行列式的形式, 然后用上面的行列式技巧来说明因式结构.

1. **构造行列式**
这是最具创造性的一步. 目标是把 P 通过分组、配凑等方式写成

$$P = A(x)D(x) - B(x)C(x)$$

这样的 $AD-BC$ 结构, 从而可以写成一个二阶行列式.

$$P(x) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{vmatrix}.$$

有时也可以构造成更高阶行列式, 但能够用 2×2 解决时往往最简洁.

2. **初等变换制造公因式**
利用行列式的初等变换性质.

- 某一行(列)乘以一个数加到另一行(列)上, 行列式的值不变;
- 调换两行(列)只会改变符号;
- 某一行(列)乘以常数 k, 行列式整体乘以 k.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

通过这些变换，力图使某一行或某一列的每一项都含有同一个因式，例如 $(x+3)$、$(x-1)$、$(a+b+c)$ 等.

3. **提取公因式**

一旦某行或某列出现了公因式，就可根据行列式的多线性性质把它提出行列式之外.

$$\begin{vmatrix} f(x)\,g(x) & f(x)\,h(x) \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} = f(x) \begin{vmatrix} g(x) & h(x) \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

4. **化简并重复**

对提取了公因式后剩下的、更简单的行列式，继续做初等变换与公因式提取，直至可以直接计算其值. 最终就得到

$$P = (\text{若干因式}) \times (\text{一个较简单的多项式}),$$

这样 P 的因式结构就显现出来了.

下列例题展示这两种思路在具体问题中的运用，既有标准范德蒙行列式及其变体，也有轮换对称行列式以及经巧妙代数构造得到的 2×2 行列式.

例题 3.11 因式分解多项式 $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

解 把 $P(x)$ 写成一个 2×2 行列式. 对多项式分组，

$$P(x) = (x^3 + 4x^2) + (x - 6) = x^2(x+4) - (-1)(x-6),$$

于是

$$P(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x-6 \\ -1 & x+4 \end{vmatrix},$$

因为

$$\begin{vmatrix} x^2 & x-6 \\ -1 & x+4 \end{vmatrix} = x^2(x+4) - (x-6)(-1) = x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

对行列式做初等变换以制造公因式. 做列变换 $C_2 \to C_2 + C_1$ 后，

$$P(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 + x - 6 \\ -1 & x+3 \end{vmatrix},$$

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其中二次三项式 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, 故

$$P(x)=\begin{vmatrix} x^2 & (x+3)(x-2) \\ -1 & x+3 \end{vmatrix}.$$

此时第二列有公因式 $(x+3)$, 按行列式列的多线性提出,

$$P(x)=(x+3)\begin{vmatrix} x^2 & x-2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

再做行变换 $R_1 \to R_1+R_2$ 进一步化简,

$$P(x)=(x+3)\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

由于 $x^2-1=(x-1)(x+1)$, 第一行有公因式 $(x-1)$, 提出,

$$P(x)=(x+3)(x-1)\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

计算剩下的 2×2 行列式,

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=(x+1)\cdot 1-1\cdot(-1)=x+2,$$

因此

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x+3).$$

本例属于从多项式出发构造行列式的思路. 先凑出 $AD-BC$, 再用行列式变换与公因式提取完成因式分解.

例题 3.12 (范德蒙行列式) 因式分解三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

解 把 D 视为关于 x,y,z 的一个多项式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

先通过造零寻找因式. 若令 $x=y$, 则第一列与第二列完全相同, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y & z \\ y^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $x=y$ 时 $D=0$, 由因式定理知 $(x-y)$ 是 D 的一个因式. 同理, 由于 x,y,z 的地位完全对称, 令 $y=z$ 得 $(y-z)$ 是一个因式, 令 $z=x$ 得 $(z-x)$ 是一个因式. 于是 D 至少含有因式

$$(x-y)(y-z)(z-x).$$

再比较次数. 第 k 行的元素是 $x^{k-1}, y^{k-1}, z^{k-1}$, 其次数分别为 $0,1,2$, 故整个行列式是关于 x,y,z 的三次齐次多项式; 而因式乘积 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的总次数也是 3. 因此存在常数 k 使得

$$D = k(x-y)(y-z)(z-x).$$

最后比较系数确定 k. 在左边的展开式中, yz^2 项只可能来自主对角线 $1\cdot y\cdot z^2$, 故其系数为 $+1$. 右边展开

$$(x-y)(y-z)(z-x) = -xz^2 - y^2z + yz^2 - x^2y + x^2z + xy^2,$$

其中 yz^2 的系数也是 $+1$, 故 $1 = k\cdot 1$, 即 $k=1$.

故

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

本例是从行列式出发的标准范例. 用行列式的零值条件找线性因式, 用次数与系数比较确定常数因子.

例题 3.13 因式分解行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 每一列都含公因式：第 1 列有 x，第 2 列有 y，第 3 列有 z. 由行列式列的多线性将这三个因式提出，

$$D = xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

括号内是三阶范德蒙行列式，其因式分解刚刚已求得为 $(x-y)(y-z)(z-x)$，故

$$D = xyz(x-y)(y-z)(z-x).$$

本例先利用公因式把行列式简化，再套用已知模型.

知乎@余命数

例题 3.14　因式分解轮换对称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

知乎@余命数　知乎@余命数

解 该行列式具有明显的轮换对称性，把 $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$ 作循环置换，行列式的形式保持不变. 这种对称性提示因式中很可能包含对称的表达式，例如 $(a+b+c)$.

为造出 $(a+b+c)$，将第 2 列与第 3 列同时加到第 1 列上 $(C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$，得

知乎@余命数

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix}.$$

知乎@余命数　知乎@余命数

此时第一列每个元素都是 $(a+b+c)$，按行列式列的多线性将其提出，

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}.$$

知乎@余命数

再做行变换 $R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$ 制造零元以降阶，

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix},$$

沿第一列展开便化为一个二阶行列式，

$$D = (a+b+c)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix}.$$

计算此 2×2 行列式并整理，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} &= (c-b)(b-c) - (a-c)(a-b) \\ &= -(b-c)^2 - (a^2 - ab - ac + bc) \\ &= -(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca), \end{aligned}$$

于是

$$D = -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

另一方面，利用恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

可知

$$D = -(a^3+b^3+c^3-3abc) = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

本例的要领是用恰当的列（行）变换主动造出 $(a+b+c)$ 这样的对称因式，再经降阶与整理，轮换对称行列式的因式结构便清晰可见.

行列式给出体积缩放因子. 第3.4节 把矩阵当作几何变换的算子. 旋转、反射、切变，以及齐次坐标下的平移.

3.4 线性变换与几何应用

在 第3.2节 至 第3.3节 中，矩阵作为数表与行列式的载体出现. 本节转向几何，矩阵同时是空间变换的算子，也用来记录坐标.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

旋转、镜像、切变、缩放等几何变换可由矩阵统一描述; 行列式度量面积的变化与翻转; 矩阵语言可直接判断一条二次曲线是圆、椭圆、双曲线还是抛物线; 中学解析几何里的配方与旋转坐标系, 在高观点下是线性代换(矩阵变换).

3.4.0.1 线性变换的矩阵表示

当我们说一个映射 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是**线性变换**时, 意味着它保持了向量加法和标量乘法的结构. 原点保持不动, 直线变换后仍为直线, 或退化为点, 且平行的刻度保持均匀.

任何平面上的线性变换都可以由一个二阶方阵 A 唯一确定. 如前所述, 寻找这个矩阵的要点在于追踪**基向量**的去向. 设标准基向量

知乎@余命数

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

知乎@余命数　知乎@余命数

若它们在变换 T 下的像分别为

知乎@余命数　知乎@余

$$T(e_1)=v_1,\qquad T(e_2)=v_2,$$

则该变换对应的矩阵为.

$$A=\begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix},\qquad T(x)=Ax.$$

即. **知道基向量往哪儿去, 就等于知道了整个线性变换**.

知乎@余命数

3.4.0.2 典型变换

在解析几何中, 几种最常用的线性变换可以统一写成矩阵.

- **各向同性缩放**(等比放缩).

$$S_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix},\quad (x,y)^T\mapsto(\lambda x,\lambda y)^T.$$

知乎@余命数

- **各向异性缩放**(在不同方向上拉伸不同倍数).

$$D_{a,b}=\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix},\quad (x,y)^T\mapsto(ax,by)^T.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **关于坐标轴的镜像**.

$$x\text{-轴对称：}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad y\text{-轴对称：}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

- **关于原点的旋转**(逆时针角 θ).

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

- **切变** (Shear).

$$\text{水平切变：}\ S_k=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad (x,y)^T\mapsto(x+ky,y)^T.$$

下列例子展示矩阵与几何的对应.

例题 3.15 (镜像变换) 求平面上关于直线 $y=x$ 对称的变换矩阵.

解 追踪基向量的像即可确定变换矩阵.x 轴上的单位向量 $e_1=(1,0)^T$ 关于直线 $y=x$ 对称后落在 y 轴上, 变为 $v_1=(0,1)^T$; y 轴上的单位向量 $e_2=(0,1)^T$ 对称后落在 x 轴上, 变为 $v_2=(1,0)^T$. 以这两个像作为列向量, 变换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

验证. 对任意点 $(a,a)^T$,

$$P\begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix},$$

保持不动; 点 $(1,0)^T$ 变成 $(0,1)^T$, 与几何直观一致.

例题 3.16 (旋转变换) 求绕原点逆时针旋转角 θ 的线性变换矩阵.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解　同样考察基向量的像. 点 $(1,0)$ 绕原点逆时针旋转 θ 后落在单位圆上的点 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 故

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

点 $(0,1)$ 绕原点逆时针旋转 θ 后, 其极角从 $\frac{\pi}{2}$ 变为 $\frac{\pi}{2}+\theta$, 坐标为

$$(\cos(\tfrac{\pi}{2}+\theta),\ \sin(\tfrac{\pi}{2}+\theta)) = (-\sin\theta,\ \cos\theta),$$

故

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

以这两个像作为列向量, 旋转矩阵为

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

这个矩阵在高中解析几何中非常重要, 它描述坐标系的旋转, 并暗含了三角恒等式, 例如

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

从矩阵乘法写开, 就得到熟悉的

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

例题 3.17 (切变与面积不变性) 考察水平切变矩阵 $S_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 对单位正方形的作用, 验证它保持面积不变.

解　单位正方形的顶点为 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$. 变换后四点分别为

$$(0,0),\ (1,0),\ (1+k,1),\ (k,1),$$

它们构成一个平行四边形, 其两条邻边向量为

$$\vec{u} = (1,0)^T, \quad \vec{v} = (k,1)^T.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

平行四边形面积等于

$$|\det(\vec{u},\vec{v})| = \begin{Vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = 1,$$

与原单位正方形面积相同. 这与 $|\det(S_k)| = 1$ 完全一致, 见下一小节.

知乎@余命数

3.4.0.3 行列式的几何意义

在 第3.3节 中, 二阶行列式给出两个向量围成的平行四边形的有向面积.

知乎@余命数

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

知乎@余命数

如果将这两列看作两个向量 $\vec{u} = (a,b)^T$, $\vec{v} = (c,d)^T$, 则

$$|\det(\vec{u},\vec{v})|$$

就是它们围成平行四边形的面积.

更一般地, 对于线性变换 $y = Ax$, 如果输入空间中的一个图形具有面积 S, 那么变换后的图形面积 S' 与原面积之间存在确定的倍率关系.

定理 3.1 (面积变换定理) 设 A 为二阶方阵, Ω 是平面上的一个可测图形, 其面积为 S_Ω. 经矩阵 A 变换后, 图形 $\Omega' = \{Ax \mid x \in \Omega\}$ 的面积为.

$$S_{\Omega'} = |\det(A)| \cdot S_\Omega.$$

证明 先看单位正方形. 设 A 的两列分别为

$$\mathbf{u} = (a,c)^T, \qquad \mathbf{v} = (b,d)^T.$$

单位正方形在变换 $x \mapsto Ax$ 下变为由 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 张成的平行四边形, 其面积为

$$|\det(\mathbf{u},\mathbf{v})| = |ad - bc| = |\det(A)|.$$

任意平行四边形可由单位正方形再经一个线性变换得到, 因而同样按 $|\det(A)|$ 的比例改变面积. 将平行四边形沿对角线分成两个三角形, 可知三角形面积也按同一比例改变; 再把多边形剖分为有限个三角形, 结论对任意多边形成立.

对一般可测图形, 采用面积定义中的多边形逼近. 可用内接多边形和外接多边形把它的面积夹住, 且两者面积差任意小. 若 $\det(A) = 0$, 则 A 的像至多是一条

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

直线, 面积为 0, 公式成立. 若 $\det(A) \neq 0$, 线性变换保持包含关系; 对夹逼的多边形使用上一步的结论, 再令多边形逼近误差趋于 0, 即得

$$S_{\Omega'} = |\det(A)| S_{\Omega}.$$

□

因此, 行列式绝对值的几何含义是. **它是线性变换改变面积的比例系数.**

- $|\det(A)| > 1$: 变换产生放大效果.
- $0 < |\det(A)| < 1$: 变换产生缩小效果.
- $\det(A) = 0$: 图形被压扁, 面积变为 0(退化为直线或点).
- $\det(A) < 0$: 变换包含了一个镜像翻转操作, 改变了图形的手性(定向).

例题 3.18 (三角形面积的行列式公式) 已知三角形三个顶点

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \quad P_3(x_3, y_3)$$

证明其面积为

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

解 以 P_1 为原点, 向量

$$\vec{u} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)^T, \quad \vec{v} = P_3 - P_1 = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1)^T$$

构成三角形的两条邻边. 它们围成的平行四边形面积为

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

三角形面积是该平行四边形的一半, 故结论成立.

例题 3.19 (椭圆面积公式) 利用单位圆的变换推导长半轴为 a、短半轴为 b 的椭圆面积.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

解 单位圆 $x^2+y^2\le 1$ 的面积已知为 π, 标准椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$. 构造对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

将单位圆拉伸为该椭圆, 对单位圆上的任意向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2)^T$, 变换后的向量

$$\mathbf{x}=A\mathbf{u}=(au_1,bu_2)^T$$

满足

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=u_1^2+u_2^2\le 1,$$

故该变换确实将单位圆双射到了椭圆区域.

变换矩阵的行列式 $\det(A)=ab$, 由面积变换定理,

$$S_{\text{椭圆}}=|\det(A)|\cdot S_{\text{单位圆}}=ab\cdot\pi=\pi ab.$$

这个推导说明了一种思路. **通过线性变换把复杂图形拉回到熟悉的标准图形, 再用行列式把面积缩放回来**. 这是许多高等积分技巧的雏形.

3.4.0.4 齐次坐标与平移

线性变换有一个固有的局限. 它必须固定原点 ($A\mathbf{0}=\mathbf{0}$). 即单纯的 2×2 矩阵乘法无法表示**平移** (Translation).

为了统一处理平移与旋转, 解析几何中引入了**齐次坐标**.

定义 3.10 (齐次坐标) 平面点 (x,y) 的齐次坐标表示为三维列向量

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

通过增加一个维度, 可用 3×3 的矩阵来描述二维平面上的**仿射变换** (Affine Transformation). 例如.

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 平移向量 (h,k):

知乎@余命数

$$T_{h,k}=\begin{pmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad T_{h,k}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+h\\y+k\\1\end{pmatrix}.$$

- 先旋转再平移.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&h\\\sin\theta&\cos\theta&k\\0&0&1\end{pmatrix},$$

知乎@余命数

则

$$\tilde{A}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta+h\\x\sin\theta+y\cos\theta+k\\1\end{pmatrix}.$$

知乎@余命数

这样, 所有旋转 + 缩放 + 切变 + 平移的组合都可以表示为一个 3×3 矩阵的一次相乘. 计算机图形学中, 三维空间里的物体变换同理使用 4×4 齐次坐标矩阵.

例题 3.20 (组合变换一次完成) 已知点 $P(1,0)$, 先绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$, 再向右平移 2 个单位, 求变换后的坐标, 并给出相应的齐次矩阵.

解 绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的矩阵为

$$R_{\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

向右平移 2 的矩阵为

$$T_{2,0}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

知乎@余命数

知乎@余命数

对应的齐次形式(先旋转后平移)是

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

代入 P 的齐次坐标 $(1,0,1)^T$:

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

知乎@余命数

因此变换后点为 $(2,1)$.

3.4.0.5 二次曲线的矩阵分类 *

中学解析几何中的圆锥曲线,一般从如下二元二次方程出发.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

其中 A, B, C 不全为零. 交叉项 xy 的存在使得曲线发生旋转, 难以直接辨识其类型(椭圆、双曲线或抛物线).

矩阵提供一种更高视角. 先**只看最高次项**, 忽略线性项和常数项, 关注在方程的二次部分, 即二次型.

3.4.0.6 二次型与系数矩阵

方程的二次部分可以写成矩阵形式.

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中 M 是一个实对称矩阵, 称为**系数矩阵**, q 称为**二次型**.

几何上, M 决定了曲线的开闭形态(椭圆型 / 双曲线型 / 抛物线型). 线性项 $Dx + Ey$ 与常数项 F 会影响曲线的位置、大小以及退化或是否有实点, 但不改变由 $\delta = AC - B^2$ 判定的三大类型.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

3.4.0.7 线性代换下的不变量

设 $x = Ay$, 其中 A 是任意可逆的 2×2 矩阵, 这相当于做了一个线性坐标变换(旋转、缩放、切变等的组合). 则

$$q(x) = x^T M x = y^T (A^T M A) y.$$

这说明.

- 在新坐标中, 二次项的系数矩阵变成 $M' = A^T M A$;
- $\det(M') = \det(A^T)\det(M)\det(A) = \det(A)^2 \det(M)$, 因而**符号**不变.

所以, $\det(M)$ 的符号是一个几何不变量. 不管你怎么选择坐标系, 即怎么做线性代换, 它都不会变号.

知乎@余命数

3.4.0.8 椭圆/双曲线/抛物线判别

记

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \qquad \delta = \det(M) = AC - B^2.$$

定理 3.2 (二次曲线分类准则) 对于二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

其中 A, B, C 不全为 0. 令 $\delta = AC - B^2$.

1. 若 $\delta > 0$: 曲线为**椭圆型**(包括圆、点或虚椭圆);
2. 若 $\delta < 0$: 曲线为**双曲线型**(包括相交双直线);
3. 若 $\delta = 0$: 曲线为**抛物线型**(包括平行双直线、重合直线或虚退化情形).

证明 二次项的系数矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

是实对称矩阵. 二阶实对称矩阵可以经正交变换(旋转或镜像)对角化, 这里引用线性代数的一个基本事实, 即存在正交矩阵 P, 使得

$$P^T M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

知乎@余命数

作正交换元 $(x,y)^T = P(u,v)^T$ 后, 二次部分化为

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2,$$

且 $\delta = \det(M) = \lambda_1\lambda_2$.

若 $\delta > 0$, 两个特征值同号且均非零. 将方程必要时整体乘以 -1, 可把二次部分化为正定型. 对 u, v 分别配方, 方程成为

$$\alpha(u-u_0)^2 + \beta(v-v_0)^2 = K \qquad (\alpha,\beta > 0),$$

因而按 $K > 0, K = 0, K < 0$ 分别为椭圆、点或虚椭圆.

若 $\delta < 0$, 两个特征值异号. 配方后得到

$$\alpha(u-u_0)^2 - \beta(v-v_0)^2 = K \qquad (\alpha,\beta > 0),$$

其中 $K \neq 0$ 时为双曲线, $K = 0$ 时退化为两条相交直线, 故为双曲线型.

若 $\delta = 0$, 且 A, B, C 不全为零, 则恰有一个特征值为 0. 旋转后方程形如

$$\lambda u^2 + pu + qv + r = 0 \qquad (\lambda \neq 0).$$

当 $q \neq 0$ 时可解出 v 为 u 的二次函数, 是抛物线; 当 $q = 0$ 时方程只含 u, 按一元二次方程判别式退化为两条平行直线、重合直线或无实点的虚退化情形. 因而属于抛物线型. □

这是高中常见判别式 $B^2 - AC$ 的矩阵版. 因为

$$\delta = AC - B^2 = -(B^2 - AC),$$

于是

$$\delta > 0 \iff B^2 - AC < 0, \quad \delta < 0 \iff B^2 - AC > 0, \quad \delta = 0 \iff B^2 - AC = 0,$$

与熟悉的判别法则($B^2 - AC < 0$ 为椭圆, $= 0$ 为抛物线, > 0 为双曲线)完全一致, 只是写法不同而已.

$\det(M)$ 的符号已经足以判断曲线类型. 如果用一点特征值(此处仅引用事实), 实对称矩阵 M 可以正交对角化.

$$P^T M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

其中 P 是一个旋转或旋转与镜像复合的正交矩阵, λ_1, λ_2 是实特征值. 换变量

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

二次项就变成

$$q(x, y) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2.$$

此时

$$\delta = \det(M) = \lambda_1 \lambda_2.$$

于是.

- $\delta > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ 同号.u^2、v^2 同号, 形如 $\alpha u^2 + \beta v^2 + \cdots = 0$, 为椭圆型;
- $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ 异号. 形如 $u^2 - v^2 + \cdots = 0$, 为双曲线型;
- $\delta = 0 \Rightarrow$ 有一个特征值为 0. 形如 $u^2 + \cdots = 0$ 或 $v^2 + \cdots = 0$, 缺少一个二次方向, 得到抛物线型.

这就是定理 3.2 背后的高观点.

例题 3.21 (用行列式快速判别类型) 判断曲线

$$x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

的类型.

解 对应的系数矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

其中交叉项 $2B = 4$, 故 $B = 2$. 于是

$$\delta = \det(M) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0,$$

该曲线为**双曲线型**.

如要验证, 可配方.

$$x^2 + 4xy + y^2 = (x + 2y)^2 - 3y^2 = 1,$$

令 $u = x + 2y,\ v = \sqrt{3}\, y$, 方程变为 $u^2 - v^2 = 1$, 是标准双曲线.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.22 (椭圆型消去 xy 项) 判断并化简曲线

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 = 12.$$

解 先判别类型. 二次项矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \delta = 3 \cdot 3 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5 > 0,$$

故为**椭圆型**.

接下来用旋转坐标系消去 xy 项, 在线性代数语言下即找一个正交矩阵 R 使 $M' = R^T M R$ 为对角矩阵. 一个自然的选择是 45° 旋转.

$$R = R_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

按矩阵乘法展开得

$$M' = R^T M R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

作变量代换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = \dfrac{u - v}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{u + v}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

代入原方程, 二次部分变为二次型

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} M' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u^2 + 5v^2,$$

故方程化为

$$u^2 + 5v^2 = 12.$$

这是一个以原点为中心、长短轴分别沿 u、v 轴的椭圆.

$$\frac{u^2}{12} + \frac{v^2}{12/5} = 1.$$

与传统先求旋转角 θ 再代入的做法相同, 只是用矩阵 R 更为简洁统一.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.23 (抛物线型 $\delta = 0$) 判断并化简曲线

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0.$$

解 二次项矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0,$$

故为**抛物线型**(或其退化形式).

注意到 $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, 方程可化为

$$(x + y)^2 + 2(x + y) = 0.$$

令 $u = x + y$, 则

$$u^2 + 2u = 0 \iff u(u + 2) = 0,$$

即原方程是两条直线

$$x + y = 0, \quad x + y = -2$$

的并集, 是抛物线型的一个退化情形(平行双直线).

这里以 $x + y$ 为新变量 u, 实质上是做了一次线性代换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的第一行, 其中 P 的第一行是 $(1, 1)$.

3.4.0.9 从配方法到矩阵语言

中学里处理圆锥曲线, 常用两类方法.

1. **配方**消去一次项, 找到中心或顶点, 如

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0 \ \Rightarrow \ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

2. **旋转坐标系**消去 xy 项, 用公式 $\tan 2\theta = \dfrac{2B}{A - C}$.

在矩阵视角下.

- 配方对应**平移**. 对方程

$$x^T M x + b^T x + F = 0,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $x = z + x_0$, 选取 x_0 使得线性项消失, 即 $2Mx_0 + b = 0$, 就完成了把中心移到原点的操作;

- 旋转对应**正交变换**. 选正交矩阵 P, 令 $x = Py$, 则二次项矩阵变为 P^TMP, 可选 P 使其对角化, 从而消去 xy 项.

二者组合(先平移再旋转)就把任意圆锥曲线化成最熟悉的标准方程. 整个过程只是在对向量做线性代换, 这就是圆锥曲线的线性代数高观点.

知乎@余命数

例题 3.24 (用矩阵思路整理一条椭圆) 设曲线

$$4x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0.$$

用矩阵加线性代换的语言, 把它化成标准椭圆方程, 并求椭圆中心与半轴长.

解 二次项矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = 4 \cdot 1 - 0 = 4 > 0,$$

没有 xy 项且为椭圆型, 故无需旋转, 只需平移(配方)即可.

原方程即

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 = 0,$$

亦即 $4x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0$. 对 x、y 各自配方,

$$4x^2 - 4x = 4\Big(x^2 - x\Big) = 4\Big[(x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\Big], \qquad y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1.$$

代回原式并整理常数项,

$$\begin{aligned} 4\Big[(x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\Big] + (y-1)^2 - 1 - 2 = 0, \\ 4(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y-1)^2 - 1 - 1 - 2 = 0 \\ \iff 4(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 4. \end{aligned}$$

两边同除以 4,

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

这就是以 $C(\frac{1}{2}, 1)$ 为中心、横向半轴长 1、纵向半轴长 2 的椭圆(对应横轴长 2、纵轴长 4).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在线性代数语言里, 平移

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

知乎@余命数就是把新坐标 (u, v) 的原点移到椭圆中心, 然后方程在 (u, v) 坐标下变为

知乎@余命数

$$4u^2 + v^2 = 4.$$

第3.5节 用逆矩阵与克拉默法则判定变换何时可逆, 并给出 $Ax = b$ 在 $\det A \neq 0$ 时的显式解.

3.5 逆矩阵与克拉默法则

3.5.1 逆矩阵

上一节把矩阵写成线性变换. 自然要追问, 矩阵 A 对空间做了某种变换后, 能否由另一个矩阵 B 把空间还原回初始状态.

这就引出了**逆矩阵**的概念. 在实数算术中, 非零数 a 存在倒数 a^{-1}, 使得 $a \cdot a^{-1} = 1$. 对矩阵寻求类似的结构, 但必须留意零元素(零矩阵或零行列式)带来的奇异性.

知乎@余命数　知乎@余命数

3.5.2 变换的可逆性

余命数

考虑线性方程组 $Ax = b$. 这里的 A 是一个算子, 将输入向量 x 映射为输出向量 b. 如果我们要从 b 反推 x, 实质上是在寻找一个逆算子 A^{-1}, 使得 $x = A^{-1}b$.

若 A 代表逆时针旋转 90°, 那么 A^{-1} 显然应当是顺时针旋转 90°. 若 A 代表放大 2 倍, A^{-1} 则是缩小 2 倍. 然而, 如果 A 是一个投影变换, 例如将三维空间压扁到一个平面上, 或者将所有点都映射到原点(零矩阵), 这种变换显然丢失了信息, 无法复原.

定义 3.11 (逆矩阵) 对于 n 阶方阵 A, 如果存在 n 阶方阵 B, 使得

$$AB = BA = I_n$$

其中 I_n 是单位矩阵, 则称 A 是**可逆的** (Invertible) 或**非奇异的** (Non-singular). 矩阵 B 称为 A 的**逆矩阵**, 记作 A^{-1}.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 3.2
定义中要求 $AB=BA$ 看似多余, 因为对于有限维方阵, 仅需 $AB=I$ 即可推出 $BA=I$. 但这一性质并不平凡, 它依赖于线性空间的维数理论. 在几何上, 即左逆(能够撤销变换的算子)必定也是右逆.

知乎@余命数

3.5.3 伴随矩阵与逆的构造

具体计算一个矩阵的逆, 需要建立矩阵元素与其行列式之间的联系. 回忆代数余子式的展开定理.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det(A)$$

知乎@余命数

其中 A_{ik} 是元素 a_{ik} 对应的代数余子式. 把某一行的元素与另一行的代数余子式相乘, 得到下面的和式. 考虑

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \quad (i \neq j)$$

这等价于计算一个新矩阵的行列式, 该矩阵的第 j 行被替换成了第 i 行的复制品. 根据行列式性质, 含有两行相同的行列式值为零. 总结上述两条规律, 引入 Kronecker 记号 δ_{ij}:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}\det(A)$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

这提示我们, 如果构造一个由代数余子式组成的矩阵, 并将其转置, 使得行元素与行余子式在乘法中能够对应相碰, 便能构造出单位矩阵的倍数.

定义 3.12 (伴随矩阵) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵的**转置矩阵**.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

知乎@余命数

利用上述的正交性关系, 可直接验证.

知乎@余命数

$$A\cdot\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}\det(A) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det(A) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \det(A)\end{pmatrix}=\det(A)I$$

由此导出了逆矩阵存在的充要条件及显式公式.

知乎@余命数

定理 3.3 (逆矩阵公式) 方阵 A 可逆的充要条件是 $\det(A)\neq 0$. 当此条件满足时,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \tag{3-7}$$

证明 先证充分性. 由代数余子式展开的正交关系可得

知乎@余命数

$$A\operatorname{adj}(A)=\det(A)I,\qquad \operatorname{adj}(A)A=\det(A)I.$$

若 $\det(A)\neq 0$, 两边同除以 $\det(A)$, 得

知乎@余命数

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right)=I,\qquad \left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right)A=I.$$

知乎@余命数

因而 A 可逆, 且逆矩阵正是公式所给矩阵.

再证必要性. 若 A 可逆, 存在 A^{-1} 使 $AA^{-1}=I$. 取行列式并用行列式乘法公式,

$$\det(A)\det(A^{-1})=\det(I)=1,$$

故 $\det(A)\neq 0$. □

这个定理连接了代数与几何.

- **几何上**.$\det(A)=0$ 意味着变换将空间压扁了, 例如体积变为 0. 被压扁的维度丢失了信息, 无法通过逆变换复原.
- **代数上**.$\det(A)$ 出现在分母位置. 除数不能为零.

例题 3.25 求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 行列式 $\det(A) = ad - bc$. 各元素的代数余子式为 $A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$, 按代数余子式的转置排列得到伴随矩阵

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

因此, 若 $ad - bc \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

知乎@余命数

二阶矩阵求逆即主对角元素对调、副对角元素变号, 再除以行列式.

3.5.4 克拉默法则

对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组 $Ax = b$, 如果系数矩阵 A 可逆, 可直接写出解的代数形式 $x = A^{-1}b$. 将逆矩阵的显式公式代入, 可以得到一个仅仅依赖于行列式的解法(克拉默法则).

知乎@余命数

3.5.4.1 法则陈述

知乎@余命数

定理 3.4 (克拉默法则) 设线性方程组 $Ax = b$ 中 A 为 n 阶方阵、b 为 n 维列向量, 且系数行列式 $D = \det(A) \neq 0$. 则方程组有唯一解, 且第 j 个分量 x_j 为.

$$x_j = \frac{D_j}{D} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \tag{3-8}$$

其中 D_j 是将矩阵 A 的第 j 列替换为常数项向量 b 后得到的矩阵的行列式.

证明 因 $D = \det(A) \neq 0$, 由逆矩阵公式知 A 可逆, 故方程组有唯一解.

设 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. 方程 $Ax = b$ 等价于

$$b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

将 A 的第 j 列换成 b, 并利用行列式对每一列的线性性,

$$\begin{aligned} D_j &= \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, b, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

知乎@余命数

当 $i \neq j$ 时, 上式中的行列式有两列相同, 故为 0; 只有 $i = j$ 的项保留, 得

$$D_j = x_j \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = x_j D.$$

由于 $D \neq 0$, 故 $x_j = D_j/D$. □

3.5.4.2 几何证明与直观

代数推导(利用伴随矩阵展开)是克拉默法则的标准证法, 但它掩盖了几何意义. 这里给出一个基于体积变换的几何证明.

考察方程 $Ax = b$. 设 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 方程实际上是说向量 b 是列向量的线性组合.

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

知乎@余命数

我们以二维情况为例. 系数行列式 $D = \det(\alpha_1, \alpha_2)$ 代表由 α_1, α_2 构成的平行四边形的有向面积. 考虑 D_1, 即把第一列 α_1 换成 b 所得的行列式

$$D_1 = \det(b, \alpha_2),$$

将 $b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$ 代入并利用行列式对每一列的线性性,

知乎@余命数

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2,\ \alpha_2) \\ &= x_1 \det(\alpha_1, \alpha_2) + x_2 \det(\alpha_2, \alpha_2). \end{aligned}$$

含有两列相同的行列式 $\det(\alpha_2, \alpha_2) = 0$(由行列式的交错性), 故仅剩第一项

知乎@余命数

$$D_1 = x_1 \det(\alpha_1, \alpha_2) = x_1 D,$$

由此立即得到 $x_1 = \frac{D_1}{D}$.

这个几何推导可以推广到 n 维.D_j 实际上是将 n 维平行六面体在第 j 个方向上的边长拉伸了 x_j 倍, 同时引入了其他方向的剪切 (Shear). 由于行列式对剪切变换是不变的, 即 $\det(\alpha_i, \alpha_i) = 0$, 唯一改变体积的因素就是第 j 个方向的伸缩系数 x_j.

以上推导说明, **分量 x_j 是两个体积的比率**.

$\det A = 0$ 时不可逆仍有层次之分, 空间可能被压成平面、直线或一点. 第3.6节用**秩**精确描述维度塌缩, 并用高斯消元计算它.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.6 秩与高斯消元

3.6.1 秩与线性相关性

已在 第3.3节 中了解过. 行列式是否为零区分了方阵的可逆与奇异. 当 $\det(A) \neq 0$ 时矩阵满秩可逆; 当 $\det(A) = 0$ 时矩阵奇异, 但奇异二字内部仍有不同的维数塌缩. 然而, 奇异二字掩盖了太多的细节. 一个 3×3 的矩阵如果是奇异的, 它可能把三维空间压缩成一个二维平面, 也可能压成一条一维直线, 还可能塌缩成一个零维的点. 仅凭行列式为零这一信息, 我们无法区分这些情形. 为了精确描述矩阵所携带信息的**维度**, 需引入**秩** (Rank) 的概念.

知乎@余命数

3.6.2 线性相关性

矩阵的列向量实质上是一组生成元, 它们通过线性组合生成了像空间. 如果某些列向量可以由其他列向量线性表示, 说明它们提供了冗余的信息.

定义 3.13 (线性相关与线性无关) 设 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 为一组向量. 如果存在一组**不全为零**的标量 $c_1, c_2, \dots, c_k$, 使得

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = \mathbf{0}$$

则称这组向量是**线性相关**的. 反之, 如果上述等式仅在 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ 时成立, 则称这组向量是**线性无关**的.

知乎@余命数

注 3.3
线性相关的几何意义是扁平化. 两个线性相关的向量共线; 三个线性相关的向量共面. 从数据的角度看, 线性相关意味着冗余. 例如, 在统计表中, 如果总分列等于语文列加数学列, 那么总分这一列就是线性相关的, 它没有提供任何新的独立维度.

3.6.3 秩的定义与几何意义

对于一个 $m \times n$ 的矩阵 A, 可将其看作由 n 个列向量组成, 也可以看作由 m 个行向量组成.

定义 3.14 (秩) 矩阵 A 的**列秩**定义为其线性无关的列向量的极大数量. 矩阵 A 的**行秩**定义为其线性无关的行向量的极大数量.

这里有线性代数中的一个重要定理, 即**秩定理**. 尽管行向量属于 $\mathbb{R}^n$, 列向量属于 $\mathbb{R}^m$, 它们处于完全不同的空间, 但它们的有效维度却是严格相等的.

定理 3.5 (秩定理) 对于任意矩阵 A, 其行秩等于列秩. 将其统称为矩阵 A 的**秩**, 记作 $\text{rank}(A)$ 或 $r(A)$.

证明 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 行秩为 r. 取 r 个线性无关的行向量

$$R_{p_1}, R_{p_2}, \dots, R_{p_r}$$

作为行空间的一组基. 对任意第 i 行 R_i, 存在常数 $c_{i1}, \dots, c_{ir}$, 使得

$$R_i = \sum_{s=1}^{r} c_{is} R_{p_s}.$$

取第 j 列并比较第 i 个分量, 得

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{r} c_{is} a_{p_s j}.$$

因而第 j 列向量可写为

$$C_j = \sum_{s=1}^{r} a_{p_s j} \, (c_{1s}, c_{2s}, \dots, c_{ms})^T.$$

这说明所有列向量都落在至多 r 个向量张成的空间中, 所以列秩不超过行秩.

对转置矩阵 A^T 重复同样论证, 等价地交换行与列, 可得行秩不超过列秩. 两个不等式合并, 行秩等于列秩. □

秩最直观的解释是**图像的维度**. 若 A 是一个 3×3 矩阵, 它代表一个线性变换 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

- $\text{rank}(A) = 3$: 图像充满了整个三维空间. 变换是可逆的, 体积变换率 (行列式) 非零.
- $\text{rank}(A) = 2$: 整个三维空间被压缩到了一个二维平面上.
- $\text{rank}(A) = 1$: 整个三维空间被压缩到了一条直线上.
- $\text{rank}(A) = 0$: 整个空间被压缩到了原点 (仅当 A 为零矩阵).

秩与行列式的关系可以概括为. 对于 n 阶方阵 A,$\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$. 更一般地, 矩阵的秩等于其**最高阶非零子式**, 即非零子行列式的阶数.

3.6.4 初等变换与高斯消元

定义了秩之后, 我们面临的实际问题是如何计算一个 10×10 矩阵的秩. 直接寻找最大线性无关组或计算所有子行列式显然是不切实际的. 需一种手段, 在简

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

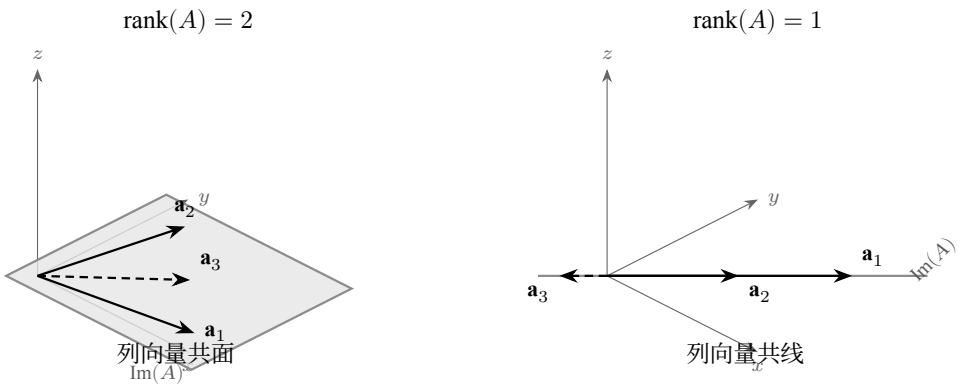


图 3.3 矩阵秩的几何意义：设 $A = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3]$，则 $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\})$. 虚线向量可由其他向量线性表出.

化矩阵形式的同时，严格保持矩阵的秩（以及对应方程组的解集）不变. 这就是**初等变换**.

3.6.5 三种基本操作

考虑求解方程组时的操作. 交换两个方程的位置、将一个方程乘以非零常数、将一个方程的倍数加到另一个方程上. 这些操作不会改变方程组的解. 对应到矩阵上，就是**初等行变换**.

定义 3.15 (初等行变换) 矩阵 A 的三种初等行变换为.

1. **交换**：交换第 i 行和第 j 行的位置. 记作 $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. **倍乘**：将第 i 行乘以非零常数 k. 记作 $R_i \leftarrow kR_i$.
3. **倍加**：将第 j 行的 k 倍加到第 i 行上. 记作 $R_i \leftarrow R_i + kR_j$.

同理可定义初等列变换.

三种初等变换都是可逆操作，可逆性保证了秩不变.

命题 3.1 (秩的不变性) 初等变换不改变矩阵的秩. 若矩阵 A 经过初等变换得到 B，则称 A 与 B **等价**，记作 $A \sim B$.

证明 先看初等行变换. 交换两行只改变行向量的排列；某一行乘以非零常数不改变该行所张成的一维方向；把一行替换为它与另一行倍数之和时，新行属于原行向量组的张成空间. 反过来，原来的该行也可由新行减去另一行的相同倍数得到，因而原行空间与新行空间完全相同. 所以初等行变换保持行秩不变.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

初等列变换同理保持列秩不变. 由秩定理, 矩阵的行秩与列秩相等, 因此无论做初等行变换还是初等列变换, 矩阵的秩都不变. □

这一命题之所以成立, 是因为初等变换实质上只是对原来的行向量组或列向量组做了一个可逆的线性组合. 相应张成空间的维度自然不会变.

3.6.6 矩阵乘法视角的初等变换

初等变换不只是操作规则, 它们本身就是矩阵. **对矩阵 A 做初等行变换, 等价于在 A 的左侧乘以一个特定的初等矩阵**.

定义 3.16 (初等矩阵) 对单位矩阵 I 施行一次初等变换所得到的矩阵, 称为**初等矩阵**.

知乎@余命数

- **交换矩阵** E_{ij}: 由 I 交换第 i, j 行得到.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **倍乘矩阵** $E_i(k)$: 由 I 的第 i 行乘 k 得到.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 3} E_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **倍加矩阵** $E_{ij}(k)$: 由 I 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行得到.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_1} E_{21}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

验证一下倍加操作. 计算 $E_{21}(2) \cdot A$, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 2 \cdot a + 1 \cdot c & 2 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c + 2a & d + 2b \end{pmatrix}$$

结果恰好是将 A 的第 1 行的 2 倍加到了第 2 行.

注 3.4
这是一个普遍规律.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **行变换** $\Longleftrightarrow$ **左乘**初等矩阵.
- **列变换** $\Longleftrightarrow$ **右乘**初等矩阵.

这个性质将算法操作(消元)与代数结构(矩阵乘法)统一了起来.

3.6.7 阶梯形矩阵与秩的计算

通过反复使用初等行变换, 可将任何矩阵化简为一种标准形态, 从而一眼看出其秩的大小. 这种形态称为**行阶梯形** (Row Echelon Form, REF).

定义 3.17 (行阶梯形) 一个矩阵处于行阶梯形, 如果.

1. 所有的零行(元素全为 0 的行)都位于矩阵的底部.
2. 每一非零行的第一个非零元素, 称为**主元**, Pivot 位于上一行主元的右侧.

例如.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个行阶梯形矩阵. 其中加粗的元素 $\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}$ 为主元.

定理 3.6 (行阶梯形矩阵的秩) 行阶梯形矩阵的秩, 等于其**非零行的行数**(也就是主元的个数).

证明 设行阶梯形矩阵有 r 个非零行, 它们的主元列号依次为

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r.$$

只需证明这 r 个非零行线性无关. 假设它们有线性组合为零, 得

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + \cdots + c_r R_r = 0.$$

若系数不全为零, 取最小的指标 s 使 $c_s \neq 0$. 观察第 p_s 列. 第 s 行在此列为非零主元;所有更靠下的非零行主元都在 p_s 右侧, 因而在第 p_s 列为 0;而更靠上的行对应系数已为 0. 所以该列的线性组合值为 c_s 乘以一个非零主元, 不可能等于 0, 矛盾.

因此非零行线性无关, 行秩为 r. 由秩定理, 矩阵秩也等于 r. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在上例中, 非零行有 3 行, 因此该矩阵的秩为 3.

例题 3.26 (求秩与化简) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&0\\3&6&1\end{pmatrix}$ 的秩.

知乎@余命数

解 利用初等行变换消去主元下方的元素以化矩阵为阶梯形. 先以第 1 行为主元消去其下方元素, 做行变换 $R_2 \leftarrow R_2-2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3-3R_1$:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&0\\3&6&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

再以第 2 行为主元消去其下方元素, 做行变换 $R_3 \leftarrow R_3-R_2$:

$$\sim \begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

此时矩阵已达到阶梯形, 非零行有 2 行(第一行和第二行), 因此 $\operatorname{rank}(A)=2$.

这也意味着, 原矩阵的第 3 行可以由前两行线性表示(实际上 $R_3=R_1+R_2$), 它没有提供新的信息.

3.6.8 解线性方程组的理论结构

利用秩的概念, 我们可以完整地回答关于线性方程组 $Ax=b$ 的解的存在性与结构.

考虑方程组 $Ax=b$, 其中 A 为 $m\times n$ 矩阵. 构造**增广矩阵** (Augmented Matrix) $\bar{A}=(A|b)$.

知乎@余命数

定理 3.7 (线性方程组解的判定定理) 1. **无解** $\iff r(A)<r(\bar{A})$.
(意味着向量 b 不在列向量张成的空间内, 引入 b 增加了维度.)

2. **有唯一解** $\iff r(A)=r(\bar{A})=n$, 其中 n 为未知数个数.
(意味着列向量线性无关, 且 b 在张成空间内, 坐标唯一.)

3. **有无穷多解** $\iff r(A)=r(\bar{A})<n$.
(意味着解存在, 但列向量之间存在冗余, 导致坐标表示不唯一. 自由度为 $n-r(A)$.)

知乎@余命数

证明 对增广矩阵 $\bar{A}=(A\mid b)$ 进行初等行变换, 化为行阶梯形矩阵. 初等行变换不改变方程组的解集, 也不改变 A 与 $\bar{A}$ 的秩.

若 $r(A)<r(\bar{A})$, 则在阶梯形增广矩阵中必出现一行. 系数部分全为 0, 但最后一列非零. 它对应矛盾方程

$$0=c\qquad(c\neq 0),$$

因而原方程组无解. 反之, 若出现这样的矛盾行, 最后一列增加了一个主元, 必有 $r(A)<r(\bar{A})$.

若 $r(A)=r(\bar{A})=r$, 则没有矛盾行, 方程组有解. 在阶梯形中, r 个主元对应 r 个基本未知量, 剩余 $n-r$ 个未知量为自由未知量. 当 $r=n$ 时没有自由未知量, 解唯一; 当 $r<n$ 时至少有一个自由未知量, 在实数域上它可取无穷多个值, 故有无穷多解. □

这个定理是线性代数的基础. 它表明. 求解方程组就是比较系数矩阵携带的信息量与包含常数项后所需的总信息量. 当秩小于未知数个数时, 多出的维度转化为了解空间的**自由度**, 解集构成了一个仿射子空间.

注 3.5
尽管克拉默法则给出了解的解析结构, 但在数值计算中, 对于高阶方程组, 例如 $n>3$, 计算 $n+1$ 个行列式的计算量远大于高斯消元法. 因此, 它主要用于理论推导及低阶矩阵的手算.

矩阵运算、行列式、线性变换、逆矩阵与克拉默法则, 以及秩与高斯消元构成了本章的内容. 几何向量语言见 第三卷第 11 章与 第2章.

知乎@余命数

第 4 章

连分数



基础语言

「人追求完美，却往往只能得到近似。」

——柯西

第四章 连分数

知乎@余命数

圆周率 π 的近似分数 $\dfrac{22}{7}$ 只用两个小整数, 误差却只有约 0.0013. 这样准的分数来自一个古老的算法.

辗转相除法求最大公因数时, 每一步都产生一个商; 把这些商按顺序排好, 就得到一个层层嵌套的分数, 即**连分数**. 它给每个实数配上一串最佳近似分数, $\dfrac{22}{7}$ 与 $\dfrac{355}{113}$ 之所以出色, 正因为它们是 π 的连分数渐近分数.

连分数把有理数与无理数放在同一框架下, 有理数对应有限连分数, 无理数对应无限连分数. 其中系数全部为 1 的一个就是黄金比, 它收敛最慢, 也最难逼近.

4.1 辗转相除法与连分数

第一卷第 1.6 节用辗转相除法求最大公因数, 即对 $a > b > 0$, 反复做带余除法 $a = bq + r$, 把 $\gcd(a, b)$ 化为 $\gcd(b, r)$, 直到余数为零. 每一步的商 q 构成一个序列, 这个序列正是连分数的全部信息.

4.1.1 从辗转相除到嵌套分数

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

以 $\dfrac{62}{23}$ 为例. 辗转相除给出

$$
\begin{aligned}
62 &= 2 \times 23 + 16, \\
23 &= 1 \times 16 + 7, \\
16 &= 2 \times 7 + 2, \\
7 &= 3 \times 2 + 1, \\
2 &= 2 \times 1.
\end{aligned}
$$

知乎@余命数 知乎@余命数

商依次为 $2, 1, 2, 3, 2$. 把每一步的余数回代, 就能把 $\dfrac{62}{23}$ 写成层层嵌套的形式. 由第一行

$$
\frac{62}{23} = 2 + \frac{16}{23}.
$$

知乎@余命数 知乎@余命数

把 $\dfrac{16}{23}$ 翻转：由第二行 $23=1\times16+7$ 得 $\dfrac{23}{16}=1+\dfrac{7}{16}$，故

$$\frac{16}{23}=\frac{1}{1+\dfrac{7}{16}},\qquad \frac{62}{23}=2+\frac{1}{1+\dfrac{7}{16}}.$$

继续由第三行 $16=2\times7+2$ 得 $\dfrac{16}{7}=2+\dfrac{2}{7}$，代入

$$\frac{62}{23}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dfrac{2}{7}}}.$$

由第四行 $7=3\times2+1$ 得 $\dfrac{7}{2}=3+\dfrac{1}{2}$，代入

$$\frac{62}{23}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\dfrac{1}{2}}}}.$$

最后一步 $2=2\times1$ 恰好除尽，嵌套到此终止. 这就是 $\dfrac{62}{23}$ 的**连分数**展开.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

4.1.2 连分数的定义

定义 4.1 (简单连分数) 设 a_0 为整数, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为正整数. 称

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{4-1}$$

为**简单连分数**, 简称**连分数**, 记作

$$[a_0;\, a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_n].$$

a_0 称为**整数部分**, $a_1, \dots, a_n$ 称为**部分商**. 当 n 有限时称为**有限连分数**; 当序列无限延伸时称为**无限连分数**, 记 $[a_0;\, a_1,\, a_2,\, \dots]$.

"简单"二字指所有分子都是 1 且部分商为正整数. 若允许分子取其他值或部分商取实数, 则得到**广义连分数**, 本书只讨论简单连分数.

按此记号, $\dfrac{62}{23} = [2;\, 1,\, 2,\, 3,\, 2]$.

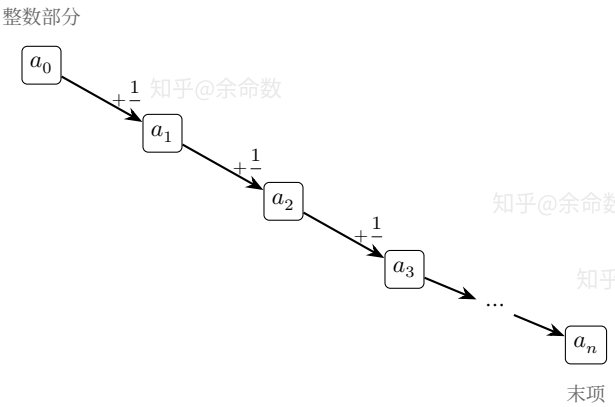


图 4.1 连分数 $[a_0;\, a_1, a_2, \dots, a_n]$ 的嵌套结构: 每一层都是整数加一的倒数.

例题 4.1 展开 $\dfrac{43}{30}$ 为连分数.

解 辗转相除:

$$43 = 1 \times 30 + 13, \quad 30 = 2 \times 13 + 4, \quad 13 = 3 \times 4 + 1, \quad 4 = 4 \times 1.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

商为 $1,2,3,4$, 故 $\dfrac{43}{30}=[1;\,2,\,3,\,4]$.

注 4.1
辗转相除法的每一步都把大数除以小数化为小数除以余数, 连分数的每一层都把整数加分数化为整数加一的倒数. 二者步骤一一对应, 第 k 个商 q_k 就是连分数的第 k 个部分商 a_k.

4.2 有限连分数与有理数

4.2.1 有理数与有限连分数的对应

第4.1节 的例子暗示了一个一般事实, 即每个有理数都能展开成有限连分数. 反过来, 任何有限连分数显然都等于一个有理数.

定理 4.1 (有理数的连分数表示) 每个有理数都有有限简单连分数表示. 约定末项 $a_n>1(n\geq 1)$ 时, 该表示唯一.

知乎@余命数

证明 存在性. 设 $x=p/q$、$q>0$、$\gcd(p,q)=1$. 对 p,q 做辗转相除法

$$p=a_0q+r_1,\quad q=a_1r_1+r_2,\quad r_1=a_2r_2+r_3,\quad \dots,\quad r_{n-2}=a_{n-1}r_{n-1}+r_n,$$

其中 $r_n=\gcd(p,q)=1$, $r_{n+1}=0$. 逐层回代即得 $x=[a_0;\,a_1,\,\dots,\,a_n]$.

唯一性. 末项为 1 时, $[a_0;\,\dots,\,a_{n-1},\,1]=[a_0;\,\dots,\,a_{n-1}+1]$, 故同一有理数有两种写法. 约定 $a_n>1$ 后, 表示唯一. □

例题 4.2 展开 $\dfrac{355}{113}$ 为连分数.

解 辗转相除:

$$355=3\times 113+16,$$

$$113=7\times 16+1,$$

$$16=16\times 1.$$

商为 $3,7,16$, 故

$$\frac{355}{113}=[3;\,7,\,16].$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 4.2
$\frac{355}{113}$ 是中国古代数学家祖冲之给出的圆周率**密率**, 误差小于 10^{-6}. 它的连分数 $[3;\,7,\,16]$ 只有三项, 却达到了惊人的精度, 原因见 第4.4节.

4.2.2 渐近分数

截取连分数的前若干项, 得到的分数称为**渐近分数**.

定义 4.2 (渐近分数) 设 $\alpha = [a_0;\,a_1,\,a_2,\,\ldots]$ (有限或无限). 第 k 个**渐近分数**定义为

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0;\,a_1,\,\ldots,\,a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}. \tag{4-2}$$

知乎@余命数

渐近分数可用递推公式高效计算, 无需逐层展开嵌套.

性质 (渐近分数递推) 设 $p_{-2}=0,\ p_{-1}=1,\ q_{-2}=1,\ q_{-1}=0$. 对 $k \ge 0$,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \tag{4-3}$$

证明 对 k 归纳.$k=0$: $p_0 = a_0\cdot 1 + 0 = a_0$, $q_0 = a_0\cdot 0 + 1 = 1$, 即 $p_0/q_0 = a_0$, 成立.$k=1$: $p_1 = a_1a_0 + 1$, $q_1 = a_1$, 即 $p_1/q_1 = a_0 + 1/a_1$, 成立.

设 $k \le m$ 成立.$[a_0;\,\ldots,\,a_m,\,a_{m+1}]$ 等于把 $[a_0;\,\ldots,\,a_{m-1}]$ 中的 a_m 替换为 $a_m + 1/a_{m+1}$. 由归纳假设, 分子分母都是 a_m 的线性函数, 替换后

$$p_{m+1} = \Big(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\Big)p_{m-1} + p_{m-2} = \frac{(a_m a_{m+1}+1)p_{m-1} + a_{m+1}p_{m-2}}{a_{m+1}}.$$

分子应等于 $a_{m+1}p_m + p_{m-1}$, 验证: $a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1} = (a_m a_{m+1} + 1)p_{m-1} + a_{m+1}p_{m-2}$, 吻合. 分母同理. □

例题 4.3 计算 $\frac{62}{23} = [2;\,1,\,2,\,3,\,2]$ 的全部渐近分数.

解 按 式 (4-3) 递推, 列表如下.

k	a_k	p_k	q_k	p_k/q_k
-2		0	1	
-1		1	0	
0	2	2	1	2
1	1	3	1	3
2	2	8	3	$8/3$
3	3	27	10	$27/10$
4	2	62	23	$62/23$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

渐近分数依次为 $2,\ 3,\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{27}{10},\ \dfrac{62}{23}$, 末项即原数.

4.2.3 渐近分数的交替逼近

定理 4.2 (交替逼近) 设 $\alpha=[a_0;\,a_1,\,\ldots]$ 的渐近分数为 p_k/q_k. 则

1. 渐近分数从两侧交替逼近 α: 偶数阶 $p_0/q_0,\,p_2/q_2,\,p_4/q_4,\,\ldots$ 单调递增, 奇数阶 $p_1/q_1,\,p_3/q_3,\,\ldots$ 单调递减, 且
$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\frac{p_4}{q_4}<\cdots<\alpha<\cdots<\frac{p_5}{q_5}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_1}{q_1}.$$
2. 每个渐近分数比前一个更接近 α:
$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|.$$

相邻渐近分数之差有一个简洁公式, 它是上述定理的基石.

引理 4.1 $p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1}$, 故 $\dfrac{p_k}{q_k}-\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{q_kq_{k-1}}$.

证明 对 k 归纳.$k=0$: $p_0q_{-1}-p_{-1}q_0=a_0\cdot0-1\cdot1=-1=(-1)^{-1}$, 成立. 设 k 成立, 由 式 (4-3)

$$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})=p_{k-1}q_k-p_kq_{k-1}=-(-1)^{k-1}=(-1)^k.$$

□

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 (证明 定理 4.2) 由 引理 4.1, 相邻渐近分数之差 $p_k/q_k - p_{k-1}/q_{k-1} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$, 符号交替, 绝对值随 q_k 递增而递减.k 为奇时差为正 ($p_k/q_k > p_{k-1}/q_{k-1}$), k 为偶时差为负 ($p_k/q_k < p_{k-1}/q_{k-1}$), 跳跃幅度越来越小, 故偶数阶递增、奇数阶递减, 二者从两侧夹逼 α, 误差单调递减. □

引理 4.1 还给出一个有用的推论: $\gcd(p_k, q_k) = 1$, 即渐近分数总是既约分数.

4.3 无限连分数与无理数

有理数的连分数是有限的. 对无理数, 辗转相除法永不终止 (余数永不为零), 连分数无限延伸.

知乎@余命数

知乎@余命数

定理 4.3 (无理数的连分数表示) 每个无理数有唯一的无限简单连分数表示; 反之, 每个无限简单连分数收敛于一个无理数.

证明思路与有理数情形平行, 对无理数 α, 取 $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, 令 $\alpha_1 = 1/(\alpha - a_0) > 1$, 再取 $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$, 如此反复. 因 α 无理, 每一步的 α_k 都无理, 过程永不终止, 得到无限序列 $[a_0;\, a_1,\, a_2,\, \ldots]$. 唯一性由每步取整的唯一性保证.

4.3.1 $\sqrt{2}$ 的连分数

定理 4.4 $\sqrt{2} = [1;\, \overline{2}]$, 即

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

证明 设 $x = \sqrt{2} - 1 > 0$, 则 $\sqrt{2} = 1 + x$. 由 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ 得

知乎@余命数

$$x = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2+x}.$$

故 x 是 $2 + x$ 的倒数, 反复代入:

$$x = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2+x}} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2+x}}} = \cdots$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

每展开一次, x 的位置就被 $\dfrac{1}{2+x}$ 替换, 产生一个新的系数 2. 系数为 2 的来历是 $\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}+1$, 其整数部分 $\lfloor\sqrt{2}+1\rfloor=2$. 由 $\sqrt{2}=1+x$ 展开即得 $\sqrt{2}=[1;\,2,\,2,\,2,\,\ldots]$.

换用 $\alpha=\sqrt{2}$ 本身. $a_0=\lfloor\sqrt{2}\rfloor=1$, $\alpha-a_0=\sqrt{2}-1$, 取倒数 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, 故 $a_1=\lfloor\sqrt{2}+1\rfloor=2$, 余下 $\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$, 取倒数又回到 $\sqrt{2}+1$. 过程循环, $a_1=a_2=\cdots=2$. □

知乎@余命数

注 4.3

$\sqrt{2}$ 的无理性已在 第四卷第 16.1 节中用反证法证明. 连分数给出了另一个视角: $\sqrt{2}$ 的连分数 $[1;\,\overline{2}]$ 是无限的, 故 $\sqrt{2}$ 无理. 有限连分数必为有理数, 无限连分数必为无理数, 二者泾渭分明.

知乎@余命数

4.3.2 $\sqrt{3}$ 的连分数

例题 4.4　求 $\sqrt{3}$ 的连分数.

解　$a_0=\lfloor\sqrt{3}\rfloor=1$, $\sqrt{3}-1$ 取倒数得 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\approx 1.366$, 故 $a_1=1$. 余下 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, 取倒数得 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1\approx 2.732$, 故 $a_2=2$. 余下 $\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1$, 回到起点. 故

$$\sqrt{3}=[1;\,\overline{1,\,2}].$$

知乎@余命数

4.3.3 周期连分数与二次无理数

$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的连分数都是**周期**的, 从某一项起, 部分商序列不断重复. 上划线标记一个循环节, 如 $[1;\,\overline{2}]$ 表示 $[1;\,2,\,2,\,2,\,\ldots]$.

定义 4.3 (周期连分数) 若存在 $m\geq 0$ 与 $T\geq 1$ 使 $a_{k+T}=a_k$ 对所有 $k>m$ 成立, 则称 $[a_0;\,a_1,\,\ldots]$ 为**周期连分数**, 记作 $[a_0;\,\ldots,\,a_m,\,\overline{a_{m+1},\,\cdots,\,a_{m+T}}]$. 从 a_0 起就周期的称为**纯周期连分数**.

定理 4.5 (拉格朗日定理) 实数 α 的连分数是周期的, 当且仅当 α 是二次无理数, 即 α 是整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的无理根.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 4.4
拉格朗日定理把连分数的周期性与二次方程的无理根这两个看似无关的性质等同起来：$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ 都是二次无理数，连分数都周期；π 和 e 不是任何整系数多项式的根（超越数），连分数不周期.

知乎@余命数

例题 4.5 几个常见二次无理数的连分数：

$$\sqrt{2}=[1;\overline{2}],\quad \sqrt{3}=[1;\overline{1,2}],\quad \sqrt{5}=[2;\overline{4}],\quad \sqrt{7}=[2;\overline{1,1,1,4}].$$

知乎@余命数

✎ **练习 4.1** 用本节的方法求 $\sqrt{6}$ 的连分数，并验证它是周期的.

4.4 最佳有理逼近

4.4.1 渐近分数的最优性

余命数

第4.2节 的渐近分数不仅是越来越好的近似，而且在分母不超过某值的所有分数中是最优的.

定理 4.6 (最佳逼近) 设 p_k/q_k 是 α 的第 k 个渐近分数. 若 $0<q'\le q_k$ 且 $p'/q'\neq p_k/q_k$，则

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\left|\alpha-\frac{p'}{q'}\right|.$$

即 p_k/q_k 是分母不超过 q_k 的分数中，最接近 α 的那一个.

证明 (证明大意) 关键不等式：对任意 $k\ge 0$，

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1}+q_k)}<\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}. \tag{4-4}$$

左端说明误差不会太小，右端给出上界. 设 p'/q' 满足 $0<q'\le q_k$ 且 $|p'/q'-p_k/q_k|<|\alpha-p_k/q_k|$. 由 引理 4.1，$|p_k/q_k-p_{k-1}/q_{k-1}|=1/(q_kq_{k-1})$. 可以证明 p'/q' 必落在 p_k/q_k 与 p_{k-1}/q_{k-1} 之间，但该区间内分母不超过 q_k 的既约分数只有 p_k/q_k 本身，矛盾. □

注 4.5
定理 4.6 的精确含义是，渐近分数即**最佳有理逼近**. 给定分母上界 q_k，找不到比 p_k/q_k 更接近 α 的分数.

知乎@余命数

4.4.2 圆周率的渐近分数

例题 4.6　圆周率 π 的连分数前几项为

$$\pi = [3;\, 7,\, 15,\, 1,\, 292,\, \ldots].$$

计算前四个渐近分数.

解　按式 (4-3) 递推:

k	a_k	p_k	q_k	p_k/q_k
0	3	3	1	3
1	7	22	7	$22/7$
2	15	333	106	$333/106$
3	1	355	113	$355/113$

故 π 的前四个渐近分数为

$$3,\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113}.$$

表 4.1　π 的渐近分数及其误差.

渐近分数	小数值	误差	有效位数
3	3.0	0.14	0
$22/7$	$3.1428\ldots$	1.3×10^{-3}	2
$333/106$	$3.14150\ldots$	8.3×10^{-5}	4
$355/113$	$3.1415929\ldots$	2.7×10^{-7}	6

表 4.1 回答了章首的问题.$\dfrac{22}{7}$ 之所以准, 因为它是 π 的第一个非平凡渐近分数;$\dfrac{355}{113}$ 之所以更准,因为它是第三个. 二者都是**最佳逼近**, 在分母不超过 7(113) 的所有分数中, 没有比 $\dfrac{22}{7}(\dfrac{355}{113})$ 更接近 π 的.

注 4.6
π 的第四个部分商 $a_4 = 292$ 异常大. 由式 (4-4), $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$, 大的 a_{k+1} 使 q_{k+1} 暴增, 误差上界 $1/(q_kq_{k+1})$ 骤降. 这解释了 $\dfrac{355}{113}$ 为何精度惊人, 它后面紧跟一个 292, 把下一个渐近分数的分母推到 33102, 误差骤降两个数量级.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.4.3 与牛顿迭代法的对照

第二卷第 7.11 节介绍的牛顿迭代法用切线逼近曲线的根, 每步迭代使有效位数大致翻倍, 收敛极快. 连分数渐近分数则用整数之比逼近实数, 每步增加一个部分商, 分母按递推增长.

两种方法服务于不同目的. 牛顿迭代给出**实数**近似值, 即小数, 精度随迭代指数增长, 但结果不是精确的分数. 连分数渐近分数给出**有理数**近似值, 即分数, 精度由部分商决定, 结果是简洁的 p/q. 当需要用最简单的分数表示某个实数时, 连分数无可替代; 当需要高精度小数时, 牛顿迭代更高效.

例题 4.7 用连分数解释: 为何 $\dfrac{355}{113}$ 比 $\dfrac{22}{7}$ 好得多, 却只多用了两个整数?

解 $\dfrac{22}{7}=[3;\,7]$ 是 π 的第一个渐近分数, $\dfrac{355}{113}=[3;\,7,\,15,\,1]$ 是第三个. 从 $[3;\,7]$ 到 $[3;\,7,\,15,\,1]$, 分母从 7 增长到 113, 误差从 10^{-3} 降到 10^{-7}. 增长来自部分商 15 和 1: $q_2=15\times7+1=106$, $q_3=1\times106+7=113$. 仅两个额外整数, 分母扩大 16 倍, 误差缩小近 5000 倍.

4.5 黄金比

4.5.1 黄金比的连分数

第二卷第 7.7 节在求斐波那契数列的通项时, 遇到了特征方程 $x^2-x-1=0$, 其正根

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$$

称为**黄金比**. 这个数在连分数理论中地位特殊, 它的连分数是所有无限连分数中最简单的.

定理 4.7 $\varphi=[1;\,\overline{1}]$, 即

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}.$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

证明 由 $\varphi^2=\varphi+1$(特征方程),两边除以 φ 得

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}.$$

右端的 φ 再次用 $1+1/\varphi$ 替换:

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}=\cdots$$

每替换一次,产生一个新的系数 1,过程永不终止. 故 $\varphi=[1;\,1,\,1,\,1,\,\ldots]=[1;\,\overline{1}]$. □

4.5.2 斐波那契比与渐近分数

φ 的渐近分数有一个优美的性质,它们恰是斐波那契数列的相邻项之比.

定理 4.8 设 F_n 为斐波那契数列 ($F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$). 则 $\varphi=[1;\,\overline{1}]$ 的第 k 个渐近分数为

$$\frac{p_k}{q_k}=\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}}\quad(k\geq 0).$$

证明 φ 的所有部分商 $a_k=1$. 由 式 (4-3), $p_k=p_{k-1}+p_{k-2}$, $q_k=q_{k-1}+q_{k-2}$, 二者都满足斐波那契递推. 初值 $p_0=1=F_2$, $q_0=1=F_1$; $p_1=2=F_3$, $q_1=1=F_2$. 由归纳法 $p_k=F_{k+2}$, $q_k=F_{k+1}$. □

例题 4.8 列出 φ 的前几个渐近分数.

解

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{1}{1},\quad \frac{p_1}{q_1}=\frac{2}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{3}{2},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{5}{3},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{8}{5},\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{13}{8},\quad \ldots$$

分子分母都是斐波那契数: $\frac{F_2}{F_1},\,\frac{F_3}{F_2},\,\frac{F_4}{F_3},\,\frac{F_5}{F_4},\,\frac{F_6}{F_5},\,\frac{F_7}{F_6},\,\ldots$

第二卷第 7.7 节用比内公式证明了 $\lim_{n\to\infty}F_{n+1}/F_n=\varphi$. 连分数给出了同一结论的另一条路径: φ 的渐近分数恰为 F_{n+1}/F_n, 而渐近分数必收敛于连分数本身,故 $F_{n+1}/F_n\to\varphi$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

4.5.3 最无理的数

定理 4.9 (最慢收敛) 在所有无理数中, φ 的连分数渐近分数收敛最慢.

收敛速度由 式 (4-4) 控制, 误差 $|\alpha - p_k/q_k| < \dfrac{1}{q_k q_{k+1}}$, 而 $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$. 部分商 a_{k+1} 越大, q_{k+1} 越大, 误差越小, 收敛越快.

φ 的所有部分商都是 1, 这是正整数中最小的可能值. 这使 $q_{k+1} = q_k + q_{k-1}$ 增长最慢 (恰为斐波那契增长), 误差上界最大. 任何其他无理数至少有一个部分商大于 1, 在该处收敛加速.

知乎@余命数

注 4.7

φ 被称为"最无理的数", 正因为它的连分数最难逼近. 用分数逼近 φ 的效率最低, 要达到 n 位精度, 所需分母比逼近其他任何无理数都大. 这一性质使 φ 在自然界中频繁出现, 例如向日葵种子的螺旋排列、松果鳞片的布局都遵循黄金角 ($2\pi/\varphi^2$ 弧度), 正因为黄金比最难有理逼近, 螺旋之间不会周期性重合, 排列最均匀.

知乎@余命数

4.5.4 Conway 的士兵问题 *(选读)

知乎@余命数

黄金比与斐波那契数常在意想不到的地方出现. 下面这个问题由 Conway 提出, 解决它要用一列以 $\dfrac{1}{\varphi}$ 为公比的几何级数.

例题 4.9 (士兵问题) 在坐标系里, 满足 $y \le 0$ 的每个整点上都放一枚棋子. 允许的操作是水平或竖直的跳跃, 一枚棋子越过紧邻的另一枚棋子, 落到它后面紧接着的空格上, 被越过的棋子随即拿掉. 只做有限多次操作, 能否让一枚棋子到达点 $C(0,5)$?

解 把棋子换成一份可以求和的账. 记

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi},$$

它满足

$$z^2 + z = 1.$$

对平面上任一整点 P, 记 $d(P) = |x_P| + |y_P - 5|$, 即 P 到 C 的曼哈顿距离, 并给 P 处的棋子记上权 $z^{d(P)}$. 某个局面下所有棋子权的和称为这个局面的 **Conway 和**.

先算初始局面的和. $y = 0$ 这一行到 C 的距离依次为 $|x| + 5$, 该行贡献

知乎@余命数

$$z^5 + 2\left(z^6 + z^7 + \cdots\right) = z^5 + \frac{2z^6}{1-z} = z^5 + 2z^4,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

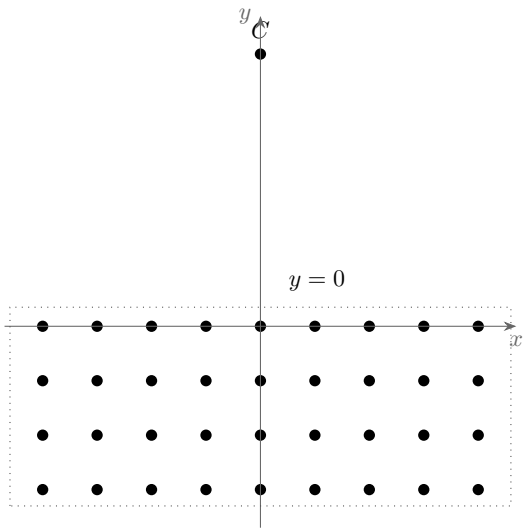


图 4.2　初始局面为下半平面的整点满格, 目标是让棋子到达 $C(0,5)$. 每枚棋子的权是 z^d, 其中 $z=1/\varphi$, d 为它到 C 的曼哈顿距离.

其中用到了 第四卷第 16.4 节的无穷几何级数求和公式. 再由 $z^2+z=1$ 化简,

$$z^5+2z^4=z^3\left(z^2+z\right)+z^4=z^3+z^4=z^2\left(z+z^2\right)=z^2.$$

同理, $y=-k$ 这一行贡献 z^{k+2}. 全盘的初始和为

$$z^2+z^3+z^4+\cdots=\frac{z^2}{1-z}=\frac{z^2}{z^2}=1,$$

最后一步又用了 $1-z=z^2$.

再看每次跳跃如何改变这份和. 设被越过的棋子到 C 的距离为 d.

- 朝着 C 跳时, 跳跃者从距离 $d+1$ 移到 $d-1$, 变化量为

$$z^{d-1}-z^d-z^{d+1}=z^{d-1}\left(1-z-z^2\right)=0;$$

- 背着 C 跳时, 变化量为

$$z^{d+2}-z^d-z^{d+1}=z^d\left(z^2-1-z\right)=-2z^{d+1}<0;$$

- 跳跃者到 C 的距离不变时, 它的权不变, 被越过的棋子连同它的权一并消失, 变化量为负.

三种情形合起来说明, 每一次跳跃都不会让 Conway 和变大, 它自初始值 1 起单调不增.

假设有一枚棋子到达了 C. 该点到 C 的距离为 0, 权为 $z^0=1$, 这一个 1 已经用尽全部可用的份额. 又因为只做了有限多次操作, 盘上仍有无限多枚棋子, 它们的权都是正数, 于是局面的 Conway 和严格大于 1, 与它始终不超过 1 矛盾.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故有限次跳跃无法把棋子送到 $C(0,5)$, 同样的论证对任何 $C(0,n)$ 都成立. 这份账本以黄金比的倒数为公比, 它满足 $z^2+z=1$, 朝着目标的三项 z^{d-1}, z^d, z^{d+1} 才会恰好抵消.

练习 4.2 验证 φ 的前五个渐近分数满足 定理 4.2 的交替逼近, 即偶数阶递增, 奇数阶递减, 二者从两侧夹逼 φ.

4.6 逼近的阶

4.6.1 误差该与什么比较

比较两个近似分数的好坏, 只看误差本身有失公允, $\dfrac{355}{113}$ 的误差是 $\dfrac{3}{1}$ 的几十万分之一, 但它的分母也大了一百多倍. 公允的尺度是**误差乘以分母的平方**

$$q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

分母每扩大一格, 误差按比例缩减一格, 才算真正的改善. 式 (4-4) 的右端给出, 渐近分数恒满足

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k^2},\qquad \text{即}\qquad q_k^2\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<1.$$

这个界还能不能收紧, 收紧的下限在哪里, 接着我们就来回答这两个问题, 最后用渐近分数设计历法里的闰年规则.

4.6.2 相邻渐近分数, 二者必有其一

定理 4.10 (两取一定理) 设 α 无理, p_k/q_k 与 p_{k-1}/q_{k-1} 是相邻两个渐近分数. 则至少有一个满足

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}.$$

证明 α 夹在相邻渐近分数之间 (定理 4.2), 故两个误差之和恰等于两渐近分数之差:

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|+\left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\frac{1}{q_kq_{k-1}}.$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

由 $2ab \le a^2+b^2$（第一卷第 5.3 节的均值不等式）且 $q_k \neq q_{k-1}$，

$$\frac{1}{q_k q_{k-1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

两个误差之和小于两个阈值之和，二者之中至少有一个小于各自的阈值. □

反过来，误差足够小的分数必然是渐近分数.

定理 4.11 (Legendre 判据) 设既约分数 $\frac{a}{b}$ 满足 $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$. 则 $\frac{a}{b}$ 是 α 的某个渐近分数.

证明 只需证 $\frac{a}{b}$ 是最佳逼近，再由 定理 4.6 的结构即得结论. 设既约分数 $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ 比 $\frac{a}{b}$ 更接近 α 且 $0 < d \le b$. 一方面，两个不同分数之差的绝对值至少为 $\frac{1}{bd}$（分子 $|ad-bc|$ 是非零整数）；另一方面，

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \le \left|\frac{c}{d} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}.$$

两式联立得 $\frac{1}{bd} < \frac{1}{b^2}$，即 $d > b$，与 $d \le b$ 矛盾. 故分母不超过 b 的分数中 $\frac{a}{b}$ 最接近 α，它是渐近分数. □

4.6.3 Hurwitz 定理与 $\sqrt{5}$ 的临界性

定理 4.12 (Hurwitz, 1891) 对任意无理数 α，相邻三个渐近分数 p_k/q_k、p_{k-1}/q_{k-1}、p_{k-2}/q_{k-2} 中至少有一个满足

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}.$$

特别地，每个无理数都有无穷多个分数 $\frac{p}{q}$ 满足此式.

证明的骨架与 定理 4.10 同类，把三个误差通过完全商联系起来，若三者都不达标，可推出某个部分商 $a_k < 1$，与其为正整数矛盾. 界中的常数 $\sqrt{5}$ 来自何处，下面的取等例子给出答案.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 4.13 (黄金比取等) 设 $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;\,\overline{1}]$, 其渐近分数为 $\dfrac{F_{k+1}}{F_k}$. 则

$$\lim_{k\to\infty} F_k^2 \left|\varphi - \frac{F_{k+1}}{F_k}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

证明 φ 的每个完全商都是 φ 自身, 把 φ 按 $[1;\,1,\,1,\,\ldots]$ 展开到任意层, 剩下的尾段仍是同一个无限连分数. 于是

$$\varphi = \frac{p_k\varphi + p_{k-1}}{q_k\varphi + q_{k-1}}, \qquad \left|\varphi - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k\varphi + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2\left(\varphi + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.$$

由 定理 4.8, $q_k = F_k$; 由 第4.5节, $\dfrac{q_{k-1}}{q_k} = \dfrac{F_{k-1}}{F_k} \to \dfrac{1}{\varphi}$. 因此

$$F_k^2\left|\varphi - \frac{F_{k+1}}{F_k}\right| \longrightarrow \frac{1}{\varphi + \dfrac{1}{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

最后一步用了 $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$. □

定理 4.13 给出 Hurwitz 定理中常数 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 的临界性, 即把右端收紧为 $\dfrac{c}{q^2}$($c < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$), 则当 k 充分大后 $\varphi + \dfrac{q_{k-1}}{q_k} < \dfrac{1}{c}$, 渐近分数的误差全部越界; 再由 定理 4.11 ($c < \dfrac{1}{2}$ 时满足不等式的分数必为渐近分数), 其他分数也帮不上忙. 于是对黄金比而言, 更强的界只剩有限多组解. 黄金比正是逼近意义下最难有理逼近的数, 第4.5节 的说法在这里成为定理.

4.6.4 闰年规则的连分数解释

回归年长约 365.2421897 天, 小数部分 0.2421897 决定闰年的频率. 它的连分数展开为

$$0.2421897 = [0;\,4,\,7,\,1,\,3,\,27,\,\ldots],$$

渐近分数依次为

$$\frac{1}{4},\quad \frac{7}{29},\quad \frac{8}{33},\quad \frac{31}{128},\quad \cdots$$

每个渐近分数给出一条闰年方案, 误差如下.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

表 4.2　闰年方案与误差.

方案	闰年频率	每年误差(天)	折合
儒略历:每 4 年 1 闰	$1/4 = 0.25$	$+0.0078103$	约 11 分钟
格里高利历:每 400 年 97 闰	$97/400 = 0.2425$	$+0.0003103$	约 27 秒
渐近分数 $31/128$:每 128 年 31 闰	$31/128 = 0.2421875$	-0.0000022	约 0.2 秒

格里高利历的 $\dfrac{97}{400}$ 位于渐近分数 $\dfrac{8}{33}$ 与 $\dfrac{31}{128}$ 之间, 误差比二者都大. 连分数直接给出的 $\dfrac{31}{128}$ 分母更小、误差缩小一百多倍, 每 128 年置 31 个闰年, 一万年才偏离约半天. 历法不必苛求到此精度, 但若问"分母不超过四百的分数里谁最接近真实的闰年频率", 答案由 定理 4.6 唯一给出, 就是渐近分数 $\dfrac{31}{128}$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

4.6.5 代数数逼近的下界与刘维尔数 *(选读)

Hurwitz 定理说, 任何无理数都能被分数以 $\dfrac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ 的精度逼近. 对代数数, 逼近精度**远好于** $\dfrac{1}{q^2}$ 是不可能的, 例如达到 $\dfrac{1}{q^3}$ 或 $\dfrac{1}{q^{10}}$; Liouville 在 1844 年证明了这一点.

定义 4.4 (代数数与超越数) 若实数 α 是某个整系数多项式方程

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

的根, 则称 α 为**代数数**; 满足的多项式次数的最小值称为 α 的**次数**. 非代数数的实数称为**超越数**.

有理数 $\dfrac{a}{b}$ 是一次代数数(方程 $bx - a = 0$ 的根); $\sqrt{2}$ 是二次代数数; 定理 4.5 里出现过的二次无理数都是二次代数数.

定理 4.14 (Liouville 逼近定理) 设 α 是 n 次 $(n \geq 2)$ 代数无理数. 则存在常数 $C > 0$, 使得对一切既约分数 $\dfrac{p}{q}$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

知乎@余命数

证明 取整系数多项式 $f(x)$, 使 α 是 f 的根, 且 α 不是任何更低次整系数多项式的根. 先说明 α 是 f 的单根. 若 $f(x)$ 含因子 $(x-\alpha)^2$, 求导后 $f'(x)$ 仍含因子 $x-\alpha$, α 便是次数更低的多项式 $f'(x)$ 的根, 与取法矛盾. 于是可写

$$f(x) = (x-\alpha)h(x),$$

其中 h 是 $n-1$ 次多项式且 $h(\alpha) = f'(\alpha) \neq 0$. 由连续性, 存在 $\delta > 0$ 与 $M > 0$, 使 $|h(x)| \leq M$ 在 $|\alpha - x| \leq \delta$ 内成立.

对任意的既约分数 p/q 分两种情形. 若 $|\alpha - p/q| > \delta$, 结论显然, 此时取 $C < \delta$ 即可. 若 $|\alpha - p/q| \leq \delta$, 由分解式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(p/q)|}{|h(p/q)|} \geq \frac{1}{M}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$$

另一方面, $q^n f(p/q) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n$ 是整数, 且不为零 (否则 p/q 是 f 的有理根, 与 α 无理且次数最低矛盾), 故 $|f(p/q)| \geq \dfrac{1}{q^n}$. 取 $C = \min\{\delta, \dfrac{1}{M}\}$ 即得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

□

二次无理数因此不可能有优于 $\dfrac{C}{q^2}$ 的无穷逼近序列, Hurwitz 的 $\dfrac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ 恰好贴着这条下界运行. 更高次的代数数下界更松, 但依然存在. 沿此思路, 一个能被**任意好**地逼近的数必然是超越数. 这样的数现在就能造出来.

定理 4.15 (刘维尔数) 级数

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.11000100000000000000001\ldots$$

是超越数.

证明 (证明梗概) 取前 n 项的和 $\dfrac{p_n}{q_n}(q_n = 10^{n!})$, 余项

$$0 < L - \frac{p_n}{q_n} < 2 \cdot \frac{1}{10^{(n+1)!}}.$$

对任意固定的正整数 N, 当 $n > N$ 时 $(n+1)! - N \cdot n! = n!(n+1-N) \geq n!$, 故

$$q_n^N \left(L - \frac{p_n}{q_n}\right) < 2 \cdot 10^{N \cdot n! - (n+1)!} \leq \frac{2}{10^{n!}} \to 0.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即对任何 N 与任何 $C>0$, 总有分数使 $\left|L-\frac{p}{q}\right|<\frac{C}{q^N}$. 若 L 是 N 次代数数, 与定理 4.14 矛盾; 故 L 是超越数. □

L 的小数展开在 $k!$ 位上放 1、其余位放 0, 间隙增长极快, 每一步截断都给出精度惊人的近似分数, 快到任何代数数都消受不起. 这是人类构造出的第一批超越数. 自然出现的常数随后跟上, Hermite 在 1873 年证明 e 是超越数, Lindemann 在 1882 年证明 π 是超越数, 后者一并宣判了化圆为方问题的死刑.

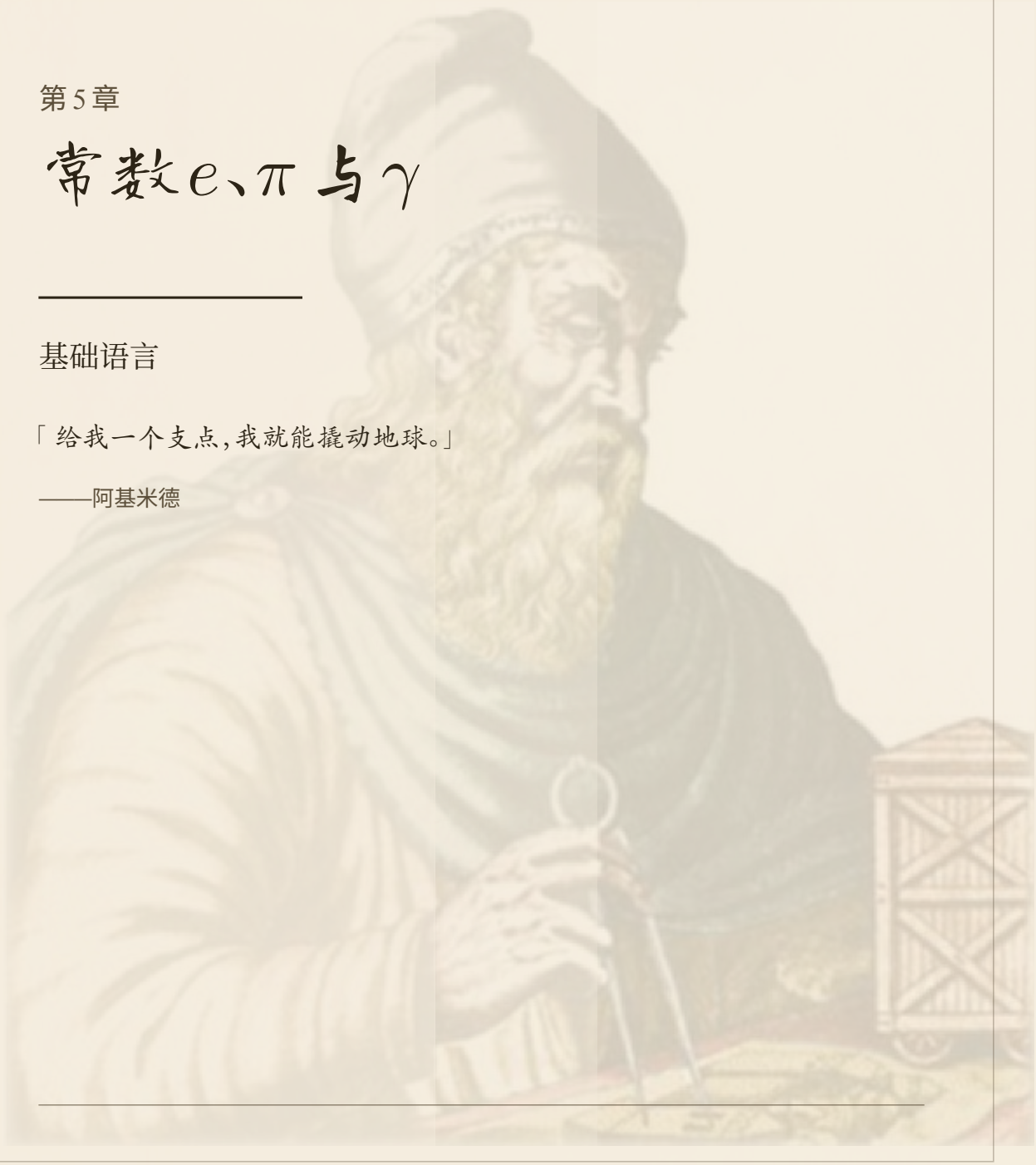
练习 4.3 利用定理 4.11 证明: 若 $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2b^2}$ 对无穷多组 (a,b) 成立, 则 α 是无理数.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 5 章

常数 e、π 与 γ



基础语言

「给我一个支点，我就能撬动地球。」

——阿基米德

第五章 常数 e、π 与 γ

数学里最重要的三个常数, 恰好来自三个不同的源头.

$e \approx 2.71828\ldots$ 是自然对数的底. 它的出场方式很朴素: 把年利率 100% 的利息按一年 n 次复利计算, 每次利率 $1/n$, 年末倍数是 $(1+1/n)^n$; 让 n 趋于无穷, 倍数趋于 e. 放射性衰变、种群增长、连续贴现, 凡是瞬时连续变化的模型, 底数都落在 e 上.

$\pi \approx 3.14159\ldots$ 来自几何, 即圆周与直径之比. 但它渗透到分析与数论的深处: 一个纯几何常数, 却出现在概率、级数与复变函数的公式里. 本章给出 Niven 的初等证明, 确认 π 是无理数.

$\gamma \approx 0.5772\ldots$ 是欧拉常数, 刻画调和级数 $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ 与 $\ln n$ 之间的差距. 调和级数发散, $\ln n$ 也发散, 二者之差却收敛到一个有限值. 这个值是否为无理数, 至今没有答案.

三个常数的共同点是: 它们都由极限或级数定义, 性质的研究离不开 第二卷 第 7 章的级数工具与 第四卷第 17 章的积分工具. 本章用这些工具给出 e 与 π 的无理性证明, 建立 γ 的基本性质, 并以巴塞尔问题 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 收尾, 这个结果把级数、函数与常数编织在一起.

知乎@余命数

5.1 自然常数 e

5.1.1 e 的定义

知乎@余命数

第四卷第 16.4 节已经给出指数函数的幂级数展开 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, 并指出 $e \approx 2.71828\ldots$. 接着我们就从极限定义出发, 把这个常数正式建立起来.

定义 5.1 (自然常数 e)

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

这个极限的存在性将在 第5.1.3小节 用二项式定理直接证明, 无需预先接受. 先考察它的直观来源.

复利模型. 设年利率为 100%. 若一年计息一次, 年末倍数为 $1 + 1 = 2$. 若半年计息一次, 每次利率 $1/2$, 年末倍数为 $(1 + 1/2)^2 = 2.25$. 若一年计息 n 次, 每次利率 $1/n$, 年末倍数为

知乎@余命数

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

计息越频繁, 年末倍数越大, 但增长有顶, 它趋于 e. 把离散的计息间隔压缩到连续, 就得到自然常数.

n	$(1+1/n)^n$	误差
1	2.00000	0.71828
10	2.59374	0.12454
100	2.70481	0.01347
1000	2.71692	0.00136
$\to\infty$	$\to e\approx 2.71828$	$\to 0$

表 5.1　复利倍数 $(1+1/n)^n$ 随 n 增大趋于 e.

5.1.2 复利史话

知乎@余命数

利息问题是最古老的数学应用之一. 现藏于卢浮宫的一块巴比伦泥板 (约公元前 1700 年)问过一个干脆的问题, 年利率 20%、按年复利, 本金何时翻倍?

知乎@余命数

例题 5.1 (巴比伦的翻倍问题) 按年复利, 年利率 20%, 本金翻倍需要多少年? 巴比伦人用线性插值得到 3.7870 年, 与真值差多少?

解 设需要 x 年, 则 $1.2^x=2$, 取对数 (第一卷第 3.9 节) 得

$$x=\frac{\ln 2}{\ln 1.2}=\frac{0.6931}{0.1823}\approx 3.8018.$$

巴比伦人没有对数, 他们注意到 $1.2^3=1.728$, $1.2^4=2.0736$, 真值夹在 3 与 4 之间, 便按比例内插:

知乎@余命数

$$x\approx 3+\frac{2-1.728}{2.0736-1.728}=3+\frac{0.272}{0.3456}\approx 3.7870,$$

与真值 3.8018 只差 0.015 年, 约五天半. 泥板上以六十进制记为 $3;47,13,20$, 即 $3+\dfrac{47}{60}+\dfrac{13}{60^2}+\dfrac{20}{60^3}$.

真值约 3.8018 年, 线性插值 3.7870 年, 误差约 0.4%.

复利的“复”字在于利息也生利息, 计息越频繁, 同样的年利率滚出越多的钱, 但这条增长有顶. 以本金 100 元、年利率 5% 为例, 各档计息周期一年后的本利和如下.

从一年一次到一日一次, 收益只多出一毛三分. 把计息间隔压缩到零, 收益逼近一个确定的数.1683 年, 雅各布·伯努利在研究复利问题时证明了这一点.$(1+1/n)^n$ 随 n 增大而增大, 却始终被 3 压住. 增长与压制的平衡点就是 e.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

计息周期	一年末本利和(元)
一年一次	105.00
半年一次	105.06
一季一次	105.09
一月一次	105.12
一周一次	105.12
一日一次	105.13
连续复利	$100\,e^{0.05}=105.13$

表 5.2 同样 5% 的年利率, 计息越频繁收益越高, 但增量迅速枯竭, 上限是 $100e^{0.05}$ 元.

知乎@余命数

5.1.3 极限的存在性与级数表示

伯努利的论断可以补全成一条定理, 证明只需要二项式定理 (第二卷第 9.3 节) 和单调有界原理 (第四卷第 16.3 节). 记 $s_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 按二项式定理展开, 第 k 项可以整理成

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right), \tag{5-1}$$

其中 $k=0$ 与 $k=1$ 两项都是 1, 从 $k=2$ 起每个因子 $1-j/n$ 都落在 0 与 1 之间.

先看单调性. 固定 k, 当 n 变大时每个因子 $1-j/n$ 都不减, 第 k 项便随 n 增大而增大, 项数还从 $n+1$ 个变成 $n+2$ 个, 多出来的又是一个正项. 逐项比较 s_{n+1} 与 s_n 的展开式, 得 $s_{n+1}>s_n$, 数列严格递增.

再看上界. 每个因子不超过 1, 故第 k 项不超过 $\dfrac{1}{k!}$; 而 $k\geq 1$ 时 $k!=1\cdot 2\cdots k\geq 2^{k-1}$, 于是

$$s_n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<3.$$

递增而有上界的数列必有极限, e 的存在性就此落定, 顺带也得到了伯努利的判断, e 夹在 2 与 3 之间.

这番展开还白送一件礼物. 在式 (5-1) 中固定 $m\leq n$ 只看前 m 项, 令 $n\to\infty$, 每个因子 $1-j/n\to 1$, 第 k 项趋于 $\dfrac{1}{k!}$, 于是 $\lim s_n\geq\sum_{k=0}^{m}\dfrac{1}{k!}$; 再令 $m\to\infty$, 得 $\lim s_n\geq\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$(右端的和存在, 因为 $1/k!\leq 1/2^{k-1}$, 与几何级数同敛散). 反向的不等式刚刚已经算过, 就是 $s_n\leq\sum_{k=0}^{n}1/k!\leq\sum_{k=0}^{\infty}1/k!$. 两头夹住, 极限只能是级数的和.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.1 (e 的级数表示)

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

这个等式是 e^x 的泰勒展开 (第四卷第 16.4 节) 在 $x=1$ 的特例. 阶乘 $n!$ 增长极快, 通项 $1/n!$ 迅速趋于零, 级数收敛速度远超极限定义.

n	$1/n!$	部分和 S_n
0	1.000000	1.000000
1	1.000000	2.000000
2	0.500000	2.500000
3	0.166667	2.666667
4	0.041667	2.708333
5	0.008333	2.716667
6	0.001389	2.718056
7	0.000198	2.718254
8	0.000025	2.718279

表 5.3　e 的级数部分和, 仅取前 9 项即精确到五位小数.

5.1.4 e 的无理性

级数表示计算方便, 同时直接给出 e 是无理数的证明.

定理 5.2 (e 是无理数)　e 是无理数.

证明　反设 $e=p/q$, 其中 p,q 为正整数. 取整数 $n\geq q$. 由 定理 5.1,

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

两端乘以 $n!$:

$$n!\cdot e=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}}_{\text{整数}}+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}}_{\text{余项}}.$$

第一部分是整数, 因为当 $k\leq n$ 时 $n!/k!$ 是整数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

估计余项. 对 $k \geq n+1$,

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots k} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}.$$

因此

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{j}} = \frac{1}{n}.$$

最后一个等号用了几何级数求和 $\sum_{j=1}^{\infty} r^j = r/(1-r)$, 此处 $r = 1/(n+1)$. 当 $n \geq 1$ 时 $1/n \leq 1$, 故余项严格介于 0 与 1 之间.

另一方面, 若 $e = p/q$ 且 $n \geq q$, 则 $n! \cdot e = n! \cdot p/q$ 是整数(因 $q \mid n!$). 于是

$$\underbrace{n! \cdot e}_{\text{整数}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\text{整数}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}}_{\in(0,1)}.$$

整数等于整数加上一个严格介于 0 与 1 之间的数, 矛盾. 故 e 是无理数. □

证明的机制是, 级数 $\sum 1/k!$ 的前 n 项乘以 $n!$ 后是整数, 而余项乘以 $n!$ 后被几何级数控制在 $(0,1)$ 之内. 有理数假设 $e = p/q$ 迫使 $n! \cdot e$ 为整数, 与余项的严格小性冲突. 这种整数等于整数加严格小数的矛盾, 是无理性证明的经典模式.

注 5.1 (e 的超越性)
e 的无理性之上, 还有一个更强的结论. 第4.6节 的 Liouville 定理说, 代数数(整系数多项式的根)不可能被有理数逼近得太狠, 而 Hermite 在 1873 年证明 e 不属于代数数, 即 e 是超越数. 同一年代前后, Lindemann 用类似的方法证明 π 也是超越数, 一并宣判了化圆为方问题的死刑.

注 5.2 (e 的连分数)
Euler 在 1737 年算出

$$e = [2;\, 1,\, 2,\, 1,\, 1,\, 4,\, 1,\, 1,\, 6,\, 1,\, 1,\, 8,\, \ldots],$$

除去开头的 2, 部分商里每隔两个 1 站着一个递增的偶数 $2, 4, 6, 8, \ldots$, 规律之整齐, 在无理常数中独一份. 相应的渐近分数 (第4.1节) 依次是 $\frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \ldots$, 其中 $\frac{193}{71} \approx 2.71831$ 已准到小数点后四位.

✎ **练习 5.1** 证明 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{e}$. 借此说明 第二卷第 10.2 节错排问题的极限 $\frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e}$, 信封全装错的概率恰好是 e 的倒数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.2 π 的无理性

5.2.1 Niven 的证明

e 的无理性证明依赖级数, π 的无理性证明则依赖积分.1947 年, Ivan Niven 给出了一个只用多项式、积分与 sin 函数的初等证明, 全部工具都在本书范围内(第四卷第 17 章的分部积分, 第二卷第 6 章的三角函数).

定理 5.3 (π 是无理数) π 是无理数.

知乎@余命数

证明 反设 $\pi = a/b$, 其中 a, b 为正整数. 对任意正整数 n, 定义多项式

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

考虑积分

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx.$$

先看 I_n 的符号. 在区间 $(0,\pi)$ 上, $x>0$, $\sin x>0$. 又因 $\pi = a/b$, 故 $a-bx = b(\pi-x)>0$ 当 $0<x<\pi$. 因此 $f_n(x)>0$ 在 $(0,\pi)$ 上成立, 从而 $I_n>0$.

再看 I_n 的整数性. 对 $f_n(x)\sin x$ 反复使用分部积分 (第四卷第 17.4 节). 注意 $f_n(x)$ 是 $x^n(a-bx)^n/n!$, 展开后是关于 x 的 $2n$ 次多项式, 系数形如 $c_k x^k/n!$, 其中 c_k 是整数.

分部积分公式 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ 中, 取 $u = f_n(x)$, $dv = \sin x\,dx$, 则 $v = -\cos x$:

$$I_n = [-f_n(x)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi f_n'(x)\cos x\,dx.$$

边界项: $f_n(0) = 0$ (因 x^n 因子), $f_n(\pi) = \pi^n(a-b\pi)^n/n! = \pi^n\cdot 0^n/n! = 0$, 因 $a-b\pi = 0$. 故边界项为零, 得

$$I_n = \int_0^\pi f_n'(x)\cos x\,dx.$$

再分部, 取 $u = f_n'(x)$、$dv = \cos x\,dx$、$v = \sin x$:

$$I_n = [f_n'(x)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi f_n''(x)\sin x\,dx.$$

边界项: $\sin 0 = \sin\pi = 0$, 故边界项为零, 得

$$I_n = -\int_0^\pi f_n''(x)\sin x\,dx.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

每两次分部积分, sin 与 cos 互换, f_n 的导数升高两阶, 符号交替变化. 重复 n 轮共 $2n$ 次分部积分后, f_n 的 $2n$ 阶导数是常数, 因 f_n 是 $2n$ 次多项式, 更高阶导数为零. 最终

$$I_n = \pm \int_0^\pi f_n^{(2n)}(x) \cdot (\sin \text{ 或} \cos)\, dx + \text{边界项}.$$

每一步的边界项都形如 $f_n^{(k)}(0) \cdot (\sin \text{ 或} \cos)(0)$ 或 $f_n^{(k)}(\pi) \cdot (\sin \text{ 或} \cos)(\pi)$. 由于 $\sin 0 = \sin \pi = 0$、$\cos 0 = \pm 1$、$\cos \pi = \pm 1$, 边界项只涉及 $f_n^{(k)}(0)$ 与 $f_n^{(k)}(\pi)$.

现在计算这些导数值.$f_n(x) = x^n(a-bx)^n/n!$. 对 $k < n$, $f_n^{(k)}(0) = 0$(因 x^n 因子使 0 处低于 n 阶的导数为零). 对 $n \le k \le 2n$, $f_n^{(k)}(0)$ 是 $x^n(a-bx)^n$ 在 $x=0$ 处的 k 阶导数除以 $n!$, 展开后每一项系数都是整数, 除以 $n!$ 后仍为整数, 因 $k \ge n$ 时组合数 $\binom{k}{n}$ 等因子吸收了 $n!$. 同理, $f_n^{(k)}(\pi) = f_n^{(k)}(a/b)$, 代入 $a - bx = b(\pi - x)$, 由 $\pi = a/b$ 的结构, 这些值也是整数.

因此所有边界项都是整数, I_n 是整数. 结合 $I_n > 0$, I_n 是**正整数**.

最后估计 I_n 的大小, 导出矛盾. 在 $[0,\pi]$ 上, $x \le \pi$ 且 $a - bx = b(\pi - x) \le b\pi = a$, 故

$$0 \le f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \le \frac{(\pi \cdot a)^n}{n!} = \frac{(a\pi)^n}{n!}.$$

又 $\sin x \le 1$, 故

$$0 < I_n \le \pi \cdot \frac{(a\pi)^n}{n!}.$$

阶乘 $n!$ 的增长速度远超指数 $(a\pi)^n$(比值判别: $(a\pi)^{n+1}/(n+1)! \div (a\pi)^n/n! = a\pi/(n+1) \to 0$), 故 $(a\pi)^n/n! \to 0$, 从而 $I_n \to 0$.

但 I_n 是正整数, 正整数序列不可能趋于零. 矛盾. 故 π 是无理数. □

注 5.3 (证明的结构)

Niven 证明的精妙之处在于构造了一个恰到好处的多项式 $f_n(x) = x^n(a-bx)^n/n!$:

- x^n 与 $(a-bx)^n$ 保证 f_n 在 0 与 π 处有足够高的零点, 使分部积分的边界项可控;
- $1/n!$ 保证各阶导数在端点处取整数值;
- $2n$ 次多项式的结构使反复分部积分最终终止.

这条矛盾与 第5.1节 中 e 的无理性证明同属一个模式, 两者都造出一个既必须是整数、又被限制在 $(0,1)$ 内的量.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

5.3 欧拉常数 γ

5.3.1 γ 的定义

知乎@余命数

第四卷第 16.4 节证明了调和级数发散:

知乎@余命数

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty.$$

对数函数 $\ln n$ 也随 $n \to \infty$ 发散. 二者的发散速度接近, 差距 $H_n - \ln n$ 却趋于一个有限值.

知乎@余命数

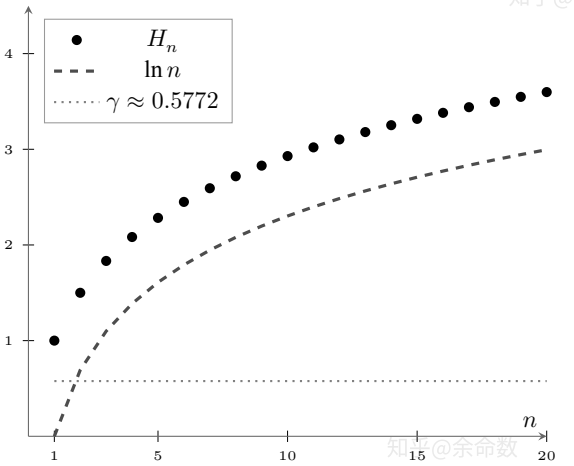


图 5.1 调和级数部分和 H_n 与 $\ln n$ 的差趋于欧拉常数 γ.

知乎@余命数

知乎@余命数

定理 5.4 (欧拉常数 γ 的存在性) 极限 $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)$ 存在且有限.

证明 记 $a_n = H_n - \ln n$. 用积分估计 $1/k$ 与 $\ln(k+1) - \ln k$ 的差. 对 $k \geq 1$,

$$\ln(k+1) - \ln k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

在 $[k, k+1]$ 上, $1/x$ 单调递减, 故 $1/(k+1) \leq 1/x \leq 1/k$, 从而

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

知乎@余命数

因此

$$0 \leq \frac{1}{k} - \big(\ln(k+1) - \ln k\big) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

对 k 从 1 到 $n-1$ 求和:

$$0 \le H_{n-1} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln k) \right] \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

知乎@余命数

右端是裂项级数, $\sum_{k=1}^{n-1} 1/[k(k+1)] = 1 - 1/n < 1$. 故 $H_{n-1} - \ln n$ 有界. 又每一项 $1/k - (\ln(k+1) - \ln k) \ge 0$, 故 $H_{n-1} - \ln n$ 单调递增有上界, 极限存在.

最后, $a_n = H_n - \ln n = (H_{n-1} - \ln n) + 1/n$, 而 $1/n \to 0$, 故 a_n 与 $H_{n-1} - \ln n$ 同极限. □

定义 5.2 (欧拉常数)

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) \approx 0.5772\ldots$$

γ 的存在性证明只用到积分比较与单调有界原理, 两者都在本书范围内.$1/k$ 是 $[k, k+1]$ 上 $1/x$ 的上矩形, $\ln(k+1) - \ln k$ 是精确积分, 二者之差正且可被 $1/[k(k+1)]$ 控制, 裂项求和后有界.

5.3.2 γ 的性质

定理 5.5 (γ 的积分表示)

$$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{-\ln(1-t)} \right) dt$$

这个积分表示的推导需要变量代换与极限交换, 属于 第四卷第 17 章积分技巧的延伸, 此处作为结论引用. 它把 γ 从离散的 $H_n - \ln n$ 转化为一个连续的积分, 在渐近分析中频繁出现.

定理 5.6 (γ 与 ζ 函数的关系)

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}$$

其中 $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ 是黎曼 ζ 函数.

ζ 函数在 $s > 1$ 时收敛, $\zeta(2) = \pi^2/6$ 是 第5.4节 巴塞尔问题的结论.γ 与 ζ 的这一联系, 把调和级数、对数与 π 串联在同一条链上, 为 第6章 的无穷乘积与 ζ 函数的系统讨论埋下伏笔.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 5.4 (γ 的无理性)
e 与 π 的无理性都已证明 (第5.1节, 第5.2节), γ 是否为无理数, 至今没有答案. 数学家已经证明, 若 γ 是有理数 p/q, 则 q 必须超过 10^{242080}, 一个天文数字. 这强烈暗示 γ 是无理数, 但严格证明尚未找到.γ 是数学中最基本的常数之一, 其无理性却仍是开放问题.

5.4 巴塞尔问题

5.4.1 问题与历史

第四卷第 16.4 节指出 p-级数 $\sum 1/n^p$ 在 $p>1$ 时收敛, 并提到 $p=2$ 时和为 $\pi^2/6$. 这个结论的历史可以追溯到 1644 年 Pietro Mengoli 提出的问题.

问题 5.1 巴塞尔问题 求无穷级数的精确值:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\ ?$$

这个级数收敛, 因为通项 $1/n^2$ 比 $1/n$ 衰减得快得多, 精确值却迟迟无人算出.1735 年, 28 岁的 Euler 宣布了答案.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

一个纯几何常数 π 出现在一个纯级数的和里, 这个结果震惊了当时的数学界. 它把离散的求和 $\sum 1/n^2$、连续的函数 $\sin x$ 与几何常数 π 绑在了一起.

5.4.2 Euler 的推导思路

Euler 的原始推导基于一个大胆的假设, 把多项式的根与因式分解关系推广到无穷级数, 即“无穷多项式”. 严格证明需要复分析与无穷乘积理论, 属于 第6章 的范畴. 这里给出 Euler 的推导, 展示其惊人的洞察力.

先写出 $\sin x/x$ 的零点. 函数 $\sin x$ 的零点为 $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\dots$. 因此 $\sin x/x$ 的零点（去掉 $x=0$ 这个可去奇点）为 $\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\dots$, 即 $x=\pm n\pi$, $n=1,2,3,\dots$.

再看因式分解的类比. 一个 d 次多项式 $P(x)$ 若有根 $r_1,r_2,\dots,r_d$ 且 $P(0)=1$, 则可分解为

$$P(x)=\prod_{k=1}^{d}\left(1-\frac{x}{r_k}\right).$$

知乎@余命数

Euler 假设这个关系对“无穷多项式”$\sin x/x$ 同样成立, 把 $\pm n\pi$ 配对后得到

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{5-2}$$

这就是 $\sin x$ 的无穷乘积展开. 它的严格证明由 Weierstrass 在近一个世纪后完成.

最后比较系数. 另一方面, $\sin x/x$ 的泰勒展开 (第四卷第 16.4 节) 为

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots = 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots \tag{5-3}$$

把 式 (5-2) 展开, 收集 x^2 项. 每个因子贡献 $-x^2/(n^2\pi^2)$, 交叉项是 x^4 及更高次, 故 x^2 系数为

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

与 式 (5-3) 中 x^2 系数 $-1/6$ 比较:

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{6}.$$

解出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{5-4}$$

注 5.5 (Euler 推导的地位)
Euler 的推导在 1735 年并不严格, 无穷乘积 式 (5-2) 的合法性需要复分析工具才能证明, 把多项式因式分解推广到无穷这一步在当时没有依据. 但这个推导揭示了 $\sin x$、级数 $\sum 1/n^2$ 与 π 之间的深层联系, 直接催生了无穷乘积理论与复分析的发展. 第6章 将系统讨论无穷乘积.
比较系数的方法还可以继续, 比较 x^4 系数得 $\sum 1/n^4 = \pi^4/90$, 比较 x^6 系数得 $\sum 1/n^6 = \pi^6/945$. 一般地, Euler 得到了偶数 ζ 值的公式

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2\cdot(2k)!},$$

其中 B_{2k} 是伯努利数. 奇数 ζ 值 $\zeta(3),\zeta(5),\ldots$ 是否为无理数, 至今大部分仍是未解之谜, 目前 $\zeta(3)$ 的无理性已由 Apéry 于 1978 年证明, $\zeta(5)$ 及更高奇数 ζ 值的无理性仍属开放问题.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

第 6 章

无穷乘积

周期·离散·随机

「对自然的深入研究，是数学发现最丰饶的源泉。」

——傅里叶



第六章 无穷乘积

级数研究无穷次加法, 无穷乘积研究无穷次乘法. 二者通过取对数联系起来, 对数把乘积变成加法, 级数的收敛理论就能搬过来用.

第四卷第 16.4 节已经建立了级数的收敛框架, 本章把它推广到乘积. 三个经典乘积将依次登场: Wallis 乘积把 π 写成无穷多个有理分数相乘, Vieta 公式用嵌套根号给出 π 的乘积表示, 欧拉乘积则把素数分布与 ζ 函数编织进同一个等式.

6.1 无穷乘积的收敛性

6.1.1 部分积与收敛

知乎@余命数

定义 6.1 (无穷乘积) 给定数列 $\{a_n\}$, 称表达式

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots$$

为**无穷乘积**. 构造**部分积数列** $\{P_N\}$:

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 a_2 \cdots a_N.$$

若 $\lim_{N\to\infty} P_N$ 存在且等于非零实数 P, 则称该无穷乘积**收敛**于 P; 若极限不存在或等于零, 则称其**发散**.

收敛值要求非零, 这与级数不同. 若 $P_N \to 0$, 乘积提供的信息太少, 任何一项趋于零都会让整个乘积趋于零, 这种情形归入发散.

知乎@余命数

6.1.2 收敛的必要条件是通项趋于 1

级数收敛要求通项趋于 0; 乘积收敛要求通项趋于 1.

定理 6.1 (通项趋于 1) 若 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

证明 设部分积 $P_N \to P \neq 0$. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = P_n / P_{n-1}$. 由极限的除法法则,

知乎@余命数

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

□

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

通项趋于 1 只是必要条件, 并不充分. 判断充分条件需要借助对数.

6.1.3 取对数把乘积化为级数

取对数把乘法变成加法. 当 $a_n > 0$ 时,

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln a_n.$$

部分积 P_N 的对数恰是对数项的部分和. 由此得到核心判据.

定理 6.2 (对数判据) 设 $a_n > 0$ 对所有 n 成立. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ 收敛. 此时

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n\right).$$

知乎@余命数

证明 记 $S_N = \sum_{n=1}^{N} \ln a_n$, 则 $P_N = e^{S_N}$. 指数函数连续且严格单调, 故 P_N 收敛于非零极限 P 当且仅当 S_N 收敛于 $\ln P$. □

正项级数的全部判别法, 包括比较判别法、比值判别法、积分判别法, 现在都能用于判断无穷乘积的收敛性.

6.1.4 两个基本例子

知乎@余命数

例题 6.1 判断 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 对数级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}.$$

知乎@余命数

部分和裂项:

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{N+1}{N} = \ln(N+1).$$

知乎@余命数

当 $N \to \infty$ 时 $\ln(N+1) \to \infty$, 对数级数发散, 故乘积发散.

例题 6.2 计算 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 对每个因子做因式分解：

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

部分积为

$$P_N=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}.$$

第一个乘积裂项：

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{N-1}{N}=\frac{1}{N}.$$

知乎@余命数

第二个乘积裂项：

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{N+1}{N}=\frac{N+1}{2}.$$

两式相乘：

$$P_N=\frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}.$$

取极限：

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N}=\frac{1}{2}.$$

例题 6.1 中通项 $1+1/n\to1$ 满足必要条件，乘积仍发散；例题 6.2 中通项 $1-1/n^2\to1$ 同样满足必要条件，乘积却收敛于 $1/2$. 区别在于 $\ln(1+1/n)\sim1/n$，对应发散的调和级数，而 $\ln(1-1/n^2)\sim-1/n^2$，对应 $p=2$ 的收敛 p-级数. 对数判据把乘积的敛散性归结为级数的敛散性，第四卷第 16.4 节的全部工具在此生效.

6.2 Wallis 乘积

6.2.1 从积分递推到乘积

第四卷第 17.4.2 小节建立了 $\sin^n x$ 的积分递推，第四卷第 17.6 节据此得到华里士公式. 现在把同一递推推向极限，得到 π 的第一个无穷乘积表示.

记

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由分部积分递推 (第四卷第 17.4.2 小节), 当 $n \geq 2$ 时

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{6-1}$$

起点为 $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$. 反复应用递推:

$n = 2m$ 为偶数时, 递推至 I_0:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{6-2}$$

$n = 2m+1$ 为奇数时, 递推至 I_1:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \tag{6-3}$$

6.2.2 夹逼与极限

在 $[0, \pi/2]$ 上 $0 \leq \sin x \leq 1$, 故 $\sin^{2m+1} x \leq \sin^{2m} x \leq \sin^{2m-1} x$, 积分保号:

$$I_{2m+1} \leq I_{2m} \leq I_{2m-1}. \tag{6-4}$$

将 (6-2) 与 (6-3) 代入 (6-4):

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}.$$

两端同除以 $\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$:

$$\frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2m}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2. \tag{6-5}$$

左右两端的比值:

$$\frac{\dfrac{1}{2m}\left[\dfrac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2}{\dfrac{1}{2m+1}\left[\dfrac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2} = \frac{2m+1}{2m} \to 1 \quad (m \to \infty).$$

两端夹逼同一值, 故

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2. \tag{6-6}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

6.2.3 Wallis 乘积公式

把 (6-6) 中的双阶乘展开.$(2m)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m$, $(2m-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)$, 故

$$\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 = \frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2m)^2}{1^2\cdot 3^2\cdots(2m-1)^2} = \prod_{n=1}^{m}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\cdot(2m+1).$$

代入 (6-6) 后 $2m+1$ 约去, 得到:

知乎@余命数

定理 6.3 (Wallis 乘积)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \tag{6-7}$$

每个因子 $\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{4n^2}{4n^2-1} = 1+\dfrac{1}{4n^2-1} > 1$, 通项趋于 1, 满足第6.1节 的必要条件. 对数 $\ln\left(1+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)\sim\dfrac{1}{4n^2}$, 对应级数收敛, 乘积确实收敛.

Wallis 乘积是 π 的第一个无穷乘积表示(1655 年). 它把超越数 π 表为无穷多个有理数的乘积, 每个因子都简单到只需整数四则运算. 下一节将看到, Vieta 公式给出了更早的、用嵌套根号表示 π 的乘积.

6.3 Vieta 公式

知乎@余命数

6.3.1 倍角公式的逆向使用

半角公式 $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ 把一个正弦拆成两个. 对 $\sin\dfrac{x}{2}$ 再拆, 对 $\sin\dfrac{x}{4}$ 再拆, 如此反复, $\sin x$ 就展开为一系列余弦的乘积.

取 $x=\pi/2$, 此时 $\sin(\pi/2)=1$. 反复套用半角公式:

$$\begin{aligned}
1 = \sin\frac{\pi}{2} &= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\\
&= 2\left(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 2^2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\\
&= 2^3\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\\
&\ \ \vdots\\
&= 2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

知乎@余命数

移项得

$$\frac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})} = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}. \tag{6-8}$$

6.3.2 取极限

当 $n \to \infty$ 时, $\pi/2^{n+1} \to 0$. 由 $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$,

$$2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\pi/2^{n+1})}{\pi/2^{n+1}} \to \frac{\pi}{2}.$$

故 (6-8) 左端趋于 $\dfrac{2}{\pi}$, 右端趋于无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$.

定理 6.4 (Vieta 公式)

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdots \tag{6-9}$$

6.3.3 嵌套根号形式

每个余弦因子可用半角公式 $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ 化为根号嵌套. 由 $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 出发:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \\
\cos\frac{\pi}{16} &= \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/8)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

第 n 个因子的分子是 2 的 n 重嵌套平方根. 代入 (6-9):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots \tag{6-10}$$

Vieta 公式 (1593 年) 是数学史上第一个无穷乘积, 也是 π 的第一个分析表达式. 在它之前, π 只能通过几何作图或多边形逼近来理解; Vieta 公式把 π 写成无穷多个可用尺规作图构造的根号的乘积, 首次用代数运算逼近 π.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

6.3.4 与连分数的对照

第4章 用连分数给无理数配上了嵌套的加法结构, 黄金比 $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$, 分子恒为 1, 分母层层嵌套.Vieta 公式给 π 配上了嵌套的乘法结构, 每个因子是余弦, 余弦又化为根号, 根号层层嵌套. 连分数的嵌套靠除法传递, Vieta 乘积的嵌套靠开方传递, 二者从不同方向把无理数拆解为可计算的无限过程.

6.4 欧拉乘积

6.4.1 黎曼 ζ 函数

第四卷第 16.4 节引入了 p-级数 $\sum \dfrac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时收敛. 把 p 换成连续变量 s, 就得到黎曼 ζ 函数.

定义 6.2 (黎曼 ζ 函数) 对实数 $s > 1$, 定义

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{6-11}$$

$\zeta(2) = \pi^2/6$ 是巴塞尔问题的解, 这一结果将在后续章节给出.$\zeta(s)$ 在 $s > 1$ 时是 s 的连续函数, 随 s 增大而递减, $\zeta(s) \to 1$ $(s \to \infty)$; 当 $s \to 1^+$ 时 $\zeta(s) \to +\infty$(调和级数发散).

6.4.2 欧拉乘积公式

定理 6.5 (欧拉乘积) 对 $s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ 素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \text{ 素数}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) \tag{6-12}$$

其中乘积遍取所有素数 $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

证明 从 $\zeta(s)$ 出发, 逐步筛去每个素数的倍数.

以 $p = 2$ 为例.$\zeta(s) = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \dfrac{1}{4^s} + \dfrac{1}{5^s} + \cdots$. 两端乘 $\dfrac{1}{2^s}$:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

相减：

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots \tag{6-13}$$

右端不再含 2 的倍数对应的项.

对 (6-13) 重复同样的操作，两端乘 $\frac{1}{3^s}$：

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\cdots$$

相减：

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\cdots \tag{6-14}$$

右端不再含 2 或 3 的倍数对应的项.

对每个素数 p 重复这一做法，用 $\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ 乘当前表达式，筛去剩余项中 p 的倍数. 这正是埃拉托色尼筛法，依次用 $2,3,5,7,11,\ldots$ 筛去各自的倍数.

对前 k 个素数 $p_1,p_2,\ldots,p_k$ 执行筛法后：

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)\zeta(s)=\sum_{\substack{n\geq 1\\ p_1,\ldots,p_k\nmid n}}\frac{1}{n^s}.$$

右端求和遍取不被 $p_1,\ldots,p_k$ 整除的正整数. 当 $k\to\infty$ 时，由 第一卷第 1.6 节的算术基本定理，每个大于 1 的整数 n 都有唯一的素因子分解，故 n 必被某个素数整除. 剩余求和中唯一不被任何素数整除的数只有 $n=1$，右端趋于 1：

$$\prod_{p\text{ 素数}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)=1.$$

移项即得 (6-12). □

6.4.3 几何级数展开

(6-12) 的第二个等号来自几何级数. 对每个素数 p，

$$\frac{1}{1-p^{-s}}=1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}.$$

把所有素数对应的几何级数相乘，展开后每一项形如

$$\frac{1}{p_1^{k_1 s}\,p_2^{k_2 s}\cdots p_r^{k_r s}}=\frac{1}{(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r})^s}=\frac{1}{n^s},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其中 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. 由算术基本定理, 每个正整数 n 对应唯一的素数幂分解, 故展开式恰好给出 $\sum \dfrac{1}{n^s} = \zeta(s)$, 每项出现且仅出现一次.

6.4.4 素数与分析的桥梁

欧拉乘积把两个看似无关的对象联系在一起. 左端 $\zeta(s)$ 是连续变量 s 的函数, 由全体正整数构成, 属于分析学; 右端是遍取所有素数的无穷乘积, 素数是离散的、由整除性定义的对象, 属于数论. 一个等式把连续与离散、分析与数论焊接在一起.

第一卷第 1.6 节定义了素数并给出算术基本定理, 即每个大于 1 的正整数唯一分解为素数之积. 欧拉乘积正是这一唯一性在分析层面的投影, $\zeta(s)$ 对全体正整数求和, 乘积形式对全体素数求积, 二者相等, 靠的就是每个整数的素因子分解唯一.

欧拉乘积还给出了素数无穷的另一个证明: 若素数只有有限个, 乘积 $\prod_p \dfrac{1}{1-p^{-s}}$ 是有限乘积, 对所有 $s > 1$ 取有限值; 但当 $s \to 1^+$ 时 $\zeta(s) \to +\infty$, 有限乘积无法发散到无穷, 矛盾. 它与 第一卷第 1.6 节中欧几里得的证明结论相同.

黎曼把 $\zeta(s)$ 的定义域从实数 $s > 1$ 延拓到整个复平面, 发现 $\zeta(s)$ 的非平凡零点全部落在复平面上 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 这条直线上, 这就是黎曼猜想, 至今未被证明. 零点的分布决定了素数计数的精确渐近行为, 欧拉乘积是这条道路的起点.

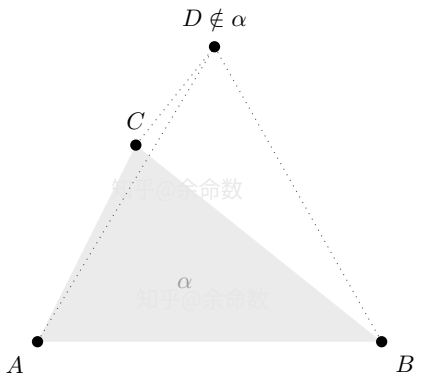
知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

习题解答

第 2 章立体几何

2.1. **解** 先题

该论断为假. 取不共线的三个点 A, B, C, 据公理 1 其确定唯一一个平面, 记为 α. 在平面 α 之外任取一点 D(这样的点必然存在, 否则空间将退化为平面).

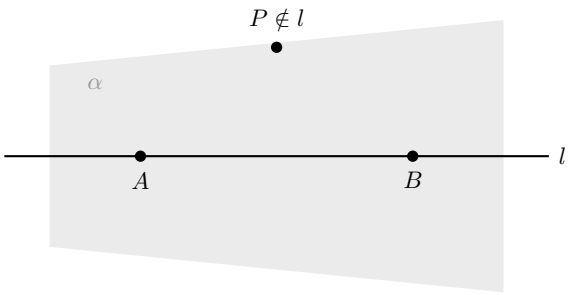


知乎@余命数

假设四点 A, B, C, D 共面于某个平面 β. 由 A, B, C 均在 β 内且不共线, 据公理 1 的唯一性, 平面 β 必须就是平面 α, 从而点 D 落在平面 α 内. 这与 D 取自 α 之外相矛盾, 故假设不成立. 空间中可以取到四个不共面的点, 它们构成的几何体即四面体.

2.2. **解** 再题

设已知直线为 l, 点为 P, 且 $P \notin l$. 在直线 l 上任取两个不同的点 A, B. 由 P 不在直线 l 上, 三点 P, A, B 不共线.



据公理 1, 不共线的三点 P, A, B 确定唯一一个平面 α. 点 P 为确定 α 的三点之一, 故 $P \in \alpha$; 点 A, B 同在直线 l 上, 又是确定 α 的点, 故 $A \in \alpha$ 且 $B \in \alpha$. 据公理 2, 直线 l 落在平面 α 内. 存在性得证.

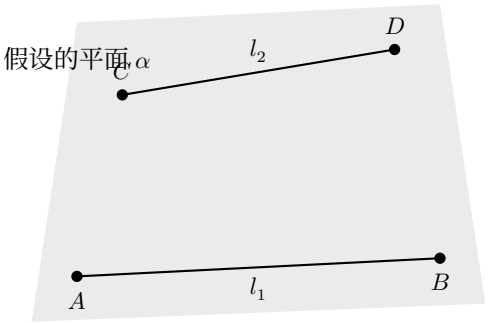
任一包含直线 l 与点 P 的平面都必含 A, B, P 三点, 而这三个不共线的点仅能确定一个平面, 故满足条件的平面唯一.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.3. **解** 接着题

设直线 AB 为 l_1, 直线 CD 为 l_2, 即证不存在任何平面能同时包含 l_1 与 l_2.

用反证法. 假设存在一个平面 α 同时包含 l_1 与 l_2.



由 $l_1 \subset \alpha$ 与点的从属关系, 直线上的所有点都在平面内, 故 $A \in \alpha$ 且 $B \in \alpha$; 同理由 $l_2 \subset \alpha$ 得 $C \in \alpha$ 且 $D \in \alpha$. 于是 A, B, C, D 四点皆在 α 内, 即四点共面.

此结论与题设四点 A, B, C, D 不共面相矛盾, 故假设不成立. 据异面直线的定义, 直线 AB 与 CD 是异面直线.

2.4. **解** 最后题

点 K 既在直线 MN 上, 又在直线 PQ 上. 考察由不共面的四点 A, B, C, D 所确定的两平面 ABC 与 ADC. 据公理 3, 二者必相交于一条直线; 点 A 与点 C 是其公共点, 故交线即直线 AC.

点 M 在棱 AB 上, 点 N 在棱 BC 上, 由 $AB, BC \subset$ 平面ABC 知 $M, N \in$ 平面ABC. 据公理 2, 直线 MN 落在平面 ABC 内, 由 $K \in MN$ 得 $K \in$ 平面ABC.

同理, 点 P 在棱 CD 上, 点 Q 在棱 DA 上, 由 $CD, DA \subset$ 平面ADC 知 $P, Q \in$ 平面ADC. 据公理 2, 直线 PQ 落在平面 ADC 内, 由 $K \in PQ$ 得 $K \in$ 平面ADC.

点 K 同属两平面, 即为它们的公共点, 故必落在交线上. 而交线为 AC, 故 K 在直线 AC 上, A, C, K 三点共线.

2.5. **解** 第五题

设三条直线为 l_1, l_2, l_3, 两两相交, 设 $l_1 \cap l_2 = P_3$、$l_2 \cap l_3 = P_1$、$l_3 \cap l_1 = P_2$.

若 $P_1 = P_2 = P_3$, 设此公共点为 O, 则 l_1, l_2, l_3 皆过点 O, 据定义三直线共点.

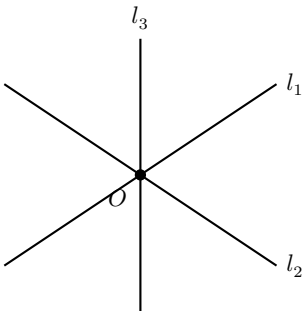
否则三个交点不完全重合, 不失一般性设 $P_1 \neq P_2$.l_1, l_3 是两条相交直线(交于 P_2), 据本节推论确定唯一平面 α, 故 $l_1 \subset \alpha$ 且 $l_3 \subset \alpha$.

点 P_1 是 l_2 与 l_3 的交点, 由 $l_3 \subset \alpha$ 知 $P_1 \in \alpha$; 点 P_3 是 l_2 与 l_1 的交点, 由 $l_1 \subset \alpha$ 知 $P_3 \in \alpha$. 若 $P_1 = P_3$, 则 l_1, l_3 都与 l_2 交于同一点, 化归前一情形; 故此时 P_1, P_3 是 l_2 上两个不同的点. 直线 l_2 上有两点 P_1, P_3 在 α 内, 据公理 2, $l_2 \subset \alpha$.

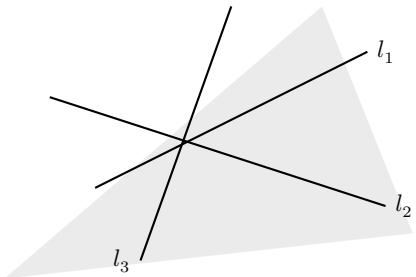
l_1, l_2, l_3 三条直线皆位于平面 α 内, 据定义三直线共面. 故三条两两相交的直线, 或共点, 或共面.

2.6. **解** 第六题

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



共点情形



共面情形

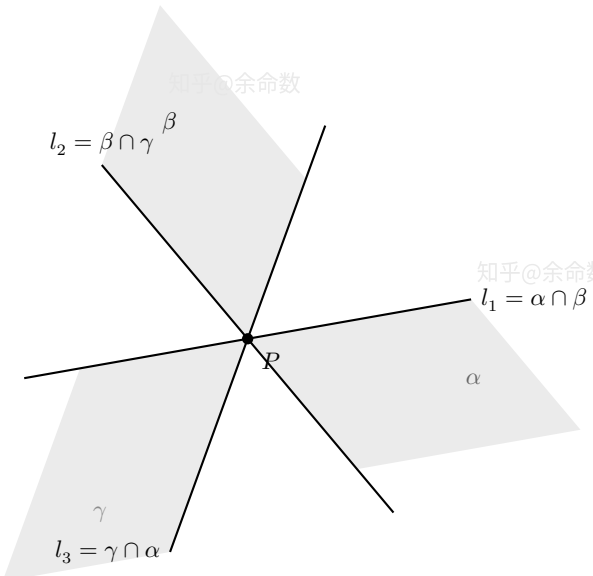
设这四条不同的直线为 l_1, l_2, l_3, l_4. 取其中三条, 例如 l_1, l_2, l_3, 它们两两相交, 据上一题结论, 三者或共点, 或共面. 题设规定任意三条都不共面, 故 l_1, l_2, l_3 只能共点, 设公共点为 O.

对另取的三条 l_1, l_2, l_4, 它们同样两两相交且不共面, 故亦共点, 公共点即 l_1 与 l_2 的交点 O. 因而 l_4 也经过 O.

l_1, l_2, l_3, l_4 四条直线皆过点 O, 即四直线共点.

2.7. 解 第七题

设 $\alpha \cap \beta = l_1$、$\beta \cap \gamma = l_2$、$\gamma \cap \alpha = l_3$. 由 $l_1 = \alpha \cap \beta$ 知 $l_1 \subset \alpha$, 由 $l_3 = \gamma \cap \alpha$ 知 $l_3 \subset \alpha$, 故 l_1, l_3 同在平面 α 内, 是共面直线. 题设三交线互不平行, 故 l_1 与 l_3 相交, 设交点为 P.



$P \in l_1$, 而 l_1 是平面 α, β 的交线, 故 $P \in \alpha$ 且 $P \in \beta$; 又 $P \in l_3$, 而 l_3 是平面 γ, α 的交线, 故 $P \in \gamma$ 且 $P \in \alpha$. 合之, 点 P 同时属于平面 β 与平面 γ.

据公理 3, 两个有公共点的平面必交于一条通过该点的直线. 点 P 是平面 β 与 γ 的公共点, 故落在二者的交线即 l_2 上, 即 $P \in l_2$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

l_1 与 l_3 的交点 P 既在 l_2 上,三条交线 l_1, l_2, l_3 便交于同一点 P,即三交线共点.

2.8. **解 第八题**

设平面 ABC 为 π_1,平面 $A'B'C'$ 为 π_2,交线为 l. 即证 P, Q, R 均在 l 上.

对点 $P = AB \cap A'B'$:P 在直线 AB 上,而 $AB \subset$ 平面ABC,即 π_1,故 $P \in \pi_1$;P 又在 $A'B'$ 上,而 $A'B' \subset$ 平面$A'B'C'$,即 π_2,故 $P \in \pi_2$.P 同时属于 π_1, π_2,故位于其交线 l 上.

至于 P 之存在,它等价于直线 AB 与 $A'B'$ 相交,即二者共面且不平行. 考察由点 O, A, B 确定的平面 π_{OAB}:A, A' 都在直线 OA 上,B, B' 都在直线 OB 上,故 A, B, A', B' 四点共在此平面内,AB 与 $A'B'$ 共面;只要二者不平行,P 即存在;题设并不保证这一点(取 $A' = 2A$、$B' = 2B$、$C' = 3C$ 即得 $AB \parallel A'B'$),以下讨论以 AB 与 $A'B'$ 不平行即 P 为有穷远点为前提.

对点 $Q = BC \cap B'C'$:由 $Q \in BC \subset \pi_1$ 与 $Q \in B'C' \subset \pi_2$,得 Q 在交线 l 上;其存在性由直线 BC 与 $B'C'$ 在平面 OBC 内共面且不平行所保证.

对点 $R = CA \cap C'A'$:由 $R \in CA \subset \pi_1$ 与 $R \in C'A' \subset \pi_2$,得 R 在交线 l 上;其存在性由直线 CA 与 $C'A'$ 在平面 OCA 内共面且不平行所保证.

P, Q, R 三点同在直线 l,即 π_1 与 π_2 的交线上,故共线.

第 4 章连分数

4.1. **解** $a_0 = \lfloor\sqrt{6}\rfloor = 2$.$\sqrt{6} - 2$ 取倒数:$\dfrac{1}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{\sqrt{6}+2}{2} \approx 2.225$,$a_1 = 2$. 余 $\dfrac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$,取倒数 $\dfrac{2}{\sqrt{6}-2} = \sqrt{6}+2 \approx 4.449$,$a_2 = 4$. 余 $\sqrt{6}+2-4 = \sqrt{6}-2$,取倒数又得 $\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$,回到 a_1 的起点. 故 $\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$,周期为 2.

4.2. **解** 前五个渐近分数为 $\dfrac{1}{1}$、$\dfrac{2}{1}$、$\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{5}{3}$、$\dfrac{8}{5}$,数值约 1.000、2.000、1.500、1.667、1.600.$\varphi \approx 1.618$. 偶数阶 ($k = 0, 2, 4$):$1.000 < 1.500 < 1.600$,递增,均小于 φ;奇数阶 ($k = 1, 3$):$2.000 > 1.667$,递减,均大于 φ. 二者从两侧夹逼 φ,符合 定理 4.2.

4.3. **解** 反设 $\alpha = \dfrac{m}{n}$ 为有理数. 由 定理 4.11,每个满足该不等式的 $\dfrac{a}{b}$ 都是 α 的渐近分数;而有理数的渐近分数只有有限个(定理 4.1,其连分数有限),矛盾.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

PROJECT AKARI

AKARI

内容简介

《中学数学之旅》把初等数学当作一个完整的体系，从初中运算的起点一路讲到大学数学的门口. 全书五卷按数学自身的生长顺序编排，从代数语言与函数出发，经周期、离散与随机，走过几何主干，拧成极限、导数与积分的分析主干，最后扩到复数、空间与线性结构. 每条结论尽量给出推导；高考与竞赛的主干题材全部覆盖，取舍只看一条，它在数学结构里是否承重.

无论你是准备升学的学生、带学生的老师，还是想把数学重新学一遍的人，这本书都用得上.

本系列分卷

第 1 卷：预备知识、集合与映射、函数、函数方程、不等式
第 2 卷：三角函数、数列、统计、计数原理、概率
第 3 卷：平面向量、解三角形、解析几何、极坐标与参数方程、射影几何
第 4 卷：极限与导数、简单的积分、微分方程初步、数学思想浅谈
第 5 卷：复数、立体几何、矩阵与行列式、连分数、常数 e、π 与 γ、无穷乘积

公开版 • 10 月 7 日

Project Akari